Nel num. non abbiamo un termine preponderante sull'altro

- Possiamo però utilizzare il limite notevole dell'esponenziale:

$$\lim_{\varepsilon(x)\to 0} \frac{e^{\varepsilon(x)}-1}{\varepsilon(x)} = 1$$, questo implica che $e^{\varepsilon(x)} \sim \varepsilon(x)$ per $\varepsilon(x) \to 0$

- Nel nostro caso quando $n \to +\infty$ $\frac{1}{n^2} \to 0$ e quindi:

$$e^{\frac{1}{n^2}} \sim \frac{\frac{1}{n^2}}{4n} = \frac{1}{4n^3}$$

- Se vogliamo dimostrare l'equivalenza asintotica basta far vedere:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n^2}}-1}{\cancel{4n}} \cancel{4}n^{\cancel{3}\,2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n^2}}-1}{\frac{1}{n^2}} = 1$$

- Non ci resta che capire se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^3}$ converge o diverge

Possiamo notare che

siamo di fronte a una serie armonica generalizzata, preceduta da $k=4$ al denominatore

- SAPPIAMO che la SERIE ARMONICA GENERALIZZATA CONVERGE con $\alpha > 1$ $\Rightarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n^2}}-1}{4n}$ CONVERGE $\boxed{\text{PER IL CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO}}$

- Nel fare STIME ASINTOTICHE può essere necessario sfruttare gli sviluppi di Taylor

- Esiste una FORMULAZIONE + GENERALE DI QUESTO CRITERIO che fare il limite della successione S_n per $n \to +\infty$

SE ESISTE IL LIMITE DI S_n per $n \to +\infty$ allora questo limite definisce la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

L'idea intuitiva della somma degli INFINITI termini della successione $\{a_n\}$ si traduce in maniera formale calcolando la somma di un numero finito di termini della successione e poi si fa il limite per $n \to \infty$ di questa somma, se questo limite esiste allora quel limite è la serie

Così come il limite di qualunque altra successione, anche il limite della successione delle somme parziali può fare 4 cose diverse:

1. Se $\lim_{n \to +\infty} S_n = \ell \in \mathbb{R}$ SI DICE CHE LA SERIE CONVERGE AD ℓ. Questo è il caso in cui la somma degli infiniti termini della successione è un numero finito, per questo motivo ℓ viene anche chiamato somma della serie

2. Se $\lim_{n \to +\infty} = +\infty$ si dice CHE LA serie DIVERGE A $+\infty$

3. Se $\lim_{n \to +\infty} S_n = -\infty$ SI DICE CHE LA SERIE DIVERGE A $-\infty$

4. Se $\lim_{n \to +\infty} S_n$ NON ESISTE SI DICE CHE LA SERIE È INDETERMINATA (O IRREGOLARE)

STABILIRE IL CARATTERE DI UNA SERIE

- CONDIZIONE NECESSARIA AFFINCHÈ LA SERIE CONVERGA È CHE IL TERMINE GENERALE a_n SIA INFINITESIMO (OVVERO $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$)

Di solito si testa immediatamente

È una condizione necessaria, ma non sufficiente, infatti esistono delle serie che pur avendo il termine generale a_n infinitesimo divergano a $+\infty$

- Ci sono dei criteri che forniscono delle CONDIZIONI SUFFICIENTI PER LA CONVERGENZA.

Vengono divisi in 2 categorie

CRITERI CHE SI USANO PER SERIE A TERMINI POSITIVI:
- CRITERIO DEL RAPPORTO
- CRITERIO DELLA RADICE
- CRITERIO DEL CONFRONTO
- CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

CRITERIO PER LE SERIE A TERMINI DI SEGNO VARIABILE:
- CRITERIO DELL'ASSOLUTA CONVERGENZA
- CRITERIO DI LEIBNIZ

Grazie a questi criteri è possibile determinare rapidamente il carattere della serie, senza dover calcolare esplicitamente S_n.

SERIE TELESCOPICA

Oltre alla serie di Mengoli, un altro tipo di serie telescopica è la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

- In questo caso il termine generale a_n:

$$a_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n)$$

- Proviamo a calcolare S_n:

$S_n = \cancel{\ln(2)} - \ln(1) + \cancel{\ln(3)} - \cancel{\ln(2)} + \ln(4) - \cancel{\ln(3)} + \dots + \ln(n+1) - \cancel{\ln(n)}$

- Ci si accorge subito che ogni termine si elimina con quello che si trova 3 posti dopo di lui, facendo sopravvivere solamente $-\ln(1)$ che però fa 0, e $\log(n+1)$ che coincide con S_n
- È chiaro che:

$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$, possiamo così concludere che questa serie telescopica DIVERGE A $+\infty$

