

2 di 6

Criterio di Monotonia 1

• CRITERIO DI MONOTONIA:

se $y = f(x)$ è una funzione continua e derivabile in (a, b) , si ha:

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b) \iff f \text{ debolmente crescente in } (a, b)$$

$$f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b) \iff f \text{ debolmente decrescente in } (a, b)$$

• NOTA: per quanto riguarda la *monotonia stretta* si può dimostrare che:

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow f \text{ strettamente crescente in } (a, b)$$

$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow f \text{ strettamente decrescente in } (a, b)$$

non valgono le implicazioni inverse, basta considerare $f(x) = x^3$, che è strettamente crescente ma $f'(0) = 0$.

• ESEMPI: determinare gli intervalli in cui le seguenti funzioni risultano crescenti e quelli in cui risultano decrescenti.

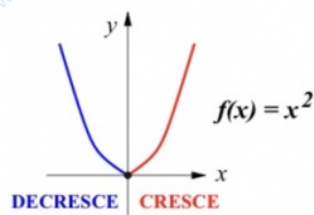
1. $f(x) = x^2$. Studiando il segno della derivata: $f'(x) = 2x \geq 0 \iff x \geq 0$

si conclude che: $f(x)$ è decrescente per $x < 0$ ed è crescente per $x > 0$.

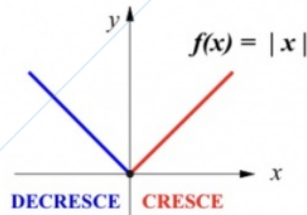
2. $g(x) = (x^2 - 3)e^x$. Si ha: $g'(x) = (x^2 + 2x - 3)e^x \geq 0 \iff x \leq -3$ oppure $x \geq 1$
quindi: $f(x)$ è decrescente per $x \in (-3, 1)$ ed è crescente per $x \notin [-3, 1]$.

Matematica Anna Torre- anno accademico 2009-10

Criterio di Monotonia 2



- $x < 0$ $f'(x) = 2x < 0$
 $\Rightarrow f(x)$ decrescente
- $x > 0$ $f'(x) = 2x > 0$
 $\Rightarrow f(x)$ crescente
- $x = 0$ $f'(0) = 0$
 punto di minimo relativo



- $x < 0$ $f'(x) = -1 < 0$
 $\Rightarrow f(x)$ decrescente
- $x > 0$ $f'(x) = +1 > 0$
 $\Rightarrow f(x)$ crescente
- $x = 0$ $\nexists f'(0)$
 punto di minimo relativo

Matematica Anna Torre- anno accademico 2009-10

Guida per eseguire uno studio di funzione:

$$y = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$$

Lo studio di tale funzione ricalca quello adatto ad ogni altra funzione.

Per rendere più comprensibili i vari passaggi, essi sono stati suddivisi in vari "passi" successivi.

PASSO 1

• **Ricerca del dominio (o del campo di esistenza):**

Devo escludere tutti i valori della x che non mi permettono di calcolare la y corrispondente.

Nel nostro caso sarà: $x - 2 \neq 0$ cioè $x \neq 2$, infatti è impossibile calcolare un rapporto con denominatore nullo.

Il dominio sarà tutto l'asse dei numeri reali escluso $x = 2$, cioè $D = R - \{2\}$.

PASSO 2

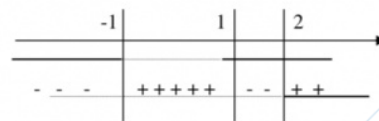
• **Ricerca dei valori della x per cui y è positivo:**

Basta risolvere la disequazione $y > 0$. Nel nostro caso:

