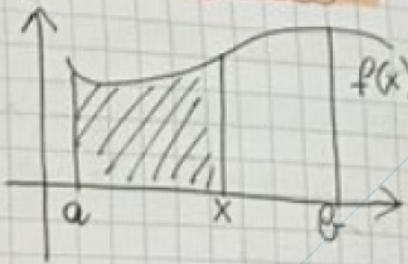
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Funzione integrale, Teorema fondamentale del calcolo integrale



Def funzione integrale

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad x\in[a;b]$ *

f continua in $[a;b]$

* area della regione colorata, che varia al variare di x.

Una funzione integrale è una funzione definita tramite l'operatore integrale ($\int$) in cui almeno uno dei due estremi è una funzione della variabile indipendente x

Def Teorema fondamentale del calcolo integrale (TORRICELLI - BARROW)

Sia f continua in $[a;b]$, allora la funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ è derivabile, e risulta $F'(x) = f(x)$ $x\in[a;b]$

ovvero la funzione integrale di F è una primitiva di f

$$\begin{tikzcd} f \arrow[r, bend left, "\int_a^x"] & F \arrow[l, bend left, "\frac{d}{dx}"] \end{tikzcd}$$

Sia $f(x): [a;b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a;b]$ allora $\exists c\in[a;b] \;/\; \Rightarrow$

$\to \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$

Se definiamo $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ come funzione integrale abbiamo $F(x)$ derivabile in $(a;b)$ risulterà che $F'(x) = f(x)$

$$\underbrace{\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}}_{r.i.}$$

$\exists x_h \in [x;x+h] \;/\; \int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(x_h)(\cancel{x}+h-\cancel{x}) = f(x_h)(h)$ quindi il

$r.i._f = \frac{f(x_h)\cancel{h}}{\cancel{h}} = f(x_h)$ (MEDIA INTEGRALE)

$x \le x_h \le x+h$ quindi se $h\to 0$, $x_h \to x$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(x_h) \overset{f \text{ continua}}{=} f(x)$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari