CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA.

FOGLIO DI ESERCIZI 4– GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2010/11

Esercizio 4.1 (2.2). *Determinare l'equazione parametrica e Cartesiana della retta dello spazio*

(a) *Passante per i punti* $A(1,0,2)$ *e* $B(3,-1,0)$.

(b) *Passante per il punto* $P(1,3,1)$ *e parallela al vettore* $\overrightarrow{OQ} = (2,0,0)$.

(c) *Di equazioni Cartesiane*

$$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y - x + z = 0 \end{cases}$$

Determinare inoltre un punto appartenente a tale retta.

Soluzione:

(a) Poichè $\overrightarrow{AB} = (2,-1,-2)$ otteniamo

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \qquad \forall\, t \in \mathbf{R}$$

Ricaviamo ora l'equazione Cartesiana:

$$\begin{cases} x = 1 + 2(-y) \\ t = -y \\ z = 2 - 2(-y) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

Notiamo che l'equazione Cartesiana di una retta nello spazio è data mediante l'intersezione di due piani.

(b) Possiamo scrivere direttamente l'equazione parametrica:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases} \qquad \forall\, t \in \mathbf{R}$$

Notiamo che l'equazione si può equivalentemente scrivere

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases} \qquad \forall\, t \in \mathbf{R}$$

E' immediato ricavare l'equazione Cartesiana:

$$\begin{cases} y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

(c) La cosa più semplice è porre la variabile x uguale al parametro t, ottenendo

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 3t \\ z = -(1+3t) + t \end{cases} \Rightarrow \ r: \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 3t \\ z = -1 - 2t \end{cases} \qquad \forall\, t \in \mathbf{R}$$

Per determinare un punto P appartenente a r è sufficiente trovare un punto (x,y,z) che soddisfi l'equazione di r (parametrica o cartesiana). Assegnando per esempio il valore 0 al parametro t nell'equazione parametrica otteniamo il punto:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases} \qquad \Rightarrow P(0,1,-1).$$

□

Esercizio 4.2 (2.3).

a) *Determinare l'equazione parametrica e Cartesiana del piano π passante per i punti $A(1,3,1)$, $B(2,0,0)$ e $C(0,1,1)$. Il punto $P(0,2,0)$ appartiene a tale piano?*
b) *Determinare una equazione della retta passante per A ortogonale a π.*

Soluzione:

a) Possiamo determinare prima l'equazione parametrica. Poichè

$$\overrightarrow{AB} = (1,-3,-1)$$
$$\overrightarrow{AC} = (-1,-2,0)$$

otteniamo

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + t - s \\ y = 3 - 3t - 2s \\ z = 1 - t \end{cases} \qquad \forall\, t,\, s \,\in\, \mathbf{R}$$

Per ottenere l'equazione Cartesiana da quella parametrica basta ricavare s e t e procedere per sostituzione:

$$\begin{cases} x = 1 + (1-z) - s \\ y = 3 - 3(1-z) - 2s \\ t = 1 - z \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} s = -x - z + 2 \\ y = 3z - 2(-x - z + 2) \\ t = 1 - z \end{cases} \quad \Rightarrow \; 2x - y + 5z - 4 = 0$$

In alternativa si può ricavare direttamente l'equazione cartesiana, considerando la generica equazione $ax + by + cz = d$ e imponendo il passaggio per i tre punti A, B e C in modo da ricavare i valori di a, b, c e d. Notiamo che così come l'equazione cartesiana è determinata a meno di multipli, anche i valori di a, b, c e d non saranno univocamente determinati.

$$ax + by + cz = d \quad \Rightarrow \begin{array}{ll} A: & a + 3b + c = d \\ B: & 2a = d \\ C: & b + c = d \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{2} + 3b + (d - b) = d \\ a = \frac{d}{2} \\ c = d - b \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{d}{4} \\ a = \frac{d}{2} \\ c = \frac{5}{4}d \end{cases}$$

Possiamo ora scegliere un valore di d. Ponendo $d = 4$ otteniamo

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = 5 \\ d = 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2x - y + 5z = 4$$

Infine $P(0,2,0)$ appartiene al piano se le sue coordinate soddisfano l'equazione (Cartesiana o parametrica). Sostituendo nell'equazione Cartesiana otteniamo

$$-2 - 4 = 0 \quad \text{no}$$

Poichè le coordinate non soddisfano l'equazione P non appartiene al piano.