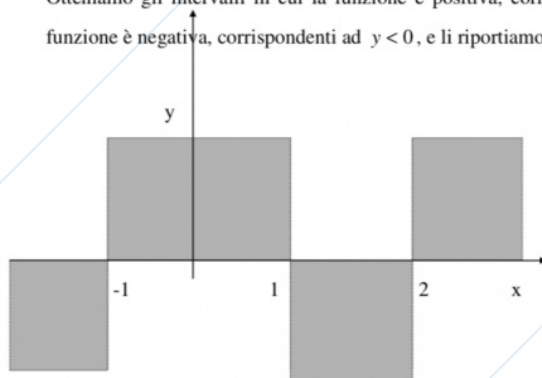
$$\frac{x^2 - 1}{x - 2} > 0$$

$$\text{Numeratore : } x^2 - 1 > 0 \rightarrow x < -1 \vee x > 1$$

$$\text{Denominatore : } x - 2 > 0 \rightarrow x > 2$$



Otteniamo gli intervalli in cui la funzione è positiva, corrispondenti ad $y > 0$, e quelli in cui la funzione è negativa, corrispondenti ad $y < 0$, e li riportiamo sul grafico cartesiano:



In grigio le zone del piano cartesiano in cui è previsto il grafico.

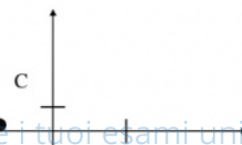
PASSO 3

• **Ricerca intersezioni con gli assi:**

Ponendo $y = 0$ ottengo le intersezioni con l'asse x :

$$\begin{cases} y = \frac{x^2 - 1}{x - 2} \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{quindi } x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

Ponendo $x = 0$ ottengo le intersezioni con l'asse y :

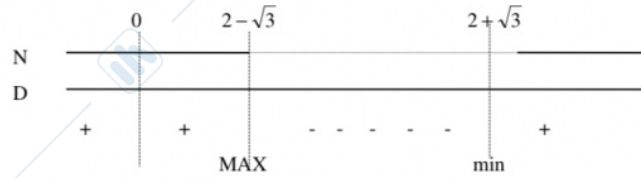


Ovviamente il denominatore, essendo un quadrato, è sempre > 0 .

Il denominatore è $x^2 - 4x + 1 > 0$ da cui ottengo $x < 2 - \sqrt{3} \vee x > 2 + \sqrt{3}$

4 di 4

ico:

**PASSO 6**

- **Studio della derivata seconda:** (Ricerca eventuali flessi)

Si calcola la derivata seconda, la si pone uguale a zero e si trovano gli eventuali punti di flesso.

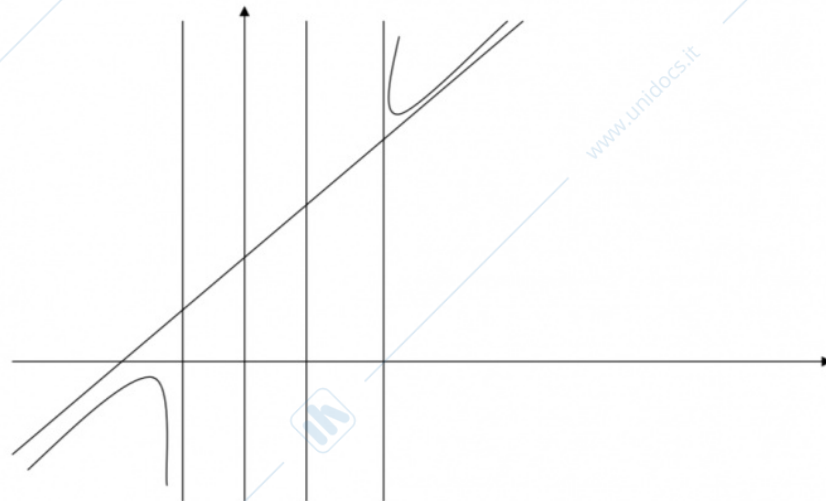
$$y'' = \frac{(2x-4)(x-2)^2 - 2(x-2)(x^2-4x+1)}{(x-2)^4} = \frac{6x-12}{(x-2)^4}$$

Poniamo $y'' = 0$ ed otteniamo: $6x - 12 = 0$ da cui $x = 2$.

