

IAMS

10/20

Panoramica introduttiva (1)

Andiamo nello spazio per motivi: scientifici, tecnologici, commerciali, esplorativi

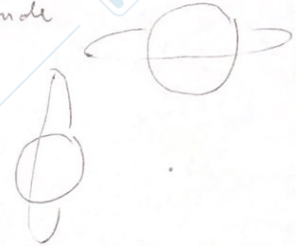
Classificazione delle orbite:

- in base alla loro distanza dalla Terra: LEO (Low Earth Orbit)

MEO 5.000 - 20.000 km, GEO 36.000 km, HEO 100 - 1500 km

- in base alla inclinazione sull'equatore: equatoriale

polare

2. Problema fondamentale della meccanica celeste2.1 PROBLEMA DEI N CORPI

Obiettivo: identificare la traiettoria \mathbf{z} e la legge oraria \mathbf{s} di ciascun corpo celeste m_i , sotto l'influenza delle forze gravitazionali \mathbf{F}

Hip: N corpi masse uniformi, sistema isolato

Scrivendo la IEC per sistema di N punti con assi cartesiani nell'origine del sist. solare (legge conservazione quantità di moto)

$$G = 6.67259 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$$

$$\frac{d\mathbf{Q}_i}{dt} = \mathbf{R}^{\text{est}} \Rightarrow m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N - \frac{G m_j m_i}{\|\mathbf{r}_{ji}\|^3} \mathbf{r}_{ji} \quad \mathbf{r}_{ji} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$$

$$\Rightarrow 6 \text{ cost } (C_1, C_2) \times 3$$

1 eq. diff vett \mathbb{R}^3 ind = 3 eq. diff scal \mathbb{R}^3 ind = 6 eq. diff scal \mathbb{R}^3 ind

Dalla II EC $\sum_i \mathbf{r}_i \wedge m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i$ (legge di conservazione momento di quantità di moto) sostituendo \mathbf{F} e \mathbf{r}_{ji}

$$\sum_i \mathbf{r}_i \wedge m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{T}_0 = \mathbf{C}_3 \quad \rightarrow 3 \text{ cost}$$

$6N - 9$ costanti nessuno

Inoltre, le forze conservative so gravitazionali sono conservative (legge di conservazione della energia meccanica della quantità di moto), da cui

$$\sum_i \frac{dT_i}{dt} = \sum_i \frac{dV_i}{dt} \Rightarrow \sum_i \frac{d(T_i - V_i)}{dt} = 0 \quad E_{\text{tot}} = C_4$$

$6N - 10$ incognite.

Il problema degli N corpi non ha soluzione in forma chiusa

①

Potremo semplificare (in ottima approssimazione) il problema degli N corpi restringendo il campo a solo i due attori che danno contributi maggiori.

2.2 PROBLEMA DEI DUE CORPI (MODELLO KEPLERIANO)

Hip: masse 2 puntiformi $N=2$

Valido se: masse dei corpi $N=2$ sono piccole
distanze dei $N=2$ corpi sono grandi

Il moto del corpo piú piccolo sarà governato prevalentemente dai corpi per cui $\frac{m}{\|r\|^2}$ è grande.

GIUSTIFICHIAMO: Giove (Jupiter) e il Sole (Sun \odot) hanno massa rispettivamente 10^{27} e 10^{30} (c.a.). Come mai la Terra che ruota attorno al sole può essere considerata escludendo le perturbazioni di Giove?

$$1 \text{ u.a.} = 149.6 \cdot 10^6 \text{ km} = \text{distanza Sole-Terra}$$

Perché il Sole si trova ad 1 u.a. mentre Giove nell'ordine delle 5

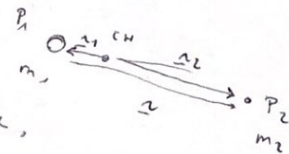
Per cui $\frac{10^{30}}{(1)^2} \gg \frac{10^{27}}{(5)^2}$ (almeno 4 ordini di grandezza di differenza)

Sommando la I.E.C. per i due punti, di massa (m_1, m_2) , forza (F_{21}, F_{12}) e distanza (r_{21}, r_{12}) otteniamo che CENTRO MASSA $r_{CM} = \frac{m_1 r_{11} + m_2 r_{22}}{m_1 + m_2}$

$$e \quad M \ddot{r}_{CM} = 0 \quad r_{CM}(t) = c_1 t + c_2$$

Il CM si muove di moto rettilineo uniforme ($2 \times 3 = 6$ costanti).

L'EQUAZIONE DEL MOTO KEPLERIANO (eq. moto due corpi) la si ottiene studiando il moto relativo di P_2 rispetto a P_1 con origine nel CM



Dopo aver scelto r_1 e r_2 in funzione delle masse, calcolate la I.E.C. per P_1

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -G \frac{(m_1 + m_2)}{|r|^3} r = -\frac{\mu}{|r|^3} r$$

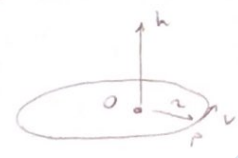
NB $m_2 \sim 1 \cdot 10^4$ kg (satellite artificiale) $m_1 \sim 10^{24}$ kg (Terra)

Il CM sarà molto vicino alla Terra, per cui possiamo approssimare a costante $G(m_1 + m_2) \sim G m_1 = \mu = \text{TARAMETRO GRAVITAZIONALE}$

$$\mu_T = 398600 \frac{\text{km}^3}{\text{s}^2}$$

Proseguiamo la ricerca delle costanti di moto relative

Iniziamo dal MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO, sapendo la I EC $\underline{r} \wedge \frac{d\underline{L}}{dt} = -\underline{r} \wedge \frac{\underline{M}}{|\underline{L}|^3} \underline{L} = 0$



che vuol dire $\underline{r} \wedge \underline{a} = 0$,

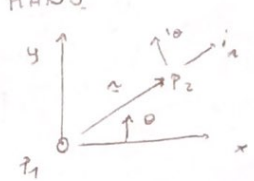
nonché che si tratta di un moto centrale. Dalla meccanica analitica sappiamo che il momento angolare \underline{h} conserva, e si calcola come

$$\underline{h} = \underline{r} \wedge \underline{v} = C_3 = \text{costante}$$

DIM $\frac{d\underline{h}}{dt} = \dot{\underline{r}} \wedge \underline{v} + \underline{r} \wedge \underline{a} = \underline{v} \wedge \underline{v} + \underline{r} \wedge \underline{a} = 0 \quad \text{CVD}$

Essendo che \underline{h} è ortogonale ad \underline{a} e \underline{v} $\forall t$, ed è costante, ne risulta che il luogo generico delle posizioni è un PIANO.

Scrivendo in polari $\underline{r} = r \underline{i}_r \quad \underline{v} = \dot{r} \underline{i}_r + r \dot{\theta} \underline{i}_\theta$



$$\underline{h} = \underline{r} \wedge \underline{v} = r \underline{i}_r \wedge (\dot{r} \underline{i}_r + r \dot{\theta} \underline{i}_\theta) = \dot{r} \underline{i}_r \wedge \underline{i}_r + r^2 \dot{\theta} \underline{i}_r \wedge \underline{i}_\theta = r^2 \dot{\theta} \underline{k}$$

$$h = \|\underline{h}\| = r^2 \dot{\theta} = \text{cost}$$

Essendo h costante, $\dot{\theta}$ aumenta al diminuire di r (e viceversa)

La seconda costante (C_4) la si ottiene dal valore VALORE ECCENTRICITÀ

Dopo aver moltiplicato ~~scalarmemente~~ ~~vettorialmente~~ per \underline{h} la I EC per P_1

$$\underline{h} \wedge \frac{d^2 \underline{r}}{dt^2} = -\frac{\underline{h} \wedge \underline{M}}{|\underline{L}|^3} \underline{r} \quad \text{ottergo} \quad \frac{d}{dt} [(\underline{h} \wedge \underline{v}) + \mu \underline{i}_r] = 0 \quad \text{costante}$$

da cui definiamo la costante $\mu \underline{e} \quad \underline{v} \wedge \underline{h} - \mu \underline{i}_r = \mu \underline{e}$

ed otteniamo l'eccentricità $\underline{e} = \frac{\underline{v} \wedge \underline{h}}{\mu} - \underline{i}_r = C_4$

Infine studiamo l'energia ENERGI MECCANICA (C_5), moltiplicando scalarmemente per \underline{v} la I EC

$$\underline{v} \cdot \frac{d\underline{L}}{dt} = -\underline{v} \cdot \frac{\underline{M}}{|\underline{L}|^3} \underline{L} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \underline{v}^2 - \frac{\mu}{r} \right) = 0$$

e quindi $E = \frac{1}{2} \underline{v}^2 - \frac{\mu}{r} = C_5$ nonché l'energia meccanica si conserva.