- A differenza delle serie geometriche che sono comuni, le serie telescopiche sono RARE

Le serie geometriche e le serie telescopiche sono semplici da caratterizzare poiché possiamo ricavare una formula chiusa per S_n, così riusciamo a determinare facilmente il carattere della serie

In generale però non abbiamo questa fortuna, quindi occorre trovare dei criteri che ci consentano di stabilire se la serie converge, diverge o è indeterminata senza passare tramite le somme parziali

- Sono stati necessari 3 step per applicare questo criterio:

1) Bisogna far notare che $\{a_n$ sia, almeno definitivam., una serie a termini positivi

2) Bisogna trovare una 2ª successione $\{b_n$ che sia asintotica a $\{a_n$

3) Capire se la serie il cui termine generale è quello che abbiamo trovato al punto precedente è una serie CONVERGENTE o DIVERGENTE

Possiamo così estendere le conclusioni ricavate x la seconda serie, alla serie di partenza $\{a_n$

In questo caso per trovare una successione asintotica alla nostra è stato sufficiente prestare attenzione ai termini preponderanti al numerat. e al denominat. della frazione, cassando perdere ad esempio gli di ordine inferiore. Altre volte però le cose sono + complicate e per fare la valutazione asintotica si può ricorrere ai LIMITI NOTEVOLI

ESEMPIO 2

Studiare il carattere di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n^2}}-1}{4n}$

- Serie a termini positivi ($4n$ sempre >0, mentre $e^{\frac{1}{n^2}}$ è sempre >1 quando viene elevata a un numero >0)

- Dobbiamo trovare una successione asintotica alla nostra.

- per $n \to +\infty$ il num $\to 0$ perchè $\frac{1}{\infty}=0$ $e^0=1$

LE POTENZE CON ESPONENTE NATURALE DI $\frac{1}{2}$, A partire da $\left(\frac{1}{2}\right)^0$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \dots$$

SE ANDIAMO A SOMMARE TUTTI GLI INFINITI TERMINI DELLA SUCCESSIONE $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \; \forall n \in \mathbb{N}$ (tutti i termini strettamente positivi > 0)

Questa SOMMA DA COME RISULTATO 2, QUINDI $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ CONVERGE A 2

ESEMPIO 3 Se $a_n = 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$ ci si accorge che se si sommano tutti i termini della successione sono uguali a 1 termini, da a_0 fino ad a_n il risultato viene $n+1$ ($S_n = n+1$)

Se consideriamo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ = DIVERGE A $+\infty$

ESEMPIO 4 Se $a_n = -1 \; \forall n \in \mathbb{N}$ si ha che $S_n = -(n+1) \; \forall n \in \mathbb{N}$, QUINDI $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ DIVERGE A $-\infty$

ESEMPIO 5 Se $a_n = (-1)^n \; \forall n \in \mathbb{N}$, questa serie oscilla tra -1 e 1 (n PARI $\to 1$, n DISPARI $\to -1$), se vediamo le somme parziali associate a questa successione si vede che

$$S_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ PARI} \\ 0 & \text{se } n \text{ DISPARI} \end{cases}$$

$S_0 = a_0 = 1$

$S_1 = a_0 + a_1 = 1 + (-1) = 0$

$S_2 = a_0 + a_1 + a_2 = 1 + (-1) + 1 = 1$

$S_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1 + (-1) + 1 + (-1) = 0$

Il limite della successione delle somme parziali non esiste, visto che la successione continua a saltellare tra 1 e 0

Quindi questa serie sarà INDETERMINATA

SERIE DI MENGOLI

LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

VISTO CHE a_n non è definita in $n=0$ (si annullerebbe il denominatore), la serie viene fatta partire da $n=1$

Quello che rende interessante questa serie è che il suo TERMINE GENERALE $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ può ESSERE così RISCRITTO e QUESTA uguaglianza consente di scrivere S_n in una forma semplice e maneggevole

$$S_n = \underbrace{1 - \cancel{\frac{1}{2}}}_{a_1} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}}_{a_2} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}}_{a_3} + \dots + \underbrace{\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}}_{a_{n-1}} + \underbrace{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}_{a_n}$$

Ciascun termine della successione si semplifica con quello IMMEDIATAMENTE successivo, lasciando sopravvivere solamente il PRIMO e l'ULTIMO termine

Quindi S_n si può riscrivere in questa forma:

$$1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \left[1 - \left(\underset{\to 0}{\frac{1}{n+1}}\right)\right] = 1 \implies \text{LA SERIE } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