Notiamo però che $x = 2$ non fa parte del dominio quindi non esistono flessi.

Studio il segno della derivata seconda ponendola maggiore di zero.

Poiché $y'' > 0$ per $x > 2$, in tale intervallo la concavità è rivolta verso l'alto, per $x < 2$ è invece rivolta verso il basso (essendo $y'' < 0$).



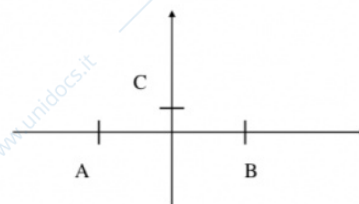
PASSO 3• **Ricerca intersezioni con gli assi:**

Ponendo $y = 0$ ottengo le intersezioni con l'asse x :

$$\begin{cases} y = \frac{x^2 - 1}{x - 2} \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{quindi } x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

Ponendo $x = 0$ ottengo le intersezioni con l'asse y :

$$\begin{cases} y = \frac{x^2 - 1}{x - 2} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ x = 0 \end{cases}$$



Ho quindi ottenuto i tre punti riportati sul grafico: $A(-1,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1/2)$.

PASSO 4• **Ricerca dei limiti agli estremi del campo di esistenza e determinazione degli asintoti:**

Si cercano i valori dei limiti per x che tende a $\pm\infty$ ed i limiti destro e sinistro per x che tende ai valori non compresi nel dominio.

Resta inteso ovviamente che se la funzione è definita solo per $x > c$, dove c è un numero, è inutile la ricerca del limite per x che tende a meno infinito. Stesso discorso per $+\infty$ se la funzione è definita per $x < c$. Vediamo il nostro caso:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(1 - \frac{1}{x^2})}{x(1 - \frac{2}{x})} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(1 - \frac{1}{x^2})}{x(1 - \frac{2}{x})} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

Nel grafico è riportato l'andamento della funzione agli estremi del campo.



La funzione ha un asintoto verticale di equazione $x = 2$ ma non ha un asintoto orizzontale, devo pertanto cercare l'asintoto obliquo, che avrà equazione del tipo $y = m x + q$.

$$\text{Poiché } m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \text{ sarà } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x - 2} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x} = 1$$

$$\text{Invece } q = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - x] \text{ per cui } \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2 - 1}{x - 2} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1 - x^2 + 2x}{x - 2} = 2.$$

L'asintoto obliquo ha equazione $y = x + 2$.

PASSO 5• **Studio della derivata prima per ricercare massimi e minimi:**

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = \frac{3}{0} = -\infty$$

Si riportano i valori riportati l'andamento della funzione agli estremi del campo.

La funzione ha un asintoto verticale di equazione $x = 2$ ma non ha un asintoto orizzontale, devo pertanto cercare l'asintoto obliquo, che avrà equazione del tipo $y = m x + q$.

$$\text{Poiché } m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \text{ sarà } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x - 2} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x} = 1$$

$$\text{Invece } q = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - x] \text{ per cui } \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2 - 1}{x - 2} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1 - x^2 + 2x}{x - 2} = 2.$$

L'asintoto obliquo ha equazione $y = x + 2$.

PASSO 5

- **Studio della derivata prima per ricercare massimi e minimi:**

Dopo aver calcolato la derivata prima, la pongo uguale a zero. Le soluzioni dell'equazione danno i valori della x in cui la funzione può assumere massimi o minimi.

$$y' = \frac{2x(x-2) - (x^2-1)}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 1}{(x-2)^2}$$

Ponendo ora $y = 0$ trovo le x in cui ho i punti di massimo e minimo:

$$x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 + \sqrt{3} \text{ e } x_2 = 2 - \sqrt{3}$$