Analogamente potevamo sostituire nell'equazione parametrica ottenendo:

$$\begin{cases} 0 = 1 + t - s \\ 2 = 3 - 3t - 2s \\ 0 = 1 - t \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} 0 = 2 - s \\ 2 = 3 - 3 - 2s \\ t = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} s = 2 \\ s = -1 \\ t = 1 \end{cases}$$

Poichè la prima e seconda equazione si contraddicono il sistema non ammette soluzione e P non appartiene al piano.

b) Sappiamo che dato un generico piano $ax + by + cz = k$ il vettore (a, b, c) è ortogonale al piano. Quindi dall'equazione cartesiana del piano ricaviamo che la retta cercata ha direzione $(2, -1, 5)$. Sappiamo inoltre che tale retta passa per $A = (1,3,1)$, quindi

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + 5t \end{cases}$$

□

Esercizio 4.3 (2.4)**.** *Sia r la retta di $\mathbf{R}^3$ passante per i punti $A(1,-1,2)$ e $B(-2,0,1)$, e sia s la retta contenente $C(1,3,-3)$ e parallela al vettore $\overrightarrow{OD}(2,-2,3)$.*

a) *Determinare la posizione reciproca delle due rette (cioè se sono incidenti, parallele o sghembe).*
b) *Se sono incidenti determinarne il punto di intersezione.*

Soluzione:
La retta r passante per B e parallela al vettore $\overrightarrow{BA} = (-3, 1, -1)$ ha equazione parametrica:

$$r: \begin{cases} x = -2 - 3t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases} \qquad \forall t \in R$$

Analogamente

$$s: \begin{cases} x = 1 + 2h \\ y = 3 - 2h \\ z = -3 + 3h \end{cases} \qquad \forall h \in R$$

a) Osserviamo subito che r e s non sono parallele in quanto i vettori direzione $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{OD}$ non hanno le componenti proporzionali uno rispetto all'altro.
Per stabilire se sono incidenti cerchiamo l'intersezione $r \cap s$ risolvendo il sistema di 3 equazioni nelle due incognite t, h:

$$\begin{cases} -2 - 3t = 1 + 2h \\ t = 3 - 2h \\ 1 - t = -3 + 3h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3(3 - 2h) - 2h = 3 \\ t = 3 - 2h \\ -(3 - 2h) - 3h = -4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -9 + 6h - 2h = 3 \\ t = 3 - 2h \\ -3 + 2h - 3h = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = 3 \\ t = 3 - 2h \\ h = 1 \end{cases}$$

Poichè la prima e terza equazione si contraddicono il sistema non ammette soluzione e le rette non sono incidenti.
Infine le rette sono sghembe.

In alternativa potevamo per esempio ricavare l'equazione cartesiana di una delle due rette

$$r: \begin{cases} x = -2 - 3t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y = -2 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

e quindi rislovere il sistema

$$\begin{cases} x = 1 + 2h \\ y = 3 - 2h \\ z = -3 + 3h \\ x + 3y = -2 \\ y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2h \\ y = 3 - 2h \\ z = -3 + 3h \\ 1 + 2h + 9 - 6h = -2 \\ 3 - 2h - 3 + 3h = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2h \\ y = 3 - 2h \\ z = -3 + 3h \\ -4h = -12 \\ h = 1 \end{cases}$$

Poichè le ultime due equazioni si contraddicono il sistema non ammette soluzione e le rette non sono incidenti.
Infine le rette sono sghembe.

