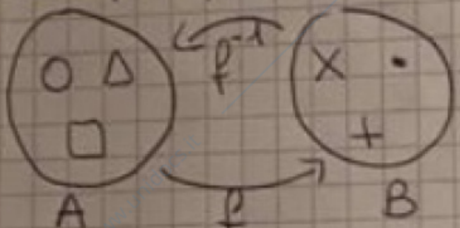
Una funzione logaritmica per definizione è una funzione data da un logaritmo in cui la base è costante e l'argomento è variabile. A seconda dei contesti, l'espressione funzione logaritmica può indicare la specifica funzione con base il numero di Nepero ed argomento variabile, indicata con $\log(x)$.

Esempio prof:



$f: A \to B$

$f(\triangle) = \bullet$

$f(\bigcirc) = x$

$f(\square) = +$

$f: B \to A$

$f(\bullet) = \triangle$

$f(x) = \bigcirc$

$f(+) = \square$

Esempio: a) $f(x) = 2x \qquad g(x) = \frac{x}{2}$

$f(x)$	x
0	0
2	1
4	2
-2	-1

$g(x)$	x
0	0
$\frac{1}{2}$	1
1	2
$-\frac{1}{2}$	-1

Grafici e applicazioni delle funzioni logaritmiche.

Def. limite: sottoinsiemi del piano definiti da disequazioni con valore assoluto

La funzione logaritmo è una funzione della forma $f(x) = \log_a x$ con $a > 0$ e $a \neq 1$. Cosa rappresenta il log di un numero?

$\log_a b$ con $a, b > 0$ $a \neq 1$ rappresentano l'esponente da dare alla base a per ottenere l'argomento b.

$$c = \log_a b \iff a^c = b$$

Caratteristiche della funzione

- $\log_a 1 = 0$
- $D: (0; +\infty)$
- $C: \mathbb{R}$

calmente.

In generale: $N(t) = N_0 \cdot 2^t$

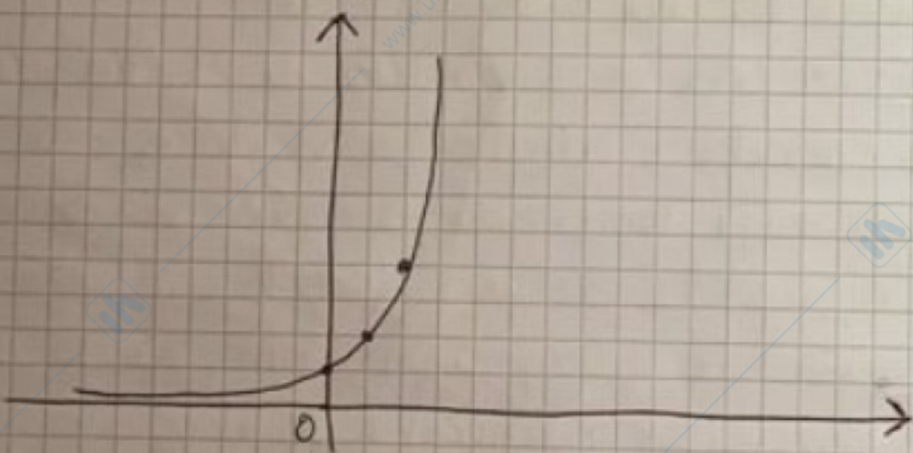
Dato un numero reale positivo $a \neq 1$, $a > 0$ si definisce f esponenziale $y = a^x$.

PROPRIETÀ:
- $a^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $a^0 = 1$ f passa per $(0;1)$
- $D: \mathbb{R}$
- $C: (0; +\infty)$

GRAFICA:

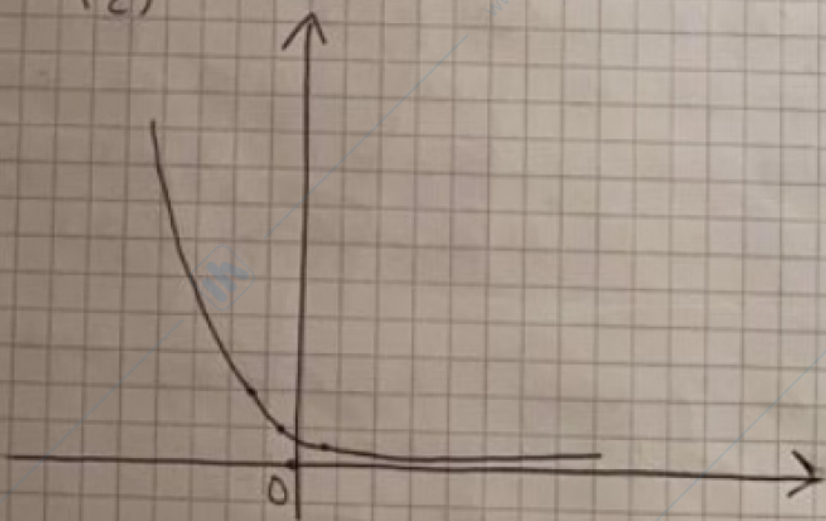
Crescente: $a > 0$ $\quad y = 2^x$

x	y
0	1
1	2
2	4
-1	$\frac{1}{2}$
-2	$\frac{1}{4}$



decrescente: $0 < a < 1$ $\quad f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	y
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
-1	2
-2	4



Funzioni esponenziali e logaritmiche

* e = 2,71828...