Sostituendo tali valori nella funzione da studiare ottengo le y corrispondenti:

$$y_1 = \frac{(2 + \sqrt{3})^2 - 1}{2 + \sqrt{3} - 2} = 4 + 2\sqrt{3} \cong 7.46$$

$$\text{Sostituendo } x_2 = 2 - \sqrt{3} \text{ ottengo } y_2 = 4 - 2\sqrt{3} \cong 0.54$$

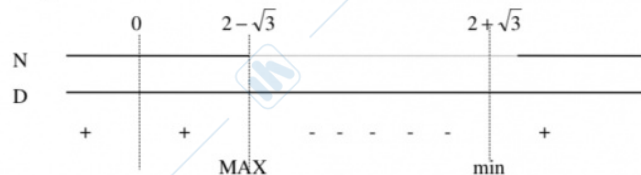
Studio il segno della derivata prima:

$$y' = \frac{x^2 - 4x + 1}{(x-2)^2} > 0$$

Ovviamente il denominatore, essendo un quadrato, è sempre > 0 .

Il denominatore è $x^2 - 4x + 1 > 0$ da cui ottengo $x < 2 - \sqrt{3} \vee x > 2 + \sqrt{3}$

Facendo il grafico:



PASSO 6

- **Studio della derivata seconda: (Ricerca eventuali flessi)**

Si calcola la derivata seconda, la si pone uguale a zero e si trovano gli eventuali punti di flesso.

$$y'' = \frac{(2x-4)(x-2)^2 - 2(x-2)(x^2-4x+1)}{(x-2)^4} = \frac{6x-12}{(x-2)^3}$$

Teorema di Rolle

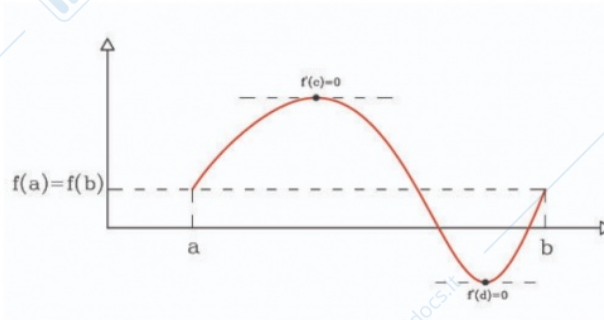
Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

Ipotesi:

- ★ $f(x)$ funzione continua in $[a, b]$
- ★ $f(x)$ derivabile in (a, b)
- ★ e assume valori uguali $f(a) = f(b)$

Tesi:

- ★ esiste almeno un punto critico o stazionario x_0 interno ad (a, b) , cioè un punto $x_0 \in (a, b)$ la cui derivata si annulla ($f'(x_0) = 0$).



Punto critico o punto stazionario

Definizione:

- ★ In analisi matematica si chiama punto critico o punto stazionario di una funzione derivabile definita su un insieme aperto dei numeri reali a valori reali

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

un punto x_0 in cui la derivata $f'(x_0)$ si annulla:

$$x_0 \text{ stazionario} \Leftrightarrow f'(x_0) = 0$$

Teorema di Rolle: dimostrazione.

- ★ In virtù del Teorema di Weierstrass la funzione sull'intervallo $[a, b]$ ammette massimo e minimo assoluti (che indichiamo rispettivamente con M e m).

Caso 1) Il massimo e il minimo sono entrambi raggiunti negli estremi e quindi poiché $f(a) = f(b)$ ne segue che $M = m$.

Questo implica che la funzione è costante sull'intervallo $[a, b]$ e quindi la derivata è nulla in ciascun punto c dell'intervallo (a, b) .

Caso 2) Il massimo o il minimo sono raggiunti all'interno dell'intervallo. Per fissare le idee, consideriamo il caso in cui il massimo è raggiunto in un punto c dell'intervallo aperto (a, b) , cioè $f(c) = M$.