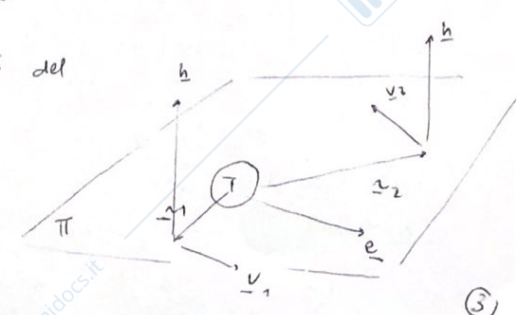
Costanti del moto assoluto (C_1, C_2) \rightarrow CM \rightarrow 6 scalari.
moto relativo $C_3 = h$

Sono 12 indipendenti?

Sono 11 costanti indipendenti per il legame

che sussiste tra $\underline{e} = \frac{\underline{v} \wedge \underline{h}}{\mu} - \underline{i}_r \Rightarrow \underline{h} \cdot \underline{e} = 0$

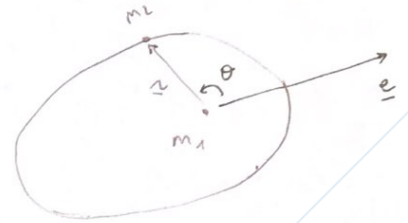
$\begin{matrix} \mu \\ \in \Pi \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 \\ \in \Pi \end{matrix}$



3. Soluzione del problema dei 2 corpi

Moltiplichiamo scalarmemente per \underline{r} il vettore eccentricità.

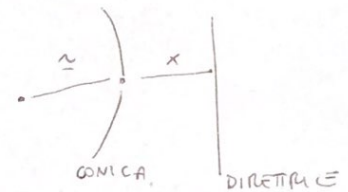
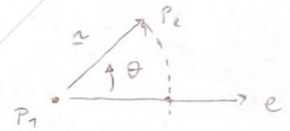
$$\underline{r} \cdot \underline{e} = \underline{r} \cdot \left[\frac{(\underline{L} \wedge \underline{h})}{\mu} - \underline{i}_n \right]$$



Introduciamo l'angolo tra \underline{e} e \underline{r} : $\theta = \text{ANOMALIA VERA}$

$\underline{r} = \frac{h^2/\mu}{1 + e \cos \theta}$ EQUAZIONE DI UNA CONICA IN COORDINATE POLARI

- Proprietà:
- l'eccentricità delle coniche è proprio $\|\underline{e}\|$
 - θ è l'angolo compreso tra \underline{r} ed \underline{e}
 - all'aumentare di $\theta \Rightarrow \cos \theta \downarrow \rightarrow \underline{r} \uparrow$
 ↳ il punto di minima distanza r_{\min} ha $\theta = 0$
 - \underline{e} è allineato al punto di minima distanza (PERIGENTRO)
 - $e = \frac{r}{x} = \text{costante}$



3.1 GEOMETRIE DELLE CONICHE

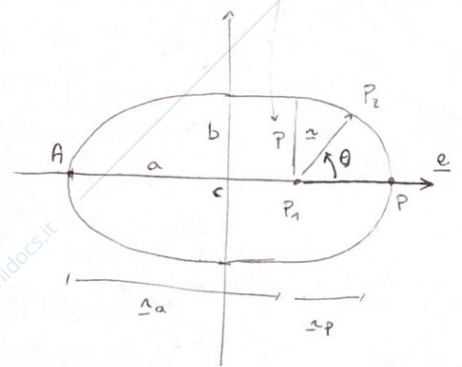
- $e = \text{eccentricità}$ $e = 0$ circonferenza
- forma dell'orbita $0 < e < 1$ ellisse
- $e = 1$ parabola
- dimensione dell'orbita $e > 1$ iperbole

- A: apocentro P: pericentro
- a: semiasse maggiore b: semiasse minore
- c: centro dell'ellisse

Per un'ellisse avremo che $0 < e < 1$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad p = \frac{h^2}{\mu} = a(1 - e^2) = \frac{r_p r_a}{r_p + r_a}$$

$r(\frac{\theta}{2}) = \frac{h^2}{\mu} = p$ PARAMETRO DELLE CONICHE (semilato-retto)



$$a = \frac{r_p + r_a}{2}$$

$$r_p (\theta = 0) = \frac{p}{1 + e} \quad r_a (\theta = \pi) = \frac{p}{1 - e} \quad e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} \quad b = a\sqrt{1 - e^2}$$

NB In generale la velocità di un corpo in moto lungo l'orbita può essere scritta come la somma di due componenti, una radiale e una trasversale $\underline{v} = v_r \underline{i}_r + v_\theta \underline{i}_\theta$. con $v_r = \frac{pe \sin \theta}{(1 + e \cos \theta)^2} \dot{\theta}$ e $v_\theta = r(\theta) \dot{\theta}$

Nei punti epicentrici (P, A) \rightarrow (pericentro, apocentro), essendo $\theta = 0, \pi$ rispettivamente, la componente al numeratore fa annullare la velocità radiale $\underline{v} = v_\theta \underline{i}_\theta$. La v in P assume valore massimo, e in A valore minimo (h costante e r_p, r_a distanza min e max)

3.2 CONSIDERAZIONI ENERGETICHE

Tornando a pg. 3, nella determinazione delle costanti, abbiamo definito

$$E = C_5 \Rightarrow \bar{E} = \frac{1}{2} \underline{v} \cdot \underline{v} - \frac{\mu}{r} \quad h = \|\underline{r} \wedge \underline{v}\| = r v_{\theta}$$

Studiamo il caso particolare dell'energia al pericentro

$$E_p = \frac{1}{2} v_p^2 - \frac{\mu}{r_p} \quad \text{ma} \quad h_p = h = \|r_p \wedge v_p\| = r_p v_p \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = r_p v_p \Rightarrow v_p^2 = \frac{h^2}{r_p^2}$$

$$\text{quindi} \quad E_p = \frac{1}{2} \frac{h^2}{r_p^2} - \frac{\mu}{r_p} = \frac{1}{2} \frac{\mu p}{r_p^2} - \frac{\mu}{r_p} = \frac{1}{2} \frac{\mu a(1-e^2)}{a^2(1-e)^2} - \frac{\mu}{a(1-e)} = \frac{\mu}{a} \left(\frac{(1+e)}{2(1-e)} - \frac{1}{(1-e)} \right)$$

e risolvendo all'interno delle tande avremo \Rightarrow l'energia meccanica dipende solo dal semiasse maggiore

$$E_p = -\frac{\mu}{2a} \quad (\text{valida per tutte le coniche})$$

orbite paraboliche

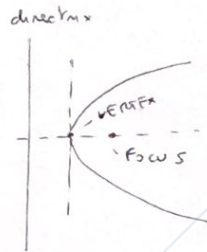
$$e = 1$$

$$r = \frac{p}{1 + \cos \theta}$$

$$r_p = \frac{p}{2} \quad r_a = \frac{p}{1-e} \rightarrow \infty$$

$$a = \frac{r_p + r_a}{2} \rightarrow \infty$$

$$E = -\frac{\mu}{2a} = 0 \Rightarrow v_{\infty} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2a} \right)} = 0$$



orbite iperboliche

$$e > 1$$

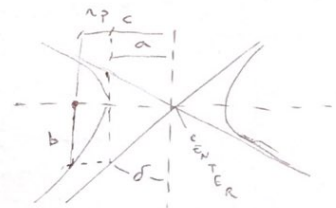
$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

$$r_p = \frac{p}{1+e}$$

$$r_a = \frac{p}{1-e}$$

$$b = a \sqrt{e^2 - 1}$$

$$E = -\frac{\mu}{2a} > 0$$



$$p = a(1-e^2) \quad p > 0, e > 1, a < 0$$

$$r_{\infty} = \frac{p}{1 + e \cos \theta_{\infty}} \Rightarrow 0 = 1 + e \cos \theta_{\infty} \Rightarrow \cos \theta_{\infty} = -\frac{1}{e}$$

$$v_{\infty} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2a} \right)} > 0 \quad e = \frac{r_p v_p^2}{\mu} - 1$$

Esiste un legame tra energia (quantità meccanica) e a (quantità geometrica che determina la dimensione dell'orbita).

