Esercizi risolti — Metodo di Richardson e precondizionamento

Questo file contiene gli esercizi proposti con passi risolutivi ed esplicitazioni numeriche.

Esercizio 1 — Precondizionamento diagonale (Jacobi)

Dato:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1. Precondizionatore diagonale:

$$P = \operatorname{diag}(A) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Matrice precondizionata:

$$P^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Autovalori di $P^{-1}A$. Risolviamo $\det(P^{-1}A - \lambda I) = 0$:

$$(1-\lambda)^2 - \tfrac{1}{12} = 0$$

   Quindi

$$1 - \lambda = \pm\sqrt{\tfrac{1}{12}} = \pm 0.28867513$$

   Da cui

$$\lambda_{\max} \approx 1.28867513, \qquad \lambda_{\min} \approx 0.71132487.$$

4. Parametro ottimale di Richardson:

$$\tau_{\text{opt}} = \frac{2}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}} = \frac{2}{2} = 1.0.$$

5. Fattore di convergenza minimo:

$$\kappa = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \approx 1.812 \quad \Rightarrow \quad \rho_{\text{opt}} = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \approx 0.28867513.$$

   (Nota: il valore di ρ_{opt} coincide con $\sqrt{1/12}$ nel caso 2×2 qui.)

Esercizio 2 — Confronto con e senza precondizionamento

Dato:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 6 \\ 8 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Obiettivo: calcolare il numero di condizionamento di A e di $P^{-1}A$ con $P = \operatorname{diag}(A)$.

Calcoli (autovalori numerici): - Autovalori di A :\quad [\,22.76342342,\ 2.19657789,\ 0.03999869\,]
- Numero di condizionamento (autovalori):

$$\kappa(A) = \frac{22.76342342}{0.03999869} \approx 569.10.$$

Con $P = \operatorname{diag}(A) = \operatorname{diag}(10, 5, 10)$ si ottiene

$$P^{-1}A \text{ con autovalori } [\,2.76152625,\ 0.23223669,\ 0.00623706\,]$$

e

$$\kappa(P^{-1}A) \approx \frac{2.76152625}{0.00623706} \approx 442.76.$$

Commento: il precondizionamento diagonale riduce la condizione da ~569 a ~443 — un miglioramento modesto. In generale il Jacobi aiuta poco quando la matrice ha blocchi fortemente correlati: servono precondizionatori più sofisticati (ILU, AMG, ecc.).

Esercizio 3 — Cholesky incompleta (ICC) su tridiagonale SPD

Dato:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. A è simmetrica e, dai suoi autovalori, positiva definita. Gli autovalori sono (calcolo analitico/numerico):

   $$\lambda \approx [\,2.58578644,\ 4.0,\ 5.41421356\,],$$

   tutti positivi → A è SPD.

2. Fattorizzazione di Cholesky esatta $A = LL^T$ (se la si calcola completamente) restituisce una L densa su matrici dense, ma su questa tridiagonale la Cholesky ha la stessa sparsità (triangolare inferiore con tre diagonali non nulle).

3. Cholesky incompleta (ICC): si costruisce L_{ic} mantenendo solo gli elementi di sparsità originali (nessun riempimento). Si usa quindi $P = L_{\text{ic}} L_{\text{ic}}^T$ come precondizionatore.

Motivazione: $P^{-1/2} A P^{-1/2}$ tende ad avere autovalori più raggruppati e quindi migliora la convergenza dei metodi iterativi rispetto a nessun precondizionamento; ICC è un buon compromesso fra qualità del precondizionatore e costo di applicazione.

Esercizio 4 — Proprietà del precondizionamento simmetrico

Enunciato: mostrare che, se A è SPD e P è SPD, allora $P^{-1/2} A P^{-1/2}$ è SPD.

Dimostrazione breve: - Simmetria: $(P^{-1/2} A P^{-1/2})^T = P^{-1/2} A^T P^{-1/2} = P^{-1/2} A P^{-1/2}$ perché A è simmetrica. - Definizione positiva: per ogni vettore non nullo z,

$$z^T (P^{-1/2} A P^{-1/2}) z = (P^{-1/2} z)^T A (P^{-1/2} z) > 0$$

perché A è SPD e $P^{-1/2} z \neq 0$ se $z \neq 0$.

Quindi la matrice è SPD.

Esercizio 5 — Metodo di Richardson precondizionato (calcolo iterazioni)

Dato (scelta per il vettore b se non era specificato):

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Usiamo $P = \text{diag}(A) = \text{diag}(3, 2)$.

Calcoli: - Matrice precondizionata $P^{-1} A$ ha autovalori approssimativamente $[1.40824829,\ 0.59175171])$. - Quindi $\tau_{\text{opt}} = 2/(1.40824829 + 0.59175171) = 1.0$.

Iterazioni (formula: $x^{k+1} = x^k + \tau P^{-1}(b - A x^k)$): - $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.33333333 \\ 0.5 \end{pmatrix}$. - $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.16666667 \\ 0.33333333 \end{pmatrix}$.

(Convergenza geometrica con fattore vicino a ρ_{opt} calcolato dallo spettro di $P^{-1} A$.)

Note finali e suggerimenti per l'esame

- Ricorda la formula chiave per il Richardson precondizionato:

$$x^{k+1} = x^k + \tau P^{-1}(b - A x^k)$$

e che il parametro ottimale (per spettro reale in $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$) è

$$\tau_{\text{opt}} = \frac{2}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}}.$$

- Sai dimostrare proprietà di simmetria/SPD per il precondizionamento simmetrico; sai costruire precondizionatori semplici (Jacobi) e più sofisticati (ILU/ICC) e spiegare i compromessi.

Se vuoi, posso generare lo stesso contenuto in formato PDF o in un file .zip con esercizi + codice Python per verificare i calcoli numerici. Vuoi anche il codice utilizzato per i calcoli numerici?