Dunque per il Teorema di Fermat sui punti stazionari la derivata è nulla nel punto c .

IL RAPPORTO INCREMENTALE

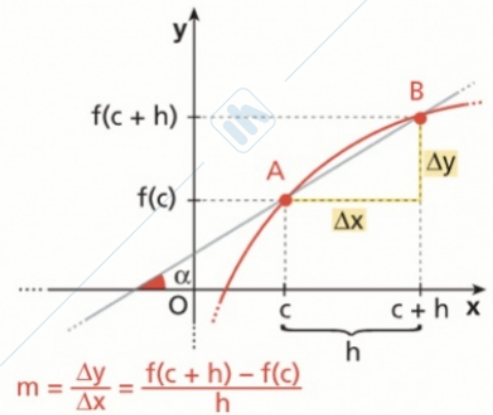
DEFINIZIONE

Rapporto incrementale

Dati una funzione $y = f(x)$, definita in un intervallo $[a; b]$, e due numeri reali c e $c + h$ interni all'intervallo, si chiama rapporto incrementale

di f (relativo a c) il numero:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$



Il rapporto incrementale di f relativo a c è il **coefficiente angolare** della retta passante per A e B .

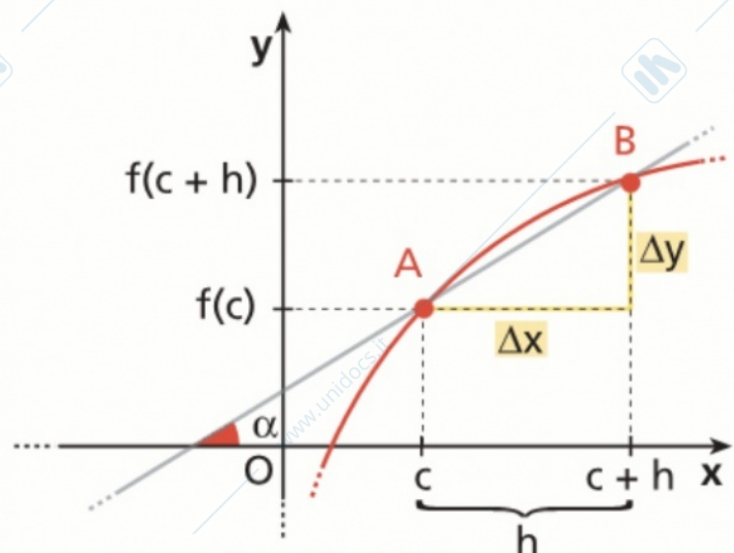
LA DERIVATA DI UNA FUNZIONE

DEFINIZIONE

Derivata di una funzione

Data una funzione $y = f(x)$, definita in un intervallo $[a; b]$, si chiama derivata della funzione nel punto $f'(c)$, il limite, se esiste ed è finito, del rapporto incrementale di f relativo a c :

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$



ASINTOTO ORIZZONTALE

$$\lim_{x \rightarrow \infty}$$

$$f(x) = \frac{1-3x}{x-1}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-3x}{x-1} = \frac{\infty}{\infty}$$

CONSIDERO SOLO
LA X al num e denom
di grado max

$$\frac{-3x}{x} = -3 \quad y = -3$$

ASINTOTO VERTICALE

$$\lim_{x \rightarrow m}$$

esiste solo se esiste il limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-3x}{x-1} \Rightarrow \frac{1-3}{1-1} = \frac{-2}{0} \Rightarrow -\infty \quad x=1$$

ASINTOTO OBLIQUO

$$\lim_{x \rightarrow \infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-3x}{x-1} \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1-3x}{x^2-x} \Rightarrow \frac{-3x}{x^2} = 0 \quad m=0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-3x}{x-1} - mx \Rightarrow \frac{1-3x}{x-1} \Rightarrow \frac{-3x}{x} \quad y = -3$$