□

Esercizio 4.4 (2.5)**.**
a) *Determinare la posizione reciproca (cioè se sono incidenti, parallele o sghembe) delle rette r e r' di equazioni parametriche:*

$$r: \begin{cases} x = 2t \\ y = t + 1 \\ z = t + 3 \end{cases} \qquad r': \begin{cases} x = s \\ y = 2 \\ z = s + 2 \end{cases}$$

b) *Se le rette sono incidenti determinare l'ampiezza dell'angolo tra esse.*

Soluzione:

a) Osserviamo subito che r e r' non sono parallele in quanto r è parallela al vettore $(2,1,1)$ mentre r' è parallela al vettore $(1,0,1)$.

Per stabilire se sono incidenti cerchiamo l'intersezione $r \cap r'$ risolvendo il sistema di 3 equazioni nelle due incognite t, s:

$$\begin{cases} 2t = s \\ t+1 = 2 \\ t+3 = s+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 2 \\ t = 1 \\ 1+3 = 2+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 2 \\ t = 1 \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione di r (o analogamente di r') il valore di t (o di s) determinato, troviamo che r e r' sono incidenti nel punto $P(2,2,4)$.

b) L'angolo ϑ formato dalle rette r e r' corrisponde all'angolo formato dai rispettivi vettori direzione $u = (2,1,1)$ e $v = (1,0,1)$. Possiamo quindi sfruttare la formula

$$\cos(\vartheta) = \frac{(u,v)}{|u| \cdot |v|} = \frac{u \cdot v^T}{|u| \cdot |v|}$$

dove

$$|u| = \sqrt{(u,u)} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$
$$|v| = \sqrt{(v,v)} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

Quindi

$$\cos(\vartheta) = \frac{2+1}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \vartheta = 30°.$$

□

Esercizio 4.5 (2.7)**.**

a) *Determinare equazioni parametriche della retta r passante per i punti $A = (2,3,1)$ e $B = (0,0,1)$ e della retta s passante per i punti $C = (0,0,0)$ e $D = (4,6,0)$.*

b) *Stabilire se r e s sono complanari. In caso affermativo, trovare un'equazione cartesiana del piano contenente r e s.*

Soluzione:

a) Il vettori direzione $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ hanno componenti:

$$\overrightarrow{AB} = (-2,-3,0) \qquad \overrightarrow{CD} = (4,6,0)$$

Quindi:

$$r: \begin{cases} x = -2t \\ y = -3t \\ z = 1 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 4t \\ y = 6t \\ z = 0 \end{cases}$$

b) Poichè i due vettori direzione sono paralleli lo sono anche le due rette r e s e in particolare le rette sono complanari.

Per determinare il piano che li contiene abbiamo bisogno però di un vettore direzione differente, appartenente al piano. Possiamo per esempio determinare il vettore direzione $\overrightarrow{AC}$ (in quanto A e C appartengono al piano cercato):

$$\overrightarrow{AC} = (2,3,1)$$

Infine il piano π che contiene r e s ha equazione parametrica:

$$\pi: \begin{cases} x = -2t + 2s \\ y = -3t + 3s \\ z = s \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

Per ricavare l'equazione cartesiana basta eliminare i parametri s e t:

$$\begin{cases} x = -2t + 2z \\ y = -3t + 3z \\ z = s \end{cases} \Rightarrow 3x - 2y = 0$$

In alternativa si può ricavare direttamente l'equazione cartesiana, considerando la generica equazione $ax + by + cz = d$ e imponendo il passaggio per tre dei quattro punti, per esempio B, C e D in modo da ricavare i valori di a, b, c e d. Notiamo che così come l'equazione cartesiana è determinata a meno di multipli, anche i valori di a, b, c e d non saranno univocamente determinati.

$$ax + by + cz = d \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} B: & c = d \\ C: & 0 = d \\ D: & 4a + 6b = d \end{array} \quad \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = 0 \\ a = -\frac{3}{2}b \end{cases}$$

Possiamo ora scegliere un valore di b. Ponendo $b = 2$ otteniamo

$$\begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \\ c = d = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad -3x + 2y = 0$$

□

Esercizio 4.6 (2.9)**.** *Si considerino le rette di equazioni cartesiane*

$$r: \begin{cases} x + 2y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} 2x = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

a) *Dopo avere verificato che le due rette sono incidenti, determinare l'equazione cartesiana della retta passante per $P(1, 1, 1)$ e incidente r e s.*
b) *Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per $C(1, 2, -3)$ e perpendicolare a r.*
c) *Determinare equazioni cartesiane della retta passante per il punto $P = (1, 1, 1)$ e perpendicolare alle due rette r e s.*

Soluzione:

a) Cominciamo con il determinare se le rette r e s sono incidenti risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ y - z = 0 \\ 2x = 0 \\ x + y + z = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ x = 0 \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Quindi le rette sono incidenti nel punto $O(0, 0, 0)$. E' allora sufficiente determinare l'equazione della retta passante per $P(1, 1, 1)$ e $O(0, 0, 0)$. In questo modo tale retta interseca r e s. La direzione è data dal vettore $\overrightarrow{OP}(1, 1, 1)$, quindi la retta cercata ha equazione parametrica:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

b) Il piano passante per $C(1, 2, -3)$ e perpendicolare a r ha equazione del tipo

$$ax + by + cz = k$$

dove a, b, c corrispondono alle componenti del vettore direzione di r (perpendicolare al piano), mentre il valore di k si determina imponendo il passaggio per C.

Determiniamo quindi l'equazione parametrica di r:

$$r: \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

Quindi r è parallela al vettore $(-2, 1, 1)$, e il piano cercato è del tipo

$$-2x + y + z = k$$

Imponendo poi il passaggio per $C(1, 2, -3)$ otteniamo:

$$-2 \cdot 1 + 2 + (-3) = k \qquad \Rightarrow \qquad k = -3$$

Infine il piano cercato ha equazione:

$$-2x + y + z = -3$$

c) Scriviamo l'equazione di r e s in forma parametrica:

$$r: \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$$

Il piano passante per $P(1,1,1)$ e perpendicolare a r ha equazione

$$-2x + y + z = 0$$

Analogamente il piano passante per $P(1,1,1)$ e perpendicolare a s ha equazione

$$-y + z = 0$$

La retta cercata è data dall'intersezione dei due piani appena determinati:

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

Notiamo che la retta coincide, casualmente, con quella determinata al punto precedente.

Un metodo alternativo consisteva nel calcolare il piano π contenente r e s. Tale piano ha direzione parallela ai due vettori direzione di r e s e contiene il punto $O(0,0,0)$ di intersezione di r e s:

$$r: \begin{cases} x = -2t \\ y = t - s \\ z = t + s \end{cases} \Rightarrow x + y + z = 0$$

La retta cercata è quindi la retta passante per P e perpendicolare a tale piano:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Notiamo che si tratta, ovviamente, della stessa retta determinata con l'altro metodo, scritta in maniera differente.

□

Esercizio 4.7 (2.10)**.** *Sia r la retta nello spazio passante per i punti $A = (0,0,1)$ e $B = (-2,-1,0)$. Sia s la retta passante per i punti $C = (1,1,1)$ e $D = (-1,0,0)$.*

a) *Mostrare che le due rette sono complanari e trovare un'equazione del piano π che le contiene.*
b) *Trovare equazioni parametriche della retta per l'origine ortogonale al piano π del punto* a).

Soluzione:

a) Due rette sono complanari se sono parallele o incidenti.

Il vettori direzione $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ hanno componenti:

$$\overrightarrow{AB} = (-2,-1,-1) \qquad \overrightarrow{CD} = (-2,-1,-1)$$

Poichè i due vettori sono paralleli lo sono anche le due rette r e s e quindi in particolare sono complanari. Per determinare il piano che li contiene abbiamo bisogno però di un vettore direzione differente, appartenente al piano. Possiamo per esempio determinare il vettore direzione $\overrightarrow{AC}$ (in quanto A e C appartengono al piano cercato):

$$\overrightarrow{AC} = (1,1,0)$$

Infine il piano π che contiene r e s ha equazione parametrica:

$$\pi: \begin{cases} x = -2t + s \\ y = -t + s \\ z = 1 - t \end{cases} \quad \forall s,t \in \mathbf{R}$$