Per un'elisse, ad esempio, μ è positivo e a (distanza) pure quindi E scuro < 0 .
Detto in modo informale, all'aumentare di a cresce l'energia della conica (E è meno negativa).

Il livello energetico definisce il tipo di orbita. $E = \frac{1}{2} \underline{v} \cdot \underline{v} - \frac{\mu}{r}$

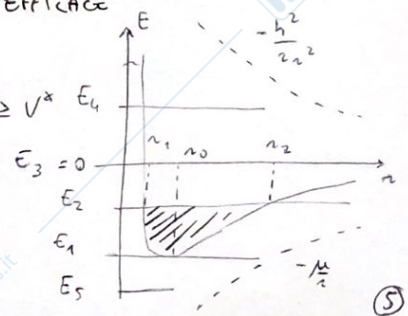
$$\text{ma} \quad \underline{v} = v_r \underline{i}_r + v_{\theta} \underline{i}_{\theta} = \dot{r} \underline{i}_r + r \dot{\theta} \underline{i}_{\theta} = \dot{r} \underline{i}_r + \frac{h}{r} \underline{i}_{\theta} \quad \text{da} \quad h = r^2 \dot{\theta}$$

Sostituendo nella equazione per l'energia, otteniamo

$$\frac{1}{2} \dot{r}^2 = E - \left(\frac{h^2}{2r^2} - \frac{\mu}{r} \right) \geq 0 \quad \text{con} \quad V^* = \frac{h^2}{2r^2} - \frac{\mu}{r} \quad \text{POTENZIALE EFFICACE}$$

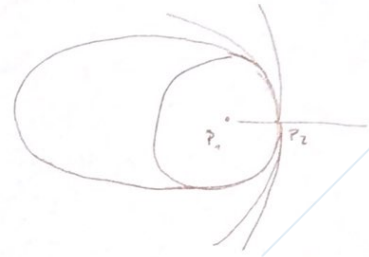
$$E - V^* \geq 0 \quad \text{il moto è AMMISSIBILE solo per} \quad E \geq V^* \quad E_4$$

- E_1 : $r = r_0 = \text{cost} \rightarrow$ CIRCONFERENCE
- E_2 : $r_1 \leq r \leq r_2 \rightarrow$ ELLISSE $\cdot E_2 < E_3$: IMPOSSIBILE
- E_3 : $r_1 \leq r \leq \infty \rightarrow$ PARABOLA $\cdot E_4$: IPERBOLE



NB Si evince che, al variare dell'energia cambia il tipo di orbita

$e = 0$	$E < 0$	$a > 0$	CIRCONFERENZA
$0 < e < 1$	$E < 0$	$a > 0$	ELLISSE
$e = 1$	$E = 0$	$a \rightarrow \infty$	PARABOLA
$e > 1$	$E > 0$	$a < 0$	IPERBOLE



3.3 VELOCITÀ LUNGO ORBITA ELLITTICA

Calcoliamo in forma chiusa le componenti delle velocità lungo la conica in funzione di due scalari $\{p, e\}$, partendo dalla equazione ottenuta dall'energia

$$\frac{1}{2} v^2 - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}$$

- pericentro $\frac{1}{2} v_p^2 - \frac{\mu}{r_p} = -\frac{\mu}{2a} \rightarrow v_p^2 = \frac{2\mu}{r_p} - \frac{\mu}{a} = \frac{2\mu(1+e)}{r_p} - \frac{\mu(1-e^2)}{r_p} \Rightarrow v_p = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1+e)$

- apocentro $\frac{1}{2} v_a^2 - \frac{\mu}{r_a} = -\frac{\mu}{2a} \rightarrow v_a = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1-e)$

Per conoscere una determinata orbita, un satellite deve conoscere una precisa velocità all'apocentro e pericentro. In A e P la velocità ha componente solo tangenziale, mentre in un generico punto $\underline{v} = \dot{r} \underline{i}_r + r \dot{\theta} \underline{i}_\theta$

- velocità tangenziale v_θ : $h = r v_\theta = r_p v_p \Rightarrow v_\theta = \frac{r_p v_p}{r} = \frac{p}{r e \cos \theta} \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1+e) = \frac{\mu}{r e \cos \theta} (1+e)$
 non si annulla mai $\leftarrow v_\theta = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1+e \cos \theta)$

- velocità radiale v_r : $v_r = \dot{r}$ con $\dot{\theta} = \frac{h}{r^2}$, $r = \frac{h^2/\mu}{1+e \cos \theta} \Rightarrow \dot{r} = \frac{h^2}{\mu} (1+e \cos \theta)^{-2} e \dot{\theta} \sin \theta$
 $v_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \theta$

3.4 VELOCITÀ COSMICHE

I velocità cosmica: (lungo una circonferenza) $e = 0$, $v_r = 0$, $v_\theta = \sqrt{\frac{\mu}{p}}$ ($p = a = r$)

$$v_{circ} = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \quad v_{iss} = \sqrt{\frac{\mu}{a}} = 7.6 \text{ km/s}$$

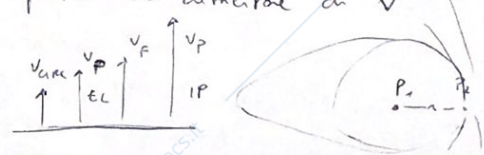
II velocità cosmica (pericentro parabola) $e = 1$, $v_r = 0$, $v_\theta = 2\sqrt{\frac{\mu}{p}}$, $r_p = \frac{p}{2}$

$$v_{fuga} = \sqrt{2} v_{circ} \quad v_{fuga, iss} = 10.84 \text{ km/s} \rightarrow \text{velocità alla quale si sfugge al campo di } P_2$$

III velocità cosmica (iperbole): $v_{HVP, \infty} = \sqrt{-\frac{\mu}{a}}$
 In P, ad r da P_2 , l'orbita sempre più aperta all'aumentare di v

eccentricità $e = \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{\mu^2}}$

Dalla espressione dell'energia



4. Leggi di Keplero

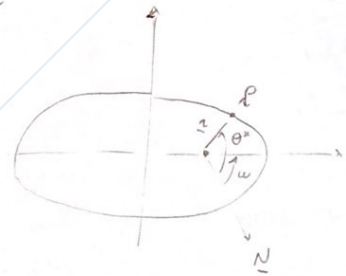
Keplero formula le sue leggi basandosi sulle osservazioni dell'astronomo danese Tycho Brahe ben prima che Newton formulasse ed enunciare la sua legge di gravitazione universale. Rinviamoli alla luce di quello studiata

① 'L'orbita descritta da un pianeta è un'ellisse, di cui il sole occupa uno dei due fuochi.'

Abbiamo trovato che la soluzione al problema dei due corpi è una conica, di cui l'ellisse è un caso particolare

$$r(\theta) = r(\theta^* - \omega) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta^* - \omega)}$$

\underline{N} = asse polare di riferimento θ^* = anomalia



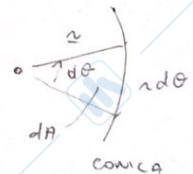
② 'Il raggio vettore che congiunge il centro del sole con il centro del pianeta spazza aree uguali in tempi uguali.'

Area tracciata $dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{r^2 d\theta}{2}$

Dagli integrali di moto

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta, \quad \underline{h} = \underline{r} \wedge \underline{v} = \text{cost} \Rightarrow h = r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{cost}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} |\underline{h}| = \text{cost}$$



Si dimostra che la velocità angolare è costante. All'aumentare di r , v_θ diminuisce e viceversa.

③ 'I quadrati dei periodi di rivoluzione dei pianeti sono proporzionali ai cubi dei semiasse maggiori delle loro orbite.'

Applichiamo la formula della velocità angolare ad una orbita ellittica ($A_{TOT} = \pi ab$)

$$\frac{A_{TOT}}{T} = \frac{\sqrt{\mu p}}{2} \leftarrow h \Rightarrow T = \frac{2A_{TOT}}{\sqrt{\mu p}} = \frac{2\pi a(a\sqrt{1-e^2})}{\sqrt{\mu a(1-e^2)}} = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \text{ da cui}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \text{ ed è evidente che } \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu}$$

e considerando $\mu \approx 4m_1$ costante, avremo dimostrato $\frac{T^2}{a^3} = \text{costante}$

5. legge Orama

Nel risolvere il problema dei due corpi abbiamo ottenuto $r(\theta) = \frac{h^2/\mu}{1+e\cos\theta}$. Tuttavia questa non ci permette di individuare la posizione del satellite in funzione del tempo. Serve calcolare la relazione $\theta(t)$ con $r(\theta) \rightarrow r(\theta(t)) \rightarrow r(t)$, risolvibile in forma chiusa solo per $e=0$ ed $e=1$.