Teorema di Lagrange

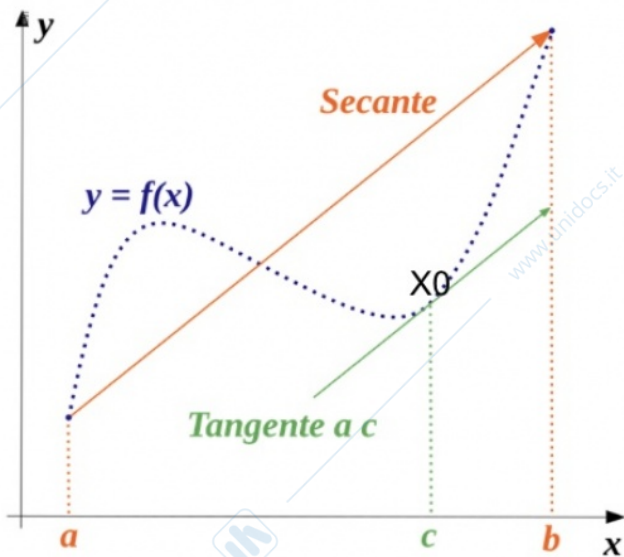
Ipotesi:

- ★ $f(x)$ funzione continua in $[a, b]$
- ★ $f(x)$ derivabile in (a, b)

Tesi:

- ★ esiste almeno un punto x_0 appartenente ad (a, b) per cui:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Teorema di Lagrange: dimostrazione.

- ★ Se $f(x)$ cont. in $[a, b]$ e deriv. in $(a, b) \Rightarrow f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

★ Sia

$$y(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

l'equazione della retta passante per i punti $A(a, f(a)), B(b, f(b))$

Vale che:

$$y(a) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = f(a)$$

$$y(b) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a) + f(b) - f(a) = f(b)$$

Quindi posta la funzione cont. e deriv. $h(x) = f(x) - y(x)$, questa si annulla nei punti a e b :

$$h(a) = f(a) - y(a) = 0 \quad h(b) = f(b) - y(b) = 0$$

Per il teorema di Rolle

$$\exists x_0 \in (a, b) : h'(x_0) = 0$$

$$h'(x_0) = f'(x_0) - y'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x_0) = y'(x_0)$$

ASINTOTO OBLIQUO
 se $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$

Se esistono FINITI (cioè numeri)

① $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad m \neq 0$

② $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - mx = q$

allora la retta $y = mx + q$ è un asintoto obliquo per la funzione $f(x) = y$

$y = \frac{2x^2 - x - 3}{x + 1}$

$D \Rightarrow x \neq -1 \quad (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x - 3}{x + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^x}{x} = \frac{+\infty}{-\infty}$

$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x - 3}{x + 1} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x - 3}{x^2 + x} = \frac{\infty}{\infty}$

$m = 2$

\Downarrow
 $\frac{2x^2}{x^2} = 2$

$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x - 3}{x + 1} - 2x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x - 3 - 2x^2 - 2x}{x + 1} = \frac{-3x - 3}{x + 1}$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3(x + 1)}{x + 1} = -3 \quad q = -3$