Per ricavare l'equazione cartesiana basta eliminare i parametri s e t:

$$\begin{cases} t = 1 - z \\ x = -2 + 2z + s \\ y = -1 + z + s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 - z \\ s = x + 2 - 2z \\ y = -1 + z + x + 2 - 2z \end{cases} \Rightarrow x - y - z + 1 = 0$$

b) Un vettore perpendicolare al piano π ha componenti proporzionali ai cofficienti della x, y e z dell'equazione cartesiana di π, ovvero $(1, -1, -1)$ (o un suo multiplo). Di conseguenza l'equazione della retta cercata è

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = -t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

□

Esercizio 4.8 (2.13)**.** *Si considerino i piani dello spazio*

$$\pi \ : \ x - y + z = 0 \qquad e \qquad \pi' \ : \ 8x + y - z = 0.$$

a) *Stabilire la posizione reciproca dei due piani.*
b) *Trovare un'equazione cartesiana del piano passante per $P = (1, 1, 1)$ e perpendicolare ai piani π e π'.*

Soluzione:

a) Due piani o sono paralleli o la loro intersezione è una retta. In questo caso il piano π è perpendicolare al vettore $(1, -1, 1)$, mentre π' è perpendicolare al vettore $(8, 1, -1)$, quindi i piani non sono paralleli tra loro. Determiniamo la loro intersezione mettendo a sistema le loro equazioni:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 8x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

Quindi i piani si intersecano nella retta

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

b) La direzione perpendicolare al piano π è data dal vettore $(1, -1, 1)$, mentre la direzione perpendicolare a π' è $(8, 1, -1)$. Di conseguenza il piano perpendicolare a π e π' passante per il punto $P(1, 1, 1)$ ha equazione parametrica:

$$\begin{cases} x = 1 + t + 8s \\ y = 1 - t + s \\ z = 1 + t - s \end{cases}$$

Ricavando i parametri s e t e sostituendo si ottiene una equazione cartesiana:

$$y + z = 2$$

In alternativa si può osservare che un piano pependicolare a π e π' è anche perpendicolare alla retta loro intersezione. Di conseguenza il piano cercato è perpendicolare al vettore $(0, 1, 1)$ (direzione della retta intersezione), ovvero ha equazione del tipo $y + z = k$. Imponendo il passaggio per P si ottiene direttamente l'equazione cartesiana:

$$y + z = 2$$

□

Esercizio 4.9 (2.18)**.** *Si considerino i piani π_1, π_2, π_3 di equazioni*

$$\begin{aligned} \pi_1 &: z - 3 = 0 \\ \pi_2 &: x + y + 2 = 0 \\ \pi_3 &: 3x + 3y - z + 9 = 0 \end{aligned}$$

e la retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$*.*

a) *Si stabilisca se il piano* π_3 *contiene* r*.*
b) *Si trovi un'equazione cartesiana del piano* π_4 *passante per l'origine e contenente* r*.*
c) *Si calcoli la proiezione ortogonale dell'origine sul piano* π_1*.*

Soluzione:

Calcoliamo un'equazione parametrica di $r = \pi_1 \cap \pi_2$:

$$\begin{cases} z - 3 = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad r : \begin{cases} x = -t - 2 \\ y = t \\ z = 3 \end{cases}$$

a) Un modo per verificare se π_3 contiene r è di controllare se π_3 contiene due qualsiasi punti di r. Dall'equazione parametrica di r, assegnando per esempio i valori $t = 0$ e $t = 1$ otteniamo i punti $A(-2, 0, 3)$ e $B(-3, 1, 3)$ di r. Quindi π_3 contiene A e B se:

$$3 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 - 3 + 9 = 0$$
$$3 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 - 3 + 9 = 0$$

Siccome le due condizioni sono verificate A e B, e di conseguenza r, sono contenuti in π_3.

b) Un piano π_4 contenente r contiene i suoi due punti A e B. Si tratta quindi di trovare l'equazione del piano per A, B e l'origine. Poiché chiede l'equazione cartesiana la cosa più semplice è probabilmente considerare la generica equazione cartesiana e imporre il passaggio pre i tre punti:

$$ax + by + cz = d \quad \Rightarrow \begin{cases} -2a + 3c = d \\ -3a + b + 3c = d \\ d = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2}c \\ b = \frac{3}{2}c \\ d = 0 \end{cases}$$

Possiamo ora scegliere un valore di c. Ponendo $c = 2$ otteniamo

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \\ c = 2 \\ d = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 3x + 3y + 2z = 0$$

In alternativa potevamo ricavare l'equazione parametrica e da questa ricavare l'equazione cartesiana. Poichè $\overrightarrow{OA} = (-2, 0, 3)$ e $\overrightarrow{OB} = (-3, 1, 3)$, otteniamo le equazioni di π_4:

$$\pi_4 : \begin{cases} x = -2t - 3s \\ y = s \\ z = 3t + 3s \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 3x + 3y + 2z = 0$$

c) Determiniamo la retta s per l'origine ortogonale a π_1, cioè di direzione $(0, 0, 1)$:

$$s : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

La proiezione ortogonale dell'origine sul piano π_1 è quindi l'intersezione di s con π_1:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \\ z = 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

Infine la proiezione cercata è il punto $P(0, 0, 3)$.

□

Esercizio 4.10 (2.20)**.** *Si considerino la retta r di equazione*

$$r \ : \ \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 - 2t \\ z = 1 \end{cases}$$

e la famiglia di piani $\pi_k : \ 2x + ky - z = 1$ dove k è un parametro reale.
Si determini per quali k il piano π_k risulta parallelo a r.

Soluzione:

Un metodo consiste nel mettere a sistema retta e piano e stabilire per quali k il sistema non ammette soluzione:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 - 2t \\ z = 1 \\ 2x + ky - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 - 2t \\ z = 1 \\ (2 - 2k)t = 3k - 2 \end{cases}$$

Il sistema è impossibile, e quindi r e π sono paralleli, se $k = 1$.

Un altro metodo consiste nell'imporre l'ortogonalità tra il vettore direzione di r, $(1, -2, 0)$ e il vettore normale al piano, $(2, k, -1)$:

$$((1, -2, 0), (2, k, -1)) = 2 - 2k = 0 \ \Leftrightarrow \ k = 1$$

□

Esercizio 4.11 (12.9)**.** *Si determini la distanza del punto $P(3, 1, 2)$ dalla retta r di equazione parametrica*

$$r : \begin{cases} x = 6 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 - 3t \end{cases}$$

Soluzione:

La retta r è parallela al vettore $u = (1, 2, -3)$.

Sia π il piano perpendicolare a r passante per P. La prima condizione implica che π sia del tipo

$$x + 2y - 3z = k$$

Imponendo il passaggio per P otteniamo $3 + 2 - 6 = k$, ovvero $k = -1$. Infine

$$\pi : \quad x + 2y - 3z = -1$$

Determiniamo ora il punto di intersezione A di r con π:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ x = 6 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 - 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 + t + 4 + 4t + 3 + 9t = -1 \\ x = 6 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 - 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ x = 5 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

Quindi $A = (5, 0, 2)$.

Possiamo ora calcolare la distanza cercata:

$$d(r, P) = d(A, P) = \parallel AP \parallel = \parallel (2, -1, 0) \parallel = \sqrt{5}$$

□

Esercizio 4.12 (12.10)**.** *Si determini la distanza del punto $P(-1, 0, 2)$ dal piano π di equazione $\pi : \ x - 2y + 3z = -9$.*

Soluzione:

Si può applicare la formula: $d(\Pi, P) = \dfrac{| \, ax_0 + by_0 + cz_0 + d \, |}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \sqrt{14}$.

L'esercizio può essere svolto, in caso di oblio della formula, come è illustrato di seguito. Il piano π è perpendicolare al vettore $u = (1, -2, 3)$.

Sia r la retta perpendicolare a π passante per P:

$$r: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -2t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$$

Determiniamo ora il punto di intersezione A di r con π:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = -9 \\ x = -1 + t \\ y = -2t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 + t + 4t + 6 + 9t = -9 \\ x = -1 + t \\ y = -2t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ x = -2 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

Quindi $A = (-2, 2, -1)$.