Dal momento angolare $\dot{\theta} = \frac{h}{r^2} = \frac{h(1+e\cos\theta)^2}{(h^2/\mu)^2} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{\mu^2}{h^3} (1+e\cos\theta)^2$

$$dt = \frac{h^3}{\mu^2} \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2} \quad \text{ed integrando (a } t \rightarrow t_0 \text{ e } \theta \rightarrow \theta_0)$$

otteniamo $t-t_0 = \frac{h^3}{\mu^2} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$

- CIRCONFERENZA ($e=0$) $\Delta t = \frac{h^3}{\mu^2} \Delta\theta$

Gli angoli aumentano in maniera uniforme ($r^2\dot{\theta} = \text{cost}$, $r = \text{cost} \Rightarrow \dot{\theta} = \text{cost}$, $\theta = At+B$)

Definiamo $\eta = \frac{\mu^2}{h^3}$ VELOCITÀ ANGOLARE con $\Delta\theta = \eta \Delta t$

Per l'intera circonferenza $2\pi = \eta t = \frac{\mu^2}{h^3} T = \frac{\mu^{1/2}}{a^{3/2}} T$ con $T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$ e $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$

- PARABOLA ($e=1$) $\Delta t = \frac{1}{\eta} \left[\frac{1}{2} \tan \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \tan^3 \frac{\theta}{2} \right]_{\theta_0}^{\theta}$

Negli altri due casi bisogna applicare una trasformazione geometrica. Conviene assumere come punto zero (t_0, θ_0) il pericentro, di modo che $\theta_0 = 0$ e $\Delta t = t - t_0$ indica il "tempo del pericentro".

- ELLISSE ($0 < e < 1$)

Partendo dall'espressione $r = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$ possiamo definire anomalia media (M)

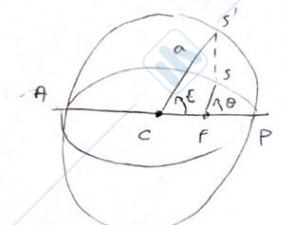
M cresce uniformemente con t ed \bar{r} a solo scopo geometrico

$$M - M_0 = n(t - t_0)$$

$$\begin{cases} M_0 = 0 \\ t_0 = t_p - \text{pericentro} \end{cases}$$

Introduciamo, inoltre, la anomalia eccentrica (E)

come l'angolo formato tra \vec{CP} e \vec{CS}' con S' e circonferenza ausiliaria di raggio a .



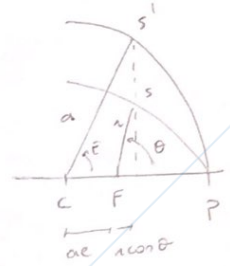
Bisogna individuare il legame $t \rightarrow \theta \Rightarrow t \rightarrow M \rightarrow E \rightarrow \theta$

$$r \cos \theta + ae = a \cos E \quad \text{con} \quad r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \theta}$$

$$a \cos E = ae + \frac{a(1-e^2) \cos \theta}{1+e \cos \theta}$$

$$\cos E = \frac{e + \cos \theta}{1+e \cos \theta} \Rightarrow \cos \theta = \frac{e + \cos E}{e \cos E - 1}$$

$$\sin E = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin \theta}{1+e \cos \theta} \quad \text{Sia } E(\theta) \text{ de } \theta(E) \text{ sono implicite}$$



Utilizzando le formule di bizzozzi per la tangente

$$\tan^2\left(\frac{E}{2}\right) = \frac{1 - \cos E}{1 + \cos E} = \frac{(1-e)(1 - \cos \theta)}{(1+e)(1 + \cos \theta)} \quad \text{è evidente che} \quad \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$$

$$\text{Quindi} \quad \tan\left(\frac{E}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{LEGAME } E \rightarrow \theta$$

Per trovare l'ultimo legame, sfruttiamo la costanza della velocità

$$\text{areolari per i settori } PFS \text{ e } PFS' \quad \frac{T}{\pi ab} = \frac{t}{A_{PFS}}$$

$$y_e = \frac{b}{a} (a^2 - x_c^2)^{1/2} \quad y_c = (a^2 - x_c^2)^{1/2} \Rightarrow y_e = \frac{b}{a} y_c$$

$$\text{Calcolando le aree è evidente che} \quad A_{PFS} = \frac{b}{a} A_{PFS'} = \frac{b}{a} \left(\pi a^2 \frac{E}{2\pi} - \frac{ae a \sin E}{2} \right)$$

(Area settori areolari)

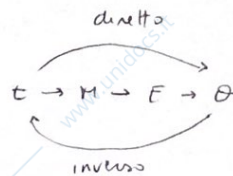
$$= \frac{ab}{2} (E - e \sin E)$$

$$\text{Quindi} \quad \frac{T}{\pi ab} = \frac{t - t_p}{\frac{ba}{2} (E - e \sin E)} \quad \text{con} \quad \frac{T}{2\pi} = \frac{1}{n}$$

$$n(t - t_p) = E - e \sin E \quad \text{nonché} \quad M = E - e \sin E \quad \text{LEGAME } M \rightarrow E$$

Riassumendo

$$\begin{cases} t \rightarrow M & M = n(t - t_p) \\ M \rightarrow E & M = E - e \sin E \\ E \rightarrow \theta & \tan \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta}{2} \end{cases}$$



- IPERBOLE ($e > 1$)

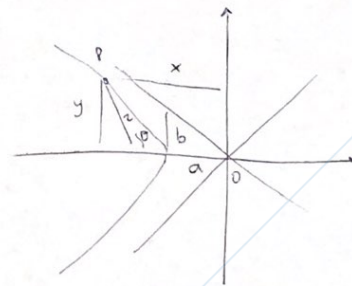
Si introduce l'anomalia eccentrica iperbolica (H)

$$\begin{cases} \sinh H = \frac{y}{b} & \sinh H = \frac{\sin \theta \sqrt{e^2 - 1}}{1 + e \cos \theta} \\ \cosh H = \frac{x}{a} & \tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{e-1}} \tanh \frac{H}{2} \end{cases}$$

$$M = e \sinh H - H$$

$$M = n_h (t - t_0) \quad n_h = \sqrt{\frac{\mu}{-a^3}}$$

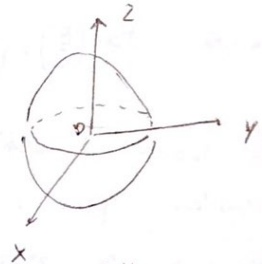
$$t = \sqrt{\frac{-a^3}{\mu}} (e \sinh H - H)$$



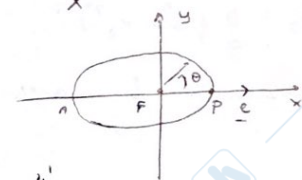
6. Parametri Orbitali

Abbiamo studiato il moto di un satellite nel piano, descrivendo la forma (e), dimensione (a), posizione sull'orbita (θ) e caratterizzati quest'ultimo con $\{a, e, \theta\}$. Generalmente abbiamo preso il vettore \underline{z} coincidente con l'asse z . Nella realtà esso può trovarsi scostato di un angolo. Nel caso generale 3D abbiamo bisogno di 6 parametri indipendenti (parametri orbitali) per poter esprimere posizione $\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ e velocità $\underline{v} = v_x\underline{i} + v_y\underline{j} + v_z\underline{k}$. Introduciamo due sistemi di riferimento:

- **Celeste**: fmo rispetto a spazio iniziale. Origine nella Terra (ECI, Earth centered Inertial), asse z -polo nord celeste, asse x -direzione fmo (γ , equinozio di primavera), xy -piano equatoriale.



