

Algebra booleana

ALGEBRA BOOLEANA

- **George Boole** matematico inglese (XIX secolo)
- Sua algebra utilizzata solo dall'inizio del XX secolo (primi sistemi di calcolo)
- Si basa su variabili dette **logiche o booleane** aventi due soli possibili valori:
 - VERO (sinonimi: true, T, 1, acceso, ON, etc...)
 - FALSO (sinonimi: false, F, 0, spento, OFF etc...)

Funzioni booleane

- Usando le variabili booleane, si possono costruire le funzioni booleane (o funzioni logiche).
- Es. una funzione booleana di tre variabili:

$$F(x,y,z)$$

Il codominio e' costituito da due soli possibili stati:

- true - vero - 1
- false - falso - 0

Tabella della verità

- Ogni funzione booleana è caratterizzata dalla propria *tabella di verità*

x	y	z	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Funzioni booleane

- **Funzioni completamente specificate:** se per tutte le combinazioni delle variabili il suo valore è determinato
- **Funzioni non completamente specificate:** se a una o più combinazioni delle sue variabili non corrisponde alcun valore della funzione

Costanti booleane

- Oltre alle variabili vi sono anche le costanti
- Essendo l'Algebra Booleana definita su due soli simboli, esistono solo due costanti:
 - 0
 - 1

Operatori logici

- Tra le variabili e le costanti possono intervenire delle relazioni
- Esistono due tipi di operatori, in dipendenza dal numero di variabili che utilizzano:
 - ➔ monadici
 - ➔ diadici

L'operatore NOT

- Il risultato è il complemento dell'unica variabile

x	NOT x
0	1
1	0

L'operatore AND

- Il risultato è *vero* se e solo se sono *vere* entrambe le variabili

a	b	a AND b
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

L'operatore OR

- Il risultato è *vero* se e solo se è *vera* almeno una delle variabili

a	b	a OR b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

L'operatore XOR

- Il risultato è *vero* se e solo se è *vera* solo una delle due variabili

a	b	a XOR b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Operatori – *nomenclatura e simbologia*

- NOT: inversione ($\bar{\quad}$)
- AND: prodotto logico (\cdot)
- OR: somma logica ($+$)
- XOR: or esclusivo (\oplus)

Operatori universali

- Con gli operatori NOT, OR, AND, XOR si possono costruire tutte le funzioni booleane
- Esistono due operatori (NAND, NOR) che permettono la sintesi di *qualsiasi funzione*, utilizzando un unico tipo di operatori

L'operatore NAND

- Il risultato è *vero* solo se è *falso* l'AND tra le due variabili

a	b	a NAND b
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

L'operatore NOR

- Il risultato è *vero* solo se è *falso* l'OR tra le due variabili

a	b	a NOR b
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Espressioni logiche

- Un insieme di variabili e/o costanti booleane a cui siano applicati gli operatori logici si dice *espressione booleana* o *logica*
- Una espressione logica rappresenta una funzione logica: ad esempio:

$$T = a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b$$

Precedenze tra operatori

- Le precedenze sono simili al $+$ e al \times dell'algebra consueta:
 - priorità alta \times
 - priorità bassa $+$

Proprietà dell'algebra booleana

$$X \cdot 0 = 0$$

$$X \cdot 1 = X$$

$$X \cdot X = X$$

$$X \cdot \bar{X} = 0$$

$$X \cdot Y = Y \cdot X$$

$$X \cdot (X + Y) = X$$

$$X \cdot (\bar{X} + Y) = X \cdot Y$$

$$X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$$

$$X + 1 = 1$$

$$X + 0 = X$$

$$X + X = X$$

$$X + \bar{X} = 1$$

$$X + Y = Y + X$$

$$X + (X \cdot Y) = X$$

$$X + (\bar{X} \cdot Y) = X + Y$$

$$X + (Y \cdot Z) = (X + Y) \cdot (X + Z)$$

idempotenza

complementazione

commutativa

assorbimento

distributiva

Proprietà dell'algebra booleana

Associativa

$$X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot Y \cdot Z$$

$$X + (Y + Z) = (X + Y) + Z = X + Y + Z$$

$$\overline{(\overline{X})} = X$$

$$\overline{X \cdot Y} = \overline{X} + \overline{Y}$$

$$\overline{X + Y} = \overline{X} \cdot \overline{Y}$$

De Morgan