Possiamo ora calcolare la distanza cercata:

$$d(\pi, P) = d(A, P) = \| AP \| = \| (1, -2, 3) \| = \sqrt{14}$$

Notiamo che l'esercizio poteva anche essere risolto utilizzando la formula della distanza punto-piano.

□

Esercizio 4.13 (12.16)**.** *Determinare per quali valori di k il triangolo di vertici $A_1(0,0)$, $A_2(4,2)$ e $A_3(1,k)$ ha area 5.*

Soluzione:

L'area del triangolo di vertici A_1, A_2 e A_3 è metà dell'area del parallelogramma di lati

$$\overrightarrow{A_3A_1} = (1, k), \qquad \overrightarrow{A_2A_1} = (4, 2)$$

Ricordando la formula per l'area di un parallelogramma in $\mathbf{R}^2$ otteniamo quindi

$$Area(\text{triangolo } A_1A_2A_3) = \frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix} 1 & k \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\right| = \left|\frac{1}{2}(2 - 4k)\right| = |1 - 2k|$$

Imponendo la condizione che l'area del triangolo sia 5 otteniamo $1 - 2k = \pm 5$, quindi $k = -2$ o $k = 3$.

Abbiamo quindi ottenuto due possibili soluzioni:

- $k = -2$ ovvero $A_3 = (1, -2)$.
- $k = 3$ ovvero $A_3 = (1, 3)$.

□

Esercizio 4.14 (v. 12.23)**.** *Siano $A = (0, -1, 0)$, $B = (-2, 0, -3)$, $C = (-1, 0, -1)$ punti dello spazio.*

a) *Calcolare l'area del triangolo di vertici A, B, C.*
b) *Stabilire se il punto $D = (2, 2, 2)$ appartiene al piano contenente A, B, C.*

Soluzione:

a) L'area del parallelogramma di lati AB e AC è data dalla lunghezza del vettore $AB \times AC$. Poiché $AB = (-2, 1, -3)$ e $AC = (-1, 1, -1)$, otteniamo

$$AB \times AC = \det\begin{bmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 2i + j - k = (2, 1, -1) \quad \Rightarrow \quad |AB \times AC| = \sqrt{6}.$$

Infine l'area del triangolo è metà dell'area del parallelogramma:

$$Area(ABC) = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

b) Un modo consiste nel determinare il piano passante per i tre punti A, B, C il quale ha equazione

$$\pi: \begin{cases} x = -2t - s \\ y = -1 + t + s \\ z = -3t - s \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2x + y - z = -1$$

Il punto D non soddisfa l'equazione di π: $4 + 2 - 2 \neq -1$, quindi D non appartiene al piano contenente A, B, C.

c) Un'isometria conserva le distanze, quindi in particolare deve essere $|AB| = |OP|$. Nel nostro caso
$$|AB| = \sqrt{14} \neq |OP| = \sqrt{5}$$
quindi non può esistere un'isometria che trasforma i punti A e B nei punti O e P.

□

Esercizio 4.15 (12.19)**.** *Calcolare il volume del parallelepipedo di lati $u(1,0,0)$, $v(-3,1,1)$ e $w(-2,2,5)$.*

Soluzione:

Il volume del parallelepipedo è dato dal prodotto misto dei vettori che formano i lati del parallelepipedo. Cominciamo a calcolare il vettore prodotto vettoriale di v e w:
$$v \times w = (3,\ 13,\ -4)$$
Quindi
$$\text{Volume(parallelepipedo)} = |(u, (v \times w))| = |u \cdot v \times w| = |((1,0,0),\ (3,\ 13,\ -4))| = |3| = 3$$
Analogamente
$$\text{Volume(parallelepipedo)} = \left| \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \right| = |1 \cdot (5-2)| = 3$$

□

Esercizio 4.16 (12.20)**.** *Siano $P_1 = (1,-1,0), P_2 = (1,0,-1), P_3 = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, e $P_4 = (1,2,1)$ quattro punti nello spazio.*

a) *Calcolare l'angolo tra i vettori $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_2P_3}$.*
b) *Calcolare il volume del prisma con base il triangolo $P_1P_2P_3$ e lato il segmento P_1P_4.*