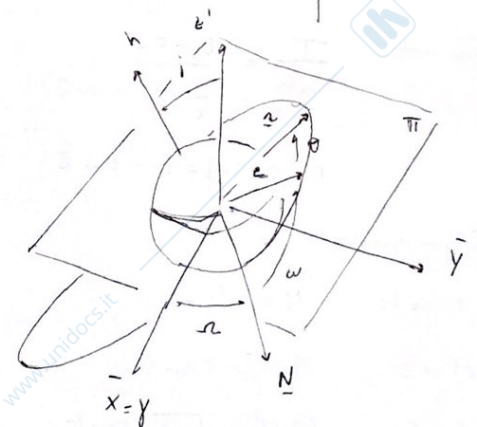
- **Perifocale**: fmo rispetto a piano orbitale, con Terra in un fuoco dell'orbita. Asse z - \underline{h} e asse x - \underline{e} (horizontale e catenariao).



Tralasciando l'incertezza del disegno (pag 5. dp. 6) introduciamo 3 angoli per passare da un sistema all'altro.

$i \in [0, \pi]$: inclinazione piano orbitale rispetto a quello equatoriale

$\Omega \in [0, 2\pi]$: ASCENSIONE RETTA del nodo ascendente (\underline{N} - punta verso dove il satellite muove da Nord a Sud ed \underline{e} comune ai due piani come insieme di punti di intersezione)



$\omega \in [0, 2\pi]$: ANOMALIA DEL PERIGEONTO

I 6 parametri così ottenuti sono $\{a, e, i, \Omega, \omega, \theta\}$

$$\underline{N} = [\cos i \sin \Omega] \begin{bmatrix} \underline{i} \\ \underline{j} \end{bmatrix}$$

con $(a, e) \rightarrow$ FORMA ED ESTENSIONE DELL'ORBITA, $\{i, \Omega\} \rightarrow$

orientamento del piano orbitale, $\{\omega\} \rightarrow$ orientamento del perigeonno nel piano orbitale

$\{\theta\} \rightarrow$ posizione del satellite. Quest'ultimo è l'unico che varia.

Una serie di rotazioni precise (attorno a z, x, z'') ci permette di passare da celeste a perifocale, o più semplicemente può essere visto come un modo per mettere il perifocale nello spazio.

Esiste un legame tra $\{a, e, i, \Omega, \omega, \theta\}$ e $\{R, \underline{v}\}$ espressi nel sistema di riferimento celeste.

6.1 TRASFORMAZIONE $\{R, \underline{v}\} \rightarrow \{a, e, i, \underline{r}, w, \theta\}$

① Calcoliamo a : $R = \|\underline{R}\|$, $V = \|\underline{v}\|$, $E = \frac{1}{2} v^2 - \frac{\mu}{R}$, $E = -\frac{\mu}{2a} \rightarrow a$

② Calcoliamo e : $h = \underline{R} \wedge \underline{v}$, $\underline{e} = \frac{\underline{v} \wedge h}{\mu} - \frac{\underline{R}}{R}$, $e = \|\underline{e}\| \rightarrow e$

③ Calcoliamo i : $h \cdot \underline{k} = h \cos i$, $\cos i = \frac{h_z}{h}$, $i = a \cos\left(\frac{h_z}{h}\right) \rightarrow i$

④ Calcoliamo \underline{r} : $\underline{N} = \frac{\underline{K} \wedge \underline{h}}{\|\underline{K} \wedge \underline{h}\|}$, $\underline{N} \cdot \underline{E} = \cos \underline{r}$, $\underline{r} = a \cos(N_x)$

Attenzione! $\underline{r} \in [0, 2\pi]$ mentre $a \cos \in [0, \pi]$ per cui

• se $N_y > 0 \rightarrow \underline{r} \in [0, \pi]$, $\underline{r} = a \cos(N_x)$

• se $N_y < 0 \rightarrow \underline{r} \in [\pi, 2\pi]$, $\underline{r} = 2\pi - a \cos(N_x)$

⑤ Calcoliamo w : $\underline{e} \cdot \underline{N} = e \cos w$, $w = a \cos\left(\frac{\underline{e} \cdot \underline{N}}{e}\right)$ ma $w \in [0, 2\pi]$

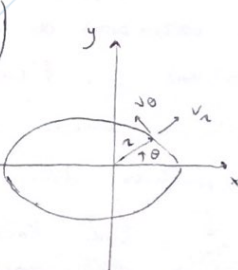
• se $e_z > 0 \rightarrow w \in [0, 2\pi]$, $w = a \cos\left(\frac{\underline{e} \cdot \underline{N}}{e}\right)$

• se $e_z < 0 \rightarrow w \in [\pi, 2\pi]$, $w = 2\pi - a \cos\left(\frac{\underline{e} \cdot \underline{N}}{e}\right)$

⑥ Calcoliamo θ : $\underline{R} \cdot \underline{e} = R e \cos \theta$, $\cos \theta = \left(\frac{\underline{R} \cdot \underline{e}}{R e}\right)$ ma

• se $v_x > 0 \rightarrow \theta \in [0, \pi]$, $\theta = a \cos\left(\frac{\underline{R} \cdot \underline{e}}{R e}\right)$

• se $v_x < 0 \rightarrow \theta \in [\pi, 2\pi]$, $\theta = 2\pi - a \cos\left(\frac{\underline{R} \cdot \underline{e}}{R e}\right)$



6.2 TRASFORMAZIONE $\{a, e, i, \underline{r}, w, \theta\} \rightarrow \{R, \underline{v}\}$

① Scriviamo $\{x, y, z\}$ nel perifocale

$$\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ v_t \end{matrix} \begin{cases} v_x = v_1 \cos \theta - v_2 \sin \theta = -\sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin \theta \\ v_y = v_1 \sin \theta + v_2 \cos \theta = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (e + \cos \theta) \\ v_z = 0 \end{cases}$$

② Trasformiamo da perifocale a $\{R, \underline{v}\}$ celeste (3 rotazioni)

$$[R]_w = \begin{bmatrix} \cos w & \sin w & 0 \\ -\sin w & \cos w & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [R]_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{bmatrix} \quad [R]_r = \begin{bmatrix} \cos r & \sin r & 0 \\ -\sin r & \cos r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \underline{v} = [R]_{r,i,w}^T \underline{v} \\ \underline{R} = [R]_{r,i,w}^T \underline{R} \end{cases}$$

$$[R]_{r,i,w}^T = \begin{bmatrix} \cos w \cos r \cos i - \sin w \cos i \sin r & -\sin w \cos r \cos i - \cos w \cos i \sin r & \sin i \sin r \\ \cos w \sin r \cos i + \sin w \cos i \cos r & -\sin w \sin r \cos i + \cos w \cos i \cos r & -\sin i \cos r \\ \sin w \sin i & \cos w \sin i & \cos i \end{bmatrix} \quad \text{⑩}$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

7. Trasferimenti orbitali coplanari

Obiettivo: controllare il moto del satellite. Per trasferire un corpo da un'orbita all'altra, o controllare i disturbi, dobbiamo cambiare i parametri orbitali. L'equazione del moto LIBERO (naturale) è $\frac{d^2 \underline{r}}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3} \underline{r} = 0$, mentre per eseguire un trasferimento orbitale serve un MOTO CONTROLLATO $\frac{d^2 \underline{r}}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3} \underline{r} = \underline{a}_c$ essendo \underline{a}_c accelerazione di controllo (parametro) definibile

come $\underline{a}_c = \frac{d\underline{v}}{dt} \Rightarrow \Delta \underline{v} = \int_{t_0}^{t_f} \underline{a}_c(t) dt = \int_{t_0}^{t_f} \frac{\underline{F}(t)}{m(t)} dt$

Poiché la durata di manovra $(t_f - t_0)$ è piccola rispetto alla scala temporale tipica della dinamica orbitale (es. periodo T o tempo di permanenza - trasferimento), l'azione di controllo non viene valutata in base al $\underline{a}_c(t)$ ma bensì alla variazione indotta $\Delta \underline{v}$. Il costo della manovra sarà dato dall'indicazione del PROPULSIONE necessaria per effettuarla: $\frac{m_p}{m_0} = 1 - e^{-\frac{\Delta v}{I_{sp} g_0}}$

Approssimiamo le manovre come impulsi (variazioni istantanee di velocità) $\Delta \underline{v} = \frac{\underline{F}}{m} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_0+\epsilon} \underline{a}_c dt$. Si hanno variazioni istantanee anche dei parametri orbitali e si ottengono a parità di vettore posizione. Il costo della manovra $\|\Delta \underline{v}\|$ è sempre positivo.