CONVERGE E LA SOMMA È 1

- LA SERIE DI MENGOLI È IL PIÙ SEMPLICE ESEMPIO DI SERIE TELESCOPICA

CRITERIO DI LEIBNIZ

CRITERIO DI CONVERGENZA PER SERIE A TERMINI DI SEGNO ALTERNO

Enunciato

Sia $\{a_n\}$ una successione e supponiamo che:

1) $a_n \geq 0$ DEFINITIV (sia a termini positivi)

2) $a_n \to 0$ per $n \to \infty$ (sia infinitesima)

3) $a_{n+1} \leq a_n$ DEFINITIV (sia debolmente decrescente)

Allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ è CONVERGENTE

ESEMPIO 1

Studiamo il carattere della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$

- $a_n = \frac{1}{n!}$ è positivo (essendo positivo $n!$) E INFINITESIMO (visto che $n! \to \infty$)

Inoltre a_n è decrescente (essendo $n!$ crescente)

- Visto che le 3 ipotesi sono verificate possiamo applicare Leibniz e concludere che la serie converge

CRITERIO DELLA RADICE

Sia $a_n \geq 0$ DEFINITIVAMENTE E SUPPONIAMO CHE $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$

- Se $l < 1$ allora $\sum a_n$ CONVERGE
- Se $l > 1$ allora $\sum a_n$ DIVERGE
- Se $l = 1$ TUTTO È POSSIBILE (BISOGNA CAMBIARE CRITERIO)

ESEMPIO 1: Studiare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\frac{n}{2}}}$

- Serie a termini positivi
- $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\log n)^{\frac{n}{2}}}} = \lim_{n \to +\infty} \left[(\log n)^{-\frac{n}{2}}\right]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to +\infty} (\log n)^{-\frac{1}{2}} =$

$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{\log n}} = 0 < 1 \Rightarrow$ la serie CONVERGE

ESEMPIO 2: Studiare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

- SERIE A TERMINI POSITIVI
- $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{e}{2} > 1$ $\Downarrow$ la serie diverge a $+\infty$

- Il criterio della radice può essere utile quando nel termine generale ci sono dei fattori elevati alla n o nelle potenze di n più in generale

- Può essere utile ricordare che $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$ e $\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$

- Quando ci sono i fattoriali è più utile utilizzare il criterio del rapporto

Nel caso in cui $\ell = +\infty$ la serie diverge

essendo $a_n > 0$ $\ell \in [0, +\infty)$ oppure $\ell = +\infty$

Criterio del rapporto

Sia $a_n > 0$ definitivamente e supponiamo che $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$

- SE $\ell < 1$ allora $\sum a_n$ converge
- SE $\ell > 1$ allora $\sum a_n$ DIVERGE
- SE $\ell = 1$ allora TUTTO è possibile (bisogna cambiare criterio)

ESEMPIO 1

Studiare il carattere di $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{2015}}{3^n}$

- SERIE A TERMINI NON NEGATIVI (tutti i termini > 0 tranne $n=0$ che fa 0)

quindi la condizione $a_n > 0$ DEFINITIVAMENTE è verificata

- $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{(n+1)^{2015}}{3^{n+1}}}{\frac{n^{2015}}{3^n}} = \frac{(n+1)^{2015}}{\cancel{3^{n+1}}} \cdot \frac{\cancel{3^n}}{n^{2015}} =$

$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{3} \underbrace{\frac{(n+1)^{2015}}{n^{2015}}}_{\to 1} = \frac{1}{3} < 1 \longrightarrow$ la serie converge (ovvero ha somma finita)

ESEMPIO 2

Studiare il carattere di $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

- Serie a termini positivi $\Rightarrow a_n > 0$
- $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\cancel{(n+1)} \cancel{n!}}{\cancel{(n+1)}(n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}}$

$= \lim_{n \to +\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

LIMITE NOTEVOLE $= \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

quindi $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \underbrace{\frac{1}{e}}_{e = \text{circa } 2,7} < 1 \longrightarrow$ LA SERIE converge

• $\cos n$ sarebbe una quantità il cui segno è variabile, ma la presenza del quadrato ci garantisce che il nostro termine generale è una quantità non negativa

• $\cos n$ è compreso tra -1 e 1 e anche quando eleviamo al quadrato resterà una quantità ≤ 1

Ne segue che:

$$0 \leq \left(\frac{\cos n}{n}\right)^2 \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{PER OGNI } n \geq 1$$

La serie armonica generalizzata con $\alpha = 2$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ CONVERGE $\Longrightarrow$ PER IL CRITERIO DEL CONFRONTO CONVERGERÀ ANCHE $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos n}{n}\right)^2$

ESEMPIO 2:

Studiare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\log n}}$

• Notiamo che per $n \geq 1$ il $\log n \geq 0$, siamo quindi davanti ad una serie a termini non negativi.

Dobbiamo quindi cercare qualcosa con cui maggiