VETTORI

Prodotto scalare
$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2$
$= |v||w| \cos\alpha$

vettori ortogonali
$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$

modulo vettore
$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_n^2}$

versore
$\hat{v} = \frac{1}{|\vec{v}|} \vec{v}$

linearmente → indipendenti $\gamma \vec{v} + l \vec{u} = 0$ $\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} \gamma v_1 + l u_1 = 0 \\ \gamma v_2 + l u_2 = 0 \end{cases}$ se $\gamma = l = 0$

↳ dipendenti se oltre a $\gamma = l = 0$ esistono anche scalari non nulli che annullino la combinazione lineare.

ANGOLI E GONIOMETRIA

α (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\alpha°$	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot(\alpha)$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞

P. vettoriale
$\vec{v} \times \vec{w} = (v_2 w_3 - v_3 w_2,\ v_3 w_1 - v_1 w_3,\ v_1 w_2 - v_2 w_1)$

CONVERSIONE
$180° : \pi = \alpha° : \alpha^r$

goniometria

Formule goniometriche

addizione e sottrazione	
$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \sin(\beta)\cdot\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}$
$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\beta)\cdot\cos(\alpha)$	$tg(\alpha-\beta) = \frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$	$\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot(\alpha)\cdot\cot(\beta)-1}{\cot(\beta)+\cot(\alpha)}$
$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$	$\cot(\alpha-\beta) = \frac{\cot(\alpha)\cdot\cot(\beta)+1}{\cot(\beta)-\cot(\alpha)}$

duplicazione		
$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)$		$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)} = \frac{2}{\cot(\alpha)-\tan(\alpha)}$
$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$	$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$ $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$	$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha)-1}{2\cot(\alpha)} = \frac{\cot(\alpha)-\tan(\alpha)}{2}$

bisezione	
$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$	$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}} = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)} = \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$
$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$	$\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{1-\cos(\alpha)}} = \frac{\sin(\alpha)}{1-\cos(\alpha)} = \frac{1+\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$

le cinque relazioni fondamentali				
$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$	$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$	$\cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$	$\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)}$	$cosec(\alpha) = \frac{1}{\sin(\alpha)}$

relazioni che esprimono una funzione goniometrica rispetto alle altre tre

$sen(\alpha)$ in funzione di ...	$\cos(\alpha)$ in funzione di ...	$\tan(\alpha)$ in funzione di ...	$\cot(\alpha)$ in funzione di ...
$\sin(\alpha) = \pm\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}$	$\cos(\alpha) = \pm\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}$	$\tan(\alpha) = \pm\frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}}$	$\cot(\alpha) = \pm\frac{\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}}{\sin(\alpha)}$
$\sin(\alpha) = \pm\frac{tg(\alpha)}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$	$\cos(\alpha) = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$	$\tan(\alpha) = \pm\frac{\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}}{\cos(\alpha)}$	$\cot(\alpha) = \pm\frac{\cos(\alpha)}{\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}}$
$\sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$	$\cos(\alpha) = \pm\frac{ctg(\alpha)}{\sqrt{1+\cot^2(\alpha)}}$	$\tan(\alpha) = \frac{1}{\cot(\alpha)}$	$\cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)}$

il segno + o − va preso a seconda del segno della funzione nel quadrante corrispondente all'angolo α

goniometria

Angoli associati

angoli supplementari	
secondo quadrante	
$\sin(180° - \alpha) = \sin(\alpha)$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$
$\cos(180° - \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$
$\tan(180° - \alpha) = -\tan(\alpha)$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$
$\cot(180° - \alpha) = -\cot(\alpha)$	$\cot(\pi - \alpha) = -\cot(\alpha)$

angoli complementari	
primo quadrante	
$\sin(90° - \alpha) = \cos(\alpha)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$
$\cos(90° - \alpha) = \sin(\alpha)$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$
$\tan(90° - \alpha) = \cot(\alpha)$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot(\alpha)$
$\cot(90° - \alpha) = \tan(\alpha)$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan(\alpha)$

MATRICI

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ $\quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A + B$ se hanno la stessa dimensione

$A \cdot B$ se n° colonne A = n° righe B

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{11} \cdot b_{21} + a_{13} b_{31} & ecc \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} b_{21} + a_{23} b_{31} & ecc \end{pmatrix}$

det A (Laplace)

1. scelgo un elemento ed elimino la riga e la colonna a cui appartiene.
2. calcolo il cofattore $(-1)^{i+j}$ e il det della matrice rimanente
3. $a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij})$

$A^T =$ A con righe scambiate con colonne

$A A^{-1} = I$

det A Sarrus

$A \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$

$(a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}) + (a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}) + (a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32})$
$- [(a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}) + (a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}) + (a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33})]$

A^{-1}

1. calcolo cofattori con laplace
2. metto in ordine
3. faccio la traspota
4. moltiplico per $\frac{1}{\det A}$