$y = 2x - 3$ asintoto obliquo

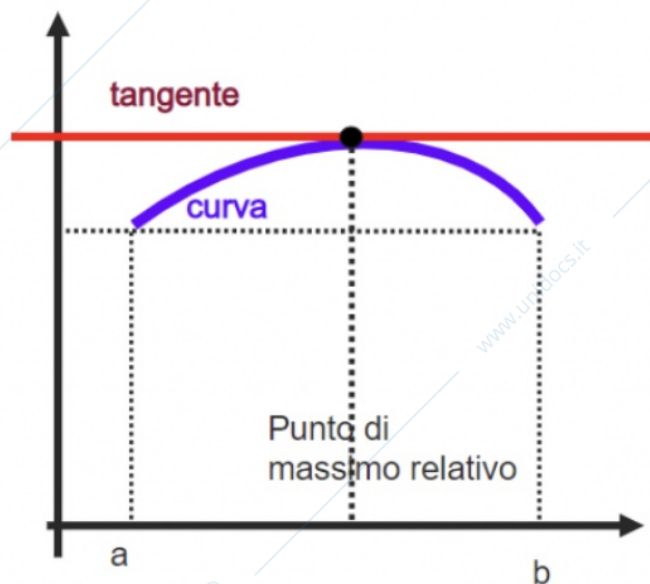
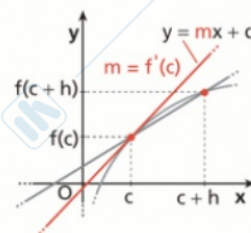
Teorema di Fermat

Ipotesi:

- ★ Sia una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
- ★ si supponga che x_0 sia interno ad (a, b) ed esso sia un punto di massimo (Max) o di minimo (Min) relativo di f .
- ★ Se f è derivabile in x_0 , allora

Tesi:

- ★ $f'(x_0) = 0$.



Teorema di Fermat: dimostrazione.

Se x_0 punto di Max o di Min ed f è derivabile in $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$.

Si supponga che x_0 sia un punto di massimo locale.

Allora $\exists \delta > 0 : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$ e tale che si abbia

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \text{ con } |x - x_0| < \delta.$$

Quindi, $\forall h$ contenuto in $(0, \delta)$ vale

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0.$$

Dato che il limite di questo rapporto per $h \rightarrow 0$ da destra esiste ed è pari a $f'(x_0)$, allora $f'(x_0) \leq 0$.

Allo stesso modo, per h contenuto in $(-\delta, 0)$ si nota che

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0,$$

ma ancora una volta il limite per $h \rightarrow 0$ da sinistra vale $f'(x_0)$ così anche $f'(x_0) \geq 0$.

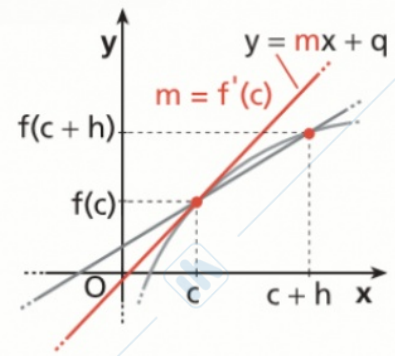
Si conclude, pertanto, che $f'(x_0) = 0$.

LA DERIVATA DI UNA FUNZIONE

DEFINIZIONE

Derivata di una funzione

Data una funzione $y = f(x)$, definita in un intervallo $[a; b]$, si chiama derivata della funzione nel punto c interno all'intervallo, e si indica con $f'(c)$, il limite, se esiste ed è finito, per h che tende a 0, del rapporto incrementale di f relativo a c :



$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

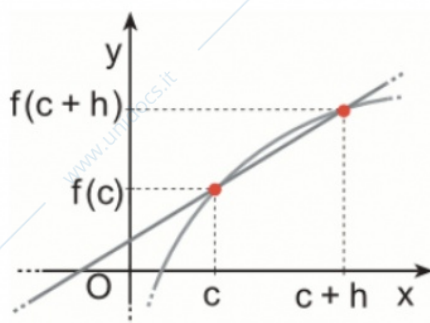
La derivata di una funzione in un punto c rappresenta il **coefficiente angolare della retta tangente** al grafico della funzione nel suo punto di ascissa c .

LA DERIVATA DI UNA FUNZIONE

Condizione di esistenza della derivata

La derivata di f esiste in c se:

- la funzione è definita in un intorno di c ;
- esiste il limite del rapporto incrementale per h tendente a 0
- il limite è un numero finito



Rapporto incrementale e derivata

Nel processo di limite il rapporto incrementale diventa il **coefficiente angolare della retta tangente**.