Manovre impulsive

La variazione di velocità $\Delta \underline{v}$ si ottiene a PARITÀ di vettore posizione \underline{r} : l'energia potenziale del satellite non subisce variazioni. Dalla espressione dell'energia in ogni punto della traiettoria si può valutare il modulo della velocità: $E = \frac{1}{2} v^2 - \frac{\mu}{r} \Rightarrow v = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right)}$ da cui $v_{IN} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a_{IN}} \right)}$

Dal triangolo delle velocità, conoscendo l'angolo α è possibile calcolare il COSTO DELLA MANOVRA $|\Delta \underline{v}| = \sqrt{v_{IN}^2 + v_{FIN}^2 + v_{IN} v_{FIN} 2 \cos \alpha}$

Per effettuare un cambio di orbita ad un impulso la manovra può avvenire solo all'intersezione delle due orbite; occorre capire quante intersezioni esistono tra due orbite.

Due ellissi coplanari hanno al massimo due intersezioni

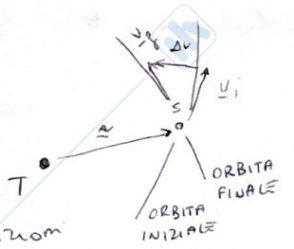
- 0.1 $(P_1, e_1), r_1 = P_1 / (1 + e_1 \cos \theta_1)$
- 0.2 $(P_2, e_2), r_2 = P_2 / (1 + e_2 \cos \theta_2)$

Nei punti di intersezione P_1 e P_2 abbiamo $r_1 = r_2$

quindi $P_1(1 + e_2 \cos \theta_2) = P_2(1 + e_1 \cos \theta_1)$. Notiamo che ma in P_1 e P_2 : $\theta_2 - \theta_1 = \Delta \omega$

- se esiste intersezione \rightarrow manovra ad 1 impulso \rightarrow secanti, tangenti, cambio di piano orbitale
- se non esiste intersezione \rightarrow manovra a più impulsi \rightarrow 2 imp. \rightarrow secanti, tangenti, trasferimento alla Hohmann

3 imp \rightarrow biellittiche
cambio di piano orbitale



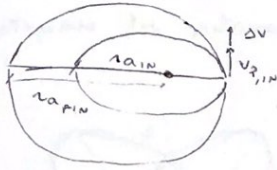
www.unidocs.it

7.1 MANOVRE AD UN IMPULSO

Manovra tangente in punti apodali

Si avvia un cambio di forma e dimensioni (e, a) . Distinguiamo i due punti:

- Pericentro: supponiamo di essere al pericentro di un'orbita ellittica e di aumentare istantaneamente la velocità. $V_{P, FIN} = V_{P, IN} + \Delta V$



orbita iniziale: $a_{IN} = \frac{r_P + r_{A, IN}}{2}$ $e_{IN} = \frac{r_{A, IN} - r_P}{r_{A, IN} + r_P}$

Conseguenze:

- il satellite si troverà su una nuova orbita
- il satellite si troverà su un punto apodale $(\underline{r} \perp \underline{L})$
- l'energia della nuova orbita $E_{FIN} > E_{IN}$
- il semiasse maggiore della nuova orbita $a_{FIN} > a_{IN}$
- il satellite sarà al pericentro dell'orbita nuova perché $r_{P, FIN} = r_{P, IN} \rightarrow r_{A, FIN} > r_{A, IN}$

orbita finale: $a_{FIN} = \frac{r_{A, FIN} + r_P}{2}$ $e_{FIN} = \frac{r_{A, FIN} - r_P}{r_{A, FIN} + r_P}$

Il costo della manovra sarà di $\Delta V = V_{P, FIN} - V_{P, IN}$
 $= \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{2a_{FIN}} \right)} - \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{2a_{IN}} \right)}$

Se invece **diminuisco** istantaneamente la velocità valgono tutte le considerazioni fatte prima ma questa volta $E_{FIN} < E_{IN}$ e $a_{FIN} < a_{IN}$

- Apocentro: Osservando direttamente la geometria notiamo che



- se $V_{A, FIN} > V_{A, IN}$: $r_{P, FIN} > r_{P, IN} \Rightarrow \{a \uparrow, e \downarrow\}$
- se $V_{A, FIN} < V_{A, IN}$: $r_{P, FIN} < r_{P, IN} \Rightarrow \{a \downarrow, e \uparrow\}$

In ogni caso $\Delta V = \left| \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{2a_{FIN}} \right)} - \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{2a_{IN}} \right)} \right|$

Manovra tangente in punto arbitrario

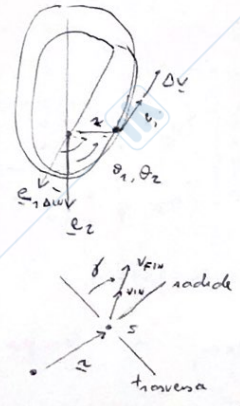
Cambio di forma, dimensione e orientamento (e, a, ω) .

$V_{IN} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a_{IN}} \right)}$, $V_{FIN} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a_{FIN}} \right)}$ $\Delta V = V_{FIN} - V_{IN}$

NOTA: La manovra conserva γ (ANGOLO IN VOLO)

$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \theta$
 $V_\theta = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \theta)$
 $\text{tg } \gamma = \frac{V_r}{V_\theta} = \frac{e \sin \theta}{1 + e \cos \theta}$

Nota il ΔV posso calcolare $V_{FIN} = V_{IN} + \Delta V \rightarrow \frac{1}{2} V_{FIN}^2 - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a_2}$ $\xrightarrow{\text{CALCOLO}} a_2$



Il problema si risolve imponendo

$$\begin{cases} r_1 = r_2 \\ \delta_1 = \delta_2 \\ p_2 = a_2(1 - e_2^2) \end{cases} \begin{cases} r_1 / (1 + e_1 \cos \theta_1) = r_2 / (1 + e_2 \cos \theta_2) \\ e_1 m \theta_1 / (1 + e_1 \cos \theta_1) = e_2 m \theta_2 / (1 + e_2 \cos \theta_2) \\ p_2 = a_2(1 - e_2^2) \end{cases}$$

È un sistema di 3 equazioni in 3 incognite (p_2, e_2, θ_2).

Notiamo che la manovra ha anche prodotto un cambio di anomalia del pericentro producendo $\Delta \omega = \theta_1 - \theta_2$

Rotazione dell'asse maggiore

Cambiar solo (ω) e mantenere inalterate la forma (a, e).

È possibile eseguire la manovra in due punti A e B.

Ragioniamo su B senza perdere di generalità.

In manovra costante nel rotore il vettore eccentricità.

In B: $r_1 = r_2 \Rightarrow p_1 / (1 + e_1 \cos \theta_1) = p_2 / (1 + e_2 \cos \theta_2)$ ma

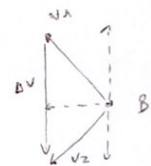
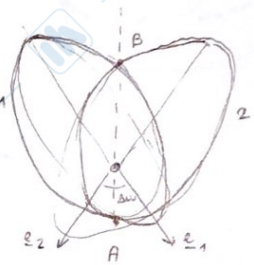
$$a_1 = a_2, e_1 = e_2, p_1 = p_2 \text{ quindi } \cos \theta_1 = \cos \theta_2 \Rightarrow \theta_1 = \theta_2 \text{ (banale)} \\ \theta_1 = -\theta_2$$

Con $v_\theta = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \theta) \Rightarrow v_{\theta_1} = v_{\theta_2}$ (si conserva

la velocità trasversa) e la manovra è solo radiale.

$$\begin{cases} v_{r1} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e m \theta_1 \\ v_{r2} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e m \theta_2 \end{cases} \Rightarrow \Delta v = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e (m \theta_2 - m \theta_1) \text{ con } \theta_1 = -\theta_2 \Rightarrow \theta_2 = \frac{\Delta \omega}{2}, \theta_1 = -\frac{\Delta \omega}{2}$$

$$\Delta v = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e 2 m \theta \left(\frac{\Delta \omega}{2} \right)$$



7.2 MANOVRE A DUE IMPULSI

Trasferimento alla Hohmann

Supponiamo di avere due orbite circolari coplanari senza punti di intersezione.