Def. Funzione esponenziale

Una **funzione esponenziale** per definizione è una **funzione data da una potenza in cui la base è costante e l'esponente è variabile**. In alcuni contesti, l'espressione "funzione esponenziale" si riferisce alla specifica funzione con base il numero di Nepero ed esponente variabile: $f(x)=e^x$.

In generale si tratta di una funzione con questa forma: $f(x)=a^x$

Le funzioni esponenziali vengono usate per modellare processi di crescita o decadimento.

Esempio: Crescita esponenziale di batteri, diciamo che la sua crescita è caratterizzata da queste proprietà:

1. In intervalli temporali di uguale lunghezza il n° di batteri aumenta di uguale fattore.
2. All'inizio la colonna è composta da 1000 batteri
3. Dopo un'ora il numero è raddoppiato

La proprietà numero 1. si basa sull'ipotesi che ogni batterio si riproduca con fattore costante, si tratta di una crescita esponenziale, ma prima o poi raggiunge i limiti che rallentano il processo. Il nostro scopo è prendere dopo un tempo "t" la grandezza della colonia:

	t	b
h	0	$1000 \rightarrow 1000 \cdot 2^0$ batteri
h	1	$2000 \rightarrow 1000 \cdot 2^1$ batteri
h	2	$4000 \rightarrow 1000 \cdot 2^2$ batteri
h	3	$8000 \rightarrow 1000 \cdot 2^3$ batteri

$[2^3 = 2^{3+0} = 2^3 \cdot 2^0 = 2^3 = 2^3 \cdot 1]$

dopo t ore $1000 \cdot 2^t$ batteri, la variabile t compare come esponente, quando t aumenta il valore 2^t cresce esponenz=

Proprietà:

- $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$
- $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
- $\log_a(b^c) = c \log_a b$

