Regola per il

integrale
de
funzione
assegnata:
G è una
G tale
za del
di ascissa
eso

RETTANGOLOIDE

Sia ~~costante~~ una funzione continua (significa che il grafico di f "non ha strappi" e quindi è possibile determinare l'area del rettangoloide).

· Integrale definito:

$\int_a^b f(x)dx$ = integrale definito di f esteso all'intervallo $[a;b]$.

L'integrale definito è un numero reale.

Def. primitive

Si dice che $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ se è derivabile $F'(x)=f(x)$ $\Rightarrow \forall x \in (a;b)$

· Ogni funzione $f:[a;b]\rightarrow\mathbb{R}$ continua ammette delle primitive

· La primitiva non è mai unica: infatti se $F(x)$ è una primitiva, allora lo è anche $F(x)+c$ con $c\in\mathbb{R}$ costante.

Se $F_1(x)$ e $F_2(x)$ sono due primitive di $f(x)$ in uno stesso intervallo allora $F_1(x)-F_2(x)$ è una funzione costante.

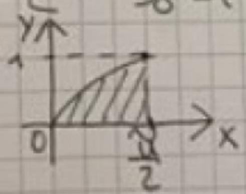
- Per indicare una generica primitiva di $f(x)$ si utilizza la notazione $\int f(x)dx$ (la stessa dell'integrale indefinito).

PRIMITIVE ELEMENTARI

$f(x)$	$F(x)$	
$\cos x$	$\operatorname{sen} x$	
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x$	
e^x	e^x	
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$	
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\forall n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$	
$\log x$	$\frac{1}{x}$	

esempio calcolo di una primitiva:

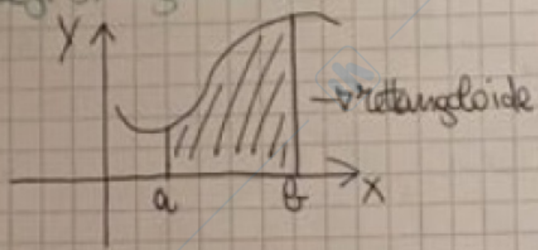
1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\cos\frac{\pi}{2}\right)-(-\cos 0) = 0+1 = 1$

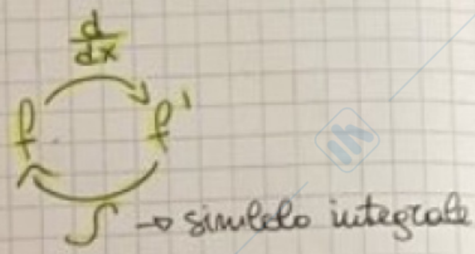


2) $\int_1^2 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 = \frac{2^4}{4}-\frac{1^4}{4} = \frac{16}{4}-\frac{1}{4} = \frac{15}{4}$

9) Integrale definito e indefinito, primitive, regola per il calcolo dell'area di un rettangoloide

Def. Integrazione





Interpretazione geometrica: calcolo dell'area di rettangoloide

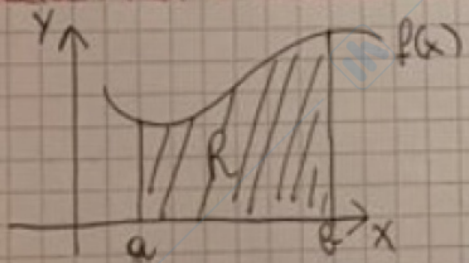
Motivazione analitica: inversa operazione di derivata

Si dice che F è una primitiva di f se $F' = f$

- Una primitiva di una funzione $f(x)$ è una qualsiasi funzione derivabile $F(x)$ con derivata che coincide con la funzione assegnata:

$$F'(x) = f(x)$$

REGOLA PER IL CALCOLO DI AREA DI RETTANGOLOIDE:



area $R = G(b) - G(a)$ dove G è una qualsiasi primitiva di f.

Per calcolare l'area di R procediamo con 2 passi:

PASSO 1: Cerco una primitiva di f, ovvero una funzione G tale che $G' = f$

PASSO 2: Utilizzare la regola area $R = G(b) - G(a)$

NOTAZIONE: Denotiamo con il simbolo $\int_a^b f(x)dx$ l'area del rettangoloide, definito dalla funzione $f(x)$ e dai punti di ascissa a e b.

Il simbolo $\int_a^b f(x)dx$ si legge: integrale definito di f esteso all'intervallo $[a; b]$.

Def integrale definito e indefinito

INTEGRALE DEFINITO

$\int_a^b f(x)dx$ = area di R.

Capiamo che è un integrale definito perché c'è a e b.

L'integrale definito è un numero reale.

INTEGRALE INDEFINITO

$\int f(x)dx$ = insieme delle primitive di f.

Non è specificato l'intervallo.

IMPORTANTE:

Osserviamo che: $\int x^\beta d\beta = \begin{cases} \frac{x^{\beta+1}}{\beta+1} & \text{se } \beta \neq -1 \\ \log x & \text{se } \beta = -1 \end{cases}$