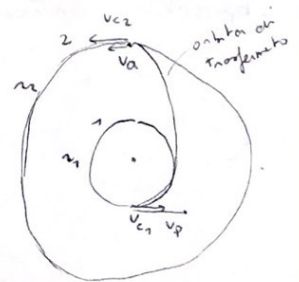
$$\text{Orbita 1: } v_{c1} = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}}, \text{ orbita 2: } v_{c2} = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}}$$

Dobbiamo trovare un'orbita di trasferimento che abbia $\begin{cases} r_p = r_1 \\ r_a = r_2 \end{cases}$

Dobbiamo trovare v_p e v_a . $r_a = r_2$

Avremo quindi bisogno di fare due manovre: $1 \rightarrow t, t \rightarrow 2$

Questo tipo di trasferimento si chiama in questo modo perché Hohmann fu il primo ad individuare che l'orbita di trasferimento a costo minimo deve essere ellittica bitangente.



$$\begin{matrix} T \\ R \\ A \\ S \\ F \end{matrix} \begin{cases} v_{pT} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{2a} \right)} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1 + r_2} \right)} = \sqrt{\frac{2\mu r_2}{r_1(r_1 + r_2)}} \\ v_{aT} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{2a} \right)} = \sqrt{\frac{2\mu r_1}{r_2(r_1 + r_2)}} \end{cases} \begin{matrix} \Delta v_1 = v_{pT} - v_{c1} \\ \Delta v_2 = v_{c2} - v_{aT} \end{matrix}$$

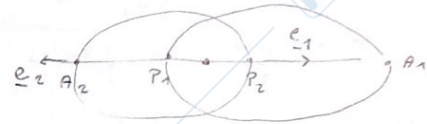
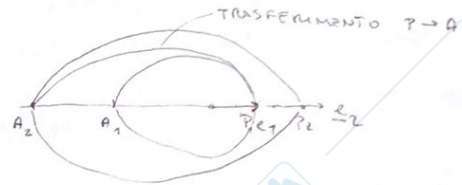
$$\text{Costo totale } \Delta v = \Delta v_1 + \Delta v_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} \left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1 \right) + \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} \left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}} \right)$$

$$\text{tempo di trasferimento } \Delta t = \frac{T_t}{2} = \frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

Trasferimento ellittico bi-tangente

È analogo al Trasferimento alla Hohmann ma tra orbite ellittiche. Perché il trasferimento ellittico è possibile deve essere complanari con linee orbitali allineate (e_1 e e_2 allineati)

- CASO 1: stessa direzione
 - trasferimento $P \rightarrow A$
 - trasferimento $A \rightarrow P$
- CASO 2: verso opposto
 - trasferimento $P \rightarrow P$
 - trasferimento $A \rightarrow A$



Vediamo solo il trasferimento $P \rightarrow A$ (senza perdere di generalità).

$$v_{P_1} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{a_{P_1}} - \frac{1}{2a_1} \right)}, \quad v_{P_2} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{a_{P_2}} - \frac{1}{2a_2} \right)} \quad \text{con} \quad a_T = \frac{a_{P_1} + a_{A_2}}{2}$$

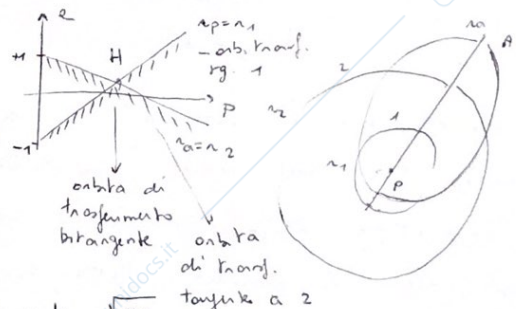
$$v_{A_1} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{2a_1} - \frac{1}{a_{A_1}} \right)}, \quad v_{A_2} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{2a_2} - \frac{1}{a_{A_2}} \right)} \quad e_T = \frac{a_{A_2} - a_{P_1}}{a_{A_2} + a_{P_1}}$$

$$\Delta v_1 = v_{P_2} - v_{P_1}, \quad \Delta v_2 = v_{A_2} - v_{A_1}, \quad \Delta v = \Delta v_1 + \Delta v_2$$

Ottimalità del trasferimento alla Hohmann

Prendiamo un caso di trasferimento secante tra due orbite circolari e dimostriamo che l'ottimo si ottiene in caso di bi-tangenza.

$$\begin{cases} r_{P_1} \leq r_1 \\ r_{A_2} \leq r_2 \end{cases} \begin{cases} P/(1+e) \leq r_1 \\ P/(1-e) \leq r_2 \end{cases} \begin{cases} 1+e \geq P/r_1 \\ 1-e \leq P/r_2 \end{cases} \begin{cases} e \geq P/r_1 - 1 \\ e \leq 1 - P/r_2 \end{cases}$$



Nel punto di intersezione abbiamo

$$v_{c_1} = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}}, \quad v_1 = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_1} + \frac{e^2 - 1}{2p} \right)}$$

$$\Delta v_1^2 = v_{c_1}^2 + v_1^2 - 2v_{c_1}v_1 \cos \gamma_1 = v_{c_1}^2 + v_1^2 - 2v_{c_1}v_1 \quad v_{\theta_1} = \frac{h}{r_1} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r_1}$$

$$\text{Valuto ora } \frac{d\Delta v_1^2}{de} = \frac{dv_{c_1}^2}{de} + \frac{dv_1^2}{de} + \frac{d(-2v_{c_1}v_1)}{de} = \frac{2\mu e}{p} \quad \frac{dv_2^2}{de} = \dots = \frac{2\mu e}{p}$$

$$\Delta v_2^2 = v_{c_2}^2 + v_2^2 - 2v_{c_2}v_2 \quad \text{con} \quad v_{c_2} = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}}, \quad v_2 = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_2} + \frac{e^2 - 1}{2p} \right)}$$

$$\text{Osservo che } \frac{d(v_1^2)}{de} = 2v_1 \frac{dv_1}{de} \quad \text{quindi} \quad \frac{dv_1}{de} = \frac{1}{2v_1} \frac{d(v_1^2)}{de} \quad \text{Quindi } \frac{d\Delta v_{TOT}}{de} = \frac{d\Delta v_1}{de} + \frac{d\Delta v_2}{de}$$

$$= \frac{2\mu e}{p} \left(\frac{1}{2v_1} + \frac{1}{2v_2} \right) \geq 0$$

Quindi a pari valore di p , per minimizzare Δv_{TOT} , devo minimizzare e , ovvero stare sulla frontiera della regione ammissibile.

Se valuto $d\Delta v_{TOT}/de$ lungo la frontiera si ottiene $d\Delta v_{TOT}/de > 0$ ossia l'ottimo

sta nel punto H corrispondente al trasferimento alla Hohmann

7.3 MANOVRE A TRE IMPULSI

Trasferimento biellittico

Velocità due orbite ausiliarie (1, 2)
 Consideriamo il caso di orbite iniziali e finali entrambe circolari.

ra scelto arbitrariamente

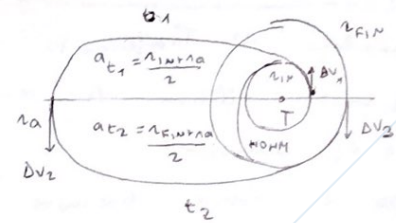
$$\begin{cases} IN: r_{IN}, v_{IN} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{IN}}} \\ FIN: r_{FIN}, v_{FIN} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{FIN}}} \end{cases}$$

Per orbita t1: $r_{P_{t1}} = r_{IN}, r_{A_{t1}} = r_a$

$$a_1 = \frac{r_{IN} + r_a}{2} \quad v_{P_1} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_{IN}} - \frac{1}{2a_1} \right)} \quad v_{A_1} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{2a_1} \right)}$$

Per orbita t2: $r_{P_{t2}} = r_{FIN}, r_{A_{t2}} = r_a$

$$a_2 = \frac{r_{FIN} + r_a}{2} \quad v_{P_2} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_{FIN}} - \frac{1}{2a_2} \right)} \quad v_{A_2} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{2a_2} \right)}$$



$$\begin{cases} \Delta v_1 = v_{IN} \rightarrow 1 \\ \Delta v_2 = 1 \rightarrow 2 \\ \Delta v_3 = 2 \rightarrow FIN \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Delta v_1 &= v_{P_1} - v_{IN} \\ \Delta v_2 &= v_{A_2} - v_{A_1} \\ \Delta v_3 &= v_{FIN} - v_{P_2} \end{aligned}$$

Costo $\Delta v_{tot} = |\Delta v_1| + |\Delta v_2| + |\Delta v_3|$

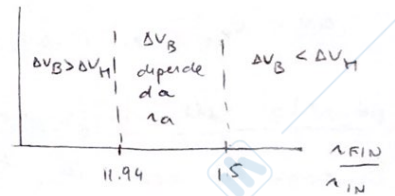
Possiamo studiare quando il Δv_{BIELLI} conviene rispetto a Δv_{HOMANN}

Per $r_{FIN}/r_{IN} < 11.94$ (valore limite) conviene sempre Homann.