Soluzione:

a) Sia ϑ l'angolo cercato, usiamo la formula
$$\cos(\vartheta) = \frac{(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_2P_3})}{|\overrightarrow{P_1P_2}| \cdot |\overrightarrow{P_2P_3}|}$$
Poichè
$$\overrightarrow{P_2P_3} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \qquad \overrightarrow{P_1P_2} = (0,1,-1),$$
si ha
$$(\overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_2P_3}) = 0 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$$
Quindi $\cos(\vartheta) = 0$ e $\vartheta = \frac{\pi}{2}$.

b) Il volume del prisma é metà del volume del parallelepipedo di lati $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_1P_3}$ e $\overrightarrow{P_1P_4}$. Poichè
$$\overrightarrow{P_1P_3} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, -1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \qquad \overrightarrow{P_1P_4} = (0,3,1)$$
otteniamo
$$V = \left|\left(\overrightarrow{P_1P_2},\ \overrightarrow{P_1P_3} \times \overrightarrow{P_1P_4}\right)\right| = \left|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \left(\overrightarrow{P_1P_3} \times \overrightarrow{P_1P_4}\right)\right|$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left|\left((0,1,-1), \left(4 + \frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{6}{\sqrt{3}}\right)\right)\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|-\frac{8}{\sqrt{3}}\right| = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$
Analogamente
$$V = \left|\left(\overrightarrow{P_1P_2},\ \overrightarrow{P_1P_3} \times \overrightarrow{P_1P_4}\right)\right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \right|$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left|-\frac{8}{\sqrt{3}}\right| = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

□

Esercizio 4.17 (12.22)**.** *Si considerino i piani π_1, π_2, π_3 di equazioni:*

$$\pi_1: \ 2x - y = 1, \qquad \pi_2: \ x + y + z = 0, \qquad \pi_3: \ x - 2z = 1.$$

a) *Si determini l'insieme intersezione dei tre piani.*
b) *Si trovi il piano π_4 passante per l'origine e perpendicolare alla retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.*
c) *Si determini l'area del triangolo di vertici A, B, C, con $A = \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$, $B = \pi_1 \cap \pi_3 \cap \pi_4$, $C = \pi_2 \cap \pi_3 \cap \pi_4$.*

Soluzione:

a) Mettiamo a sistema i tre piani:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y + z = 0 \\ x - 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ z = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2} \\ x + 2x - 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{7} \\ y = -\frac{1}{7} \\ z = -\frac{2}{7} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = A = \left(\frac{3}{7}, -\frac{1}{7}, -\frac{2}{7}\right).$$

b) Calcoliamo la retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ z = 1 - 3x \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$$

La retta ha direzione $(1, 2, -3)$, quindi un piano ortogonale a r ha equazione del tipo $x+2y-3z = d$. Imponendo il passaggio per l'origine otteniamo $d = 0$. Infine il piano cercato è

$$\pi_4: \ x + 2y - 3z = 0$$

c) Abbiamo già trovato A nel punto a). Analogamente mettendo a sistema gli altri piani otteniamo:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{7} \\ y = -\frac{5}{7} \\ z = -\frac{3}{7} \end{cases} \Rightarrow \qquad \pi_1 \cap \pi_3 \cap \pi_4 = B = \left(\frac{1}{7}, -\frac{5}{7}, -\frac{3}{7}\right)$$

$$\begin{cases} x = \frac{5}{7} \\ y = -\frac{4}{7} \\ z = -\frac{1}{7} \end{cases} \Rightarrow \qquad \pi_2 \cap \pi_3 \cap \pi_4 = C = \left(\frac{5}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{1}{7}\right).$$

Di conseguenza

$$\overrightarrow{AC} = \left(\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{1}{7}\right), \qquad \overrightarrow{BC} = \left(\frac{4}{7}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}\right). \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BC} = (-1, 0, -2)$$

Infine

$$\text{Area}(ABC) = \frac{1}{2}|\,(-1,\ 0,\ 2)\,| = \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

□