Dobbiamo distinguere i casi $a>1$ e $0<a<1$

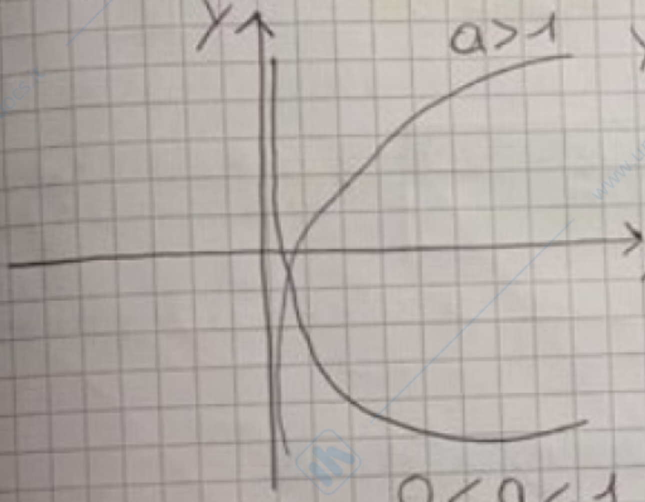
$a>1$ crescente

$\log_a x > 0 \quad x>1$

$\log_a x < 0 \quad 0<x<1$

$y = \log x$

x	y
1	0
2	1
4	2
$\frac{1}{2}$	-1
$\frac{1}{4}$	-2



$0<a<1$ decrescente

$\log_a x > 0 \quad 0<x<1$

$\log_a x < 0 \quad x>1$

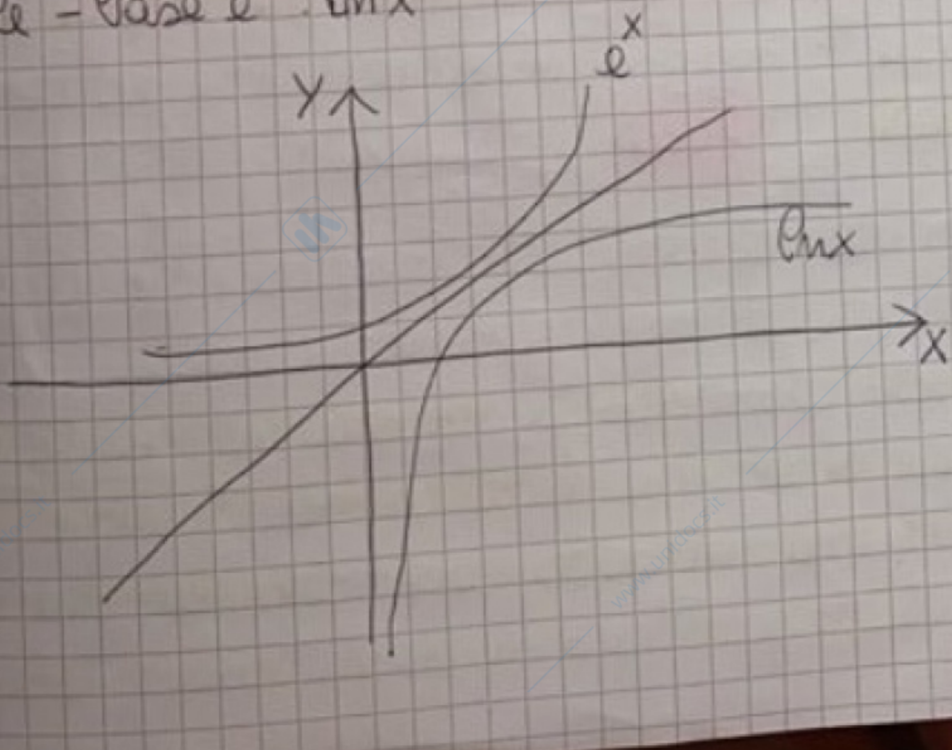
$y = \log_{\frac{1}{2}} x$

x	y
1	0
2	-1
4	-2
$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{4}$	2

Fra le varie basi dei log ci sono alcune particolari importanti

- log decimale - base 10: $\log x$
- log naturale - base e: $\ln x$

Confronto:



Particolarmente interessante è la funzione in base e:

$f(x) = e^x$

$f(x) = e^x$

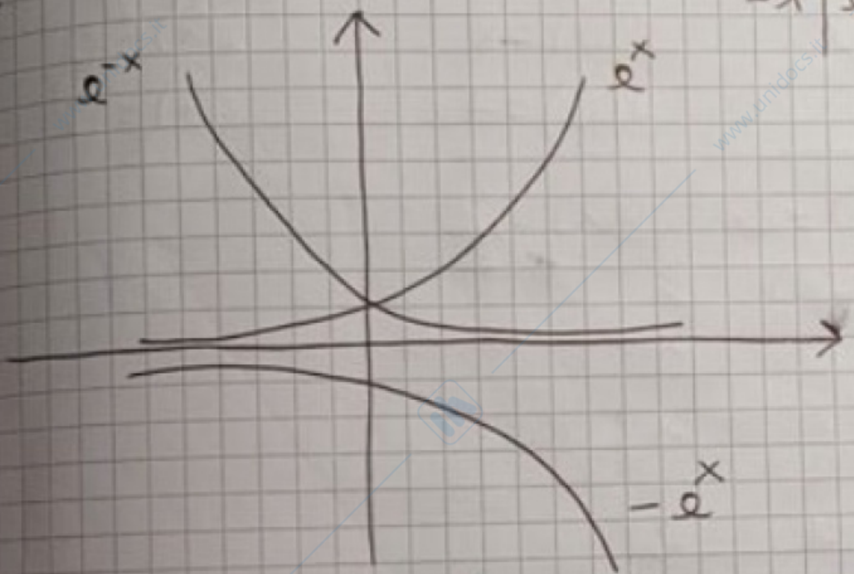
x	y
0	1
1	e
2	e^2
-1	$\frac{1}{e}$

$f(x) = -e^x$

x	y
0	-1
1	$-e$
2	$-e^2$
-1	$-\frac{1}{e}$

$f(x) = e^{-x}$

x	y
0	1
1	$\frac{1}{e}$
2	$\frac{1}{e^2}$
-1	e



PROPRIETÀ POTENZE

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$a^x : a^y = a^{x-y}$

$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Funzioni logaritmiche

Gli esponenziali e logaritmi sono due funzioni una l'inverso dell'altra e sono simmetriche rispetto alla bisettrice.

Cosa sono le funzioni inverse?

Ci permettono di "tornare indietro".

Avendo la funzione $f: P \to A$; $x \to y = 3x - 2$

P	A
-2	-8
-1	-5
0	-2
1	1
2	4

La funzione inversa f^{-1}; da A verso P che fa corrispondere alle immagini della funzione f i rispettivi argomenti

$f: P \to A$; $x \to y = f(x)$

$f^{-1}: A \to P$; $y \to x = f^{-1}(y)$