$11.94 < " < 15$ il biellittico dipende da r_a

Per $" > 15$ (valore limite) conviene sempre Biellittico

NOTA I tempi di trasferimento aumentano (r_a)



$$\Delta t_B > \Delta t_H$$

Dove conviene fare le manovre? Se ci sono più possibilità per effettuare un trasferimento tra due orbite, non tutte hanno lo stesso costo. Solitamente si vuole minimizzare Δv_{TOT} , quindi conviene fare le manovre nei punti in cui, a pari Δv , si ottiene il massimo effetto, ovvero la massima variazione di parametri orbitali.

7.4 MANOVRA DI RIFASAMENTO ORBITALE

Obiettivo: avere diversi satelliti sulla stessa orbita in differenti posizioni.

L'idea è quella di andare su un'orbita ausiliaria di periodo

definito dall'angolo di rifasamento e poi ritornare sull'orbita di partenza con

una seconda manovra. Sia il TARGET (ISS) e il CHASER (Dragon)

sulla stessa orbita ma a diverso $\Delta \theta$. Voglio che i due coincidano.

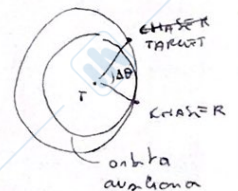
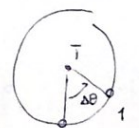
Orbita ausiliaria: $T_{aux} = T \left(1 - \frac{\Delta \theta}{2\pi} \right)$ con $T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$. Posso calcolare

a e calcolo e. $v_{aux} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right)}$ $v_c = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$

$$\Delta v = \Delta v_1 + \Delta v_2 = 2\Delta v_1 \quad \Delta v_1 = v_c - v_{aux} \quad \Delta v_2 = |v_{aux} - v_c|$$

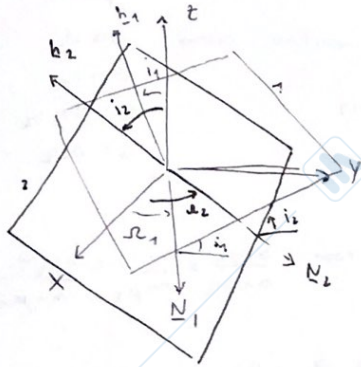
Se invece il CHASER fosse in anticipo rispetto al TARGET

dovrei usare una orbita ausiliaria di $T_{aux} = T \left(1 + \frac{\Delta \theta}{2\pi} \right)$



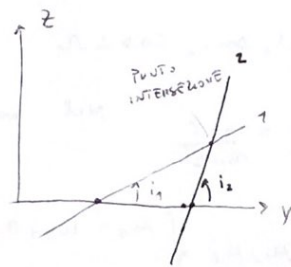
8. Cambi di piano orbitale

I trasferimenti coplanari cambiano $\{a, e, \omega, \theta\}$. I cambi di piano sono manovre che variano (i, Ω) . Vediamo la geometria nel caso andiamo da $\{i_1, \Omega_1\}$ a $\{i_2, \Omega_2\}$



1 - piano iniziale (orbitale)
2 - piano finale

NOTA Le manovre (impulsive) di cambio di piano possono avvenire solo nei punti di intersezione tra i due piani



Cambio di inclinazione

Per avere solo cambio dell'inclinazione (i) la manovra deve avvenire in corrispondenza dell'asse nodale (ascendente o discendente). Essa equivale, semplicemente, ad effettuare una rotazione del vettore h attorno ad N .

Vediamo quanto costa rotare h : $h_1 = \Omega_N \wedge v_1$, $h_2 = \Omega_N \wedge v_2$

ma in N : $v = v_N + v_\theta$

Per cui $h = \Omega_N \wedge v = \Omega_N \wedge v_\theta$

Solamente la componente trasversale contribuisce (v_θ) alla rotazione di h e quindi al cambio di i .

In generale $v_\theta = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \theta)$ in N : $\theta_1 = 2\pi - \omega_1$, $\theta_2 = 2\pi - \omega_2$

La manovra costa $\|\Delta v\| = \|v_{\theta 2} - v_{\theta 1}\|$ Ma $\omega_1 = \omega_2 \Rightarrow \theta_1 = \theta_2$ Quindi $v_{\theta 1} = v_{\theta 2} = v_\theta$

$$\frac{\Delta v}{2} = v_\theta \sin\left(\frac{\Delta i}{2}\right) \Rightarrow \Delta v = 2v_\theta \sin\left(\frac{\Delta i}{2}\right)$$

Osservazioni: $\Delta v \sim \sin\left(\frac{\Delta i}{2}\right) \rightarrow$ maggiore sarà la differenza di inclinazione, più costosa sarà la manovra. Per $\Delta i \approx 0 \rightarrow \Delta v = v_\theta \Delta i$

$\Delta v \sim v_\theta$ ma v_θ dipende da $v_\theta = \frac{h}{r}$. Il costo della manovra diminuisce quando aumenta r (più è più distanti dal fuoco).

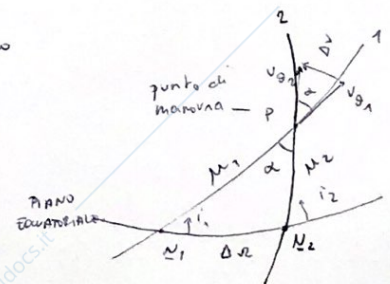
Se non si manovra nell'asse nodale si ottiene un $\Delta \Omega$.

Cambio di RAAN e inclinazione (i, Ω)

Si tratta ancora di rotare h ma questa volta attorno alla linea di intersezione dei due piani.

Ruoteremo ancora v_θ di α in N_1 : $\theta_1 = 2\pi - \omega_1$, N_2 : $\theta_2 = 2\pi - \omega_2$

$$\begin{cases} M_1 = \theta_1 + \omega_1 \\ M_2 = \theta_2 + \omega_2 \end{cases} \Leftrightarrow \text{in } P: \begin{cases} \theta_1 = 2\pi - \omega_1 + \mu_1 \\ \theta_2 = 2\pi - \omega_2 + \mu_2 \end{cases}$$

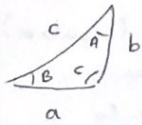


Calcoliamo Δv . Dato motore \perp senza cambiare $\|h\|$, $\|h\| = r v_0$ quindi $v_{\theta_1} = v_{\theta_2}$

Poiché $v_{\theta} = \sqrt{\frac{\mu}{r}} (1 + e \cos \theta)$, allora $\theta_1 = \theta_2$

Costo della manovra $\Delta v = 2 v_0 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Dobbiamo calcolare α . (teoremi geometria sferica)

• coseno



$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$ Nel nostro caso $A = \alpha$

Da cui $\cos(\pi - i_2) = -\cos i_2$ e $\sin(\pi - i_2) = \sin i_2$

quindi $\cos \alpha = \cos i_1 \cos i_2 + \sin i_1 \sin i_2 \cos \Delta r$

$B = i_1$
 $C = \pi - i_2$
 $a = \Delta r$

• seni ($\mu_1 = \mu_2$)

$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$

Nel nostro caso $\frac{\sin \alpha}{\sin \Delta r} = \frac{\sin i_1}{\sin \mu_2} = \frac{\sin(\pi - i_2)}{\sin \mu_1}$

$\begin{cases} \frac{\sin \alpha}{\sin \Delta r} = \frac{\sin i_1}{\sin \mu_2} \\ \frac{\sin \alpha}{\sin \Delta r} = \frac{\sin i_2}{\sin \mu_1} \end{cases} \rightarrow \text{calcolo } \mu_1, \mu_2 \begin{cases} \mu_1 = \omega_1 + \theta_1 \rightarrow \theta_1 = \theta_2 = \dots \\ \mu_2 = \omega_2 + \theta_2 \rightarrow \omega_2 = \mu_2 - \theta_2 \end{cases}$

Nota: • La manovra di cambio piano (i, r) preserva $\{a, e, \theta\}$ ma inevitabilmente altera ω

• Bisogna considerare che la geometria cambia quando $\Delta r < 0$ o $i_2 < i_1$

Cambio di RAAW (Ω)

Si ottiene come caso particolare delle relazioni derivate in precedenza $i_1 = i_2$
 $\Delta r \neq 0$