FUNZIONI, LIMITI, DERIVATE, INTEGRALI

1	ricerca del dominio (o campo di esistenza) della funzione				
$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	$g(x) \neq 0$	$y = [f(x)]^\alpha$	α frazione positiva o irrazionale positivo $f(x) \geq 0$	$y = ctg\, f(x)$	$f(x) \neq k\pi$
$y = \sqrt[n]{f(x)}$	n pari $f(x) \geq 0$	$y = [f(x)]^\alpha$	α frazione negativa o irrazionale negativo $f(x) > 0$	$y = arcsen\, f(x)$	$-1 \leq f(x) \leq 1$
$y = log_a f(x)$	$f(x) > 0$	$y = f(x)^{g(x)}$	$f(x) > 0$	$y = arccos\, f(x)$	$-1 \leq f(x) \leq 1$
$y = log_{g(x)} f(x)$	$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \end{cases}$	$y = tg\, f(x)$	$f(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	Le funzioni che non compaiono in questa tabella (ad esclusione di quelle iperboliche) sono definite $\forall x \in \mathcal{R}$	

$$D\, f(x) \pm g(x) \pm h(x) = f'(x) \pm g'(x) \pm h'(x)$$

$$D\, f(x) \cdot g(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$D\, \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$Df[g(x)] = f'[g(x)] \cdot g'(x)$$

$D\, \text{sen}x = \cos x$ $\quad D\, \tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$ $\quad D\, \text{arcsen}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$D\, \cos x = -\text{sen}x$ $\quad D\, \cot g x = -\frac{1}{\text{sen}^2 x}$ $\quad D\, \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$D\, |x| = \frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x}$

funzioni goniometriche	
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0$	$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$

funzioni esponenziali e logaritmiche		
$\lim_{x\to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$	$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$	
$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$	$\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = 1$	
$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln(a)$	$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha\, ln(x) = 0$; $\lim_{x\to +\infty} \frac{ln(x)}{x^\alpha} = 0$ $\quad \alpha > 0$	
$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$	$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$; $\lim_{x\to +\infty} \frac{ln(x)}{a^x} = 0$ $\quad a > 1$	
$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha$	$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\cdot ln[f(x)]}$	l' uguaglianza a sinistra può essere utile per risolvere alcuni limiti che si presentano nelle forme indeterminate 0^0 $\quad 1^{\pm\infty}$ $\quad +\infty^0$

$\int k\, dx = k\, x + c$ $\quad$ dove k è una costante	un integrale generalizzato si ottiene da un integrale immediato sostituendo x con $f(x)$ e dx con $f'(x)\, dx$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$	$\int [f(x)]^n \cdot f'(x)\, dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$
$\int \frac{1}{x} dx = ln\lvert x\rvert + c$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = ln\lvert f(x)\rvert + c$
$\int a^x dx = a^x\, lg_a e + c$	$\int a^{f(x)} \cdot f'(x)\, dx = a^{f(x)}\, lg_a e + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\, dx = e^{f(x)} + c$
$\int sen\, x\, dx = -\cos x + c$	$\int sen\, [f(x)] \cdot f'(x)\, dx = -\cos f(x) + c$
$\int \cos x\, dx = sen\, x + c$	$\int \cos\, [f(x)] \cdot f'(x)\, dx = sen\, f(x) + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tg\, x + c$	$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 [f(x)]} dx = tg\, f(x) + c$
$\int \frac{1}{sen^2 x} dx = -cotg\, x + c$	$\int \frac{f'(x)}{sen^2 [f(x)]} dx = -cotg\, f(x) + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arcsen\, x + c$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} dx = arcsen\, f(x) + c$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctg\, x + c$	$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2} dx = arctg\, f(x) + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = arcsen\, \frac{x}{\lvert a\rvert} + c$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2-[f(x)]^2}} dx = arcsen\, \frac{f(x)}{\lvert a\rvert} + c$
$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} arctg\, \frac{x}{a} + c$	$\int \frac{f'(x)}{a^2+[f(x)]^2} dx = \frac{1}{a} arctg\, \frac{f(x)}{a} + c$

Per parti:

$$\int f(x) \cdot g(x)\, dx = F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x)\, dx$$

Per sostituzione:

$\int f(x)\, dx \quad f(x) = t \quad dt = f'(x) \cdot dx$

$\Rightarrow dx = dt / f'(x)$

$\hookrightarrow \int t \frac{dt}{f'(x)}$ si semplificherà con la funzione precedente.

TEST BILAT. (σ NOTA)

$H_0: \mu = \mu_0 \qquad {}_{s}T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n}$

$H_1: \mu \neq \mu_0$

Rifiuto H_0 se $|{}_{s}T| \geq z_{\alpha/2}$ $\quad$ $1 - \alpha/2$ e guardo in mezzo alla tabella

pvalue: $2(1 - P[z < {}_{s}T])$

TEST BILAT. (σ NON NOTA)

$H_0: \mu = \mu_0 \qquad T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \cdot \sqrt{n}$

$H_1: \mu \neq \mu_0$

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2}$$

Rifiuto H_0 se $|T| \geq t_{n-1, \alpha/2}$

pvalue $2(1 - P[|T| < T])$

STATISTICA

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$E_{AS} = \frac{MAX - MIN}{2}$$

$$E_R = \frac{E_{AS}}{\bar{X}}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})}$$

$$S = \sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2}$$

$$E[X] = \sum x \cdot p(x_i)$$

$$Var[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2 = \sum_{x \in S} x^2 p(x) - \left(\sum_{x \in S} x\, p(x)\right)^2$$

VA. BINOMIALE

$P(X = s) = \binom{n}{s} p^s (1-p)^{n-s}$ $\quad$ n = TOT PROVE $\quad$ s = n° successi

$E[X] = np$

$Var[X] = np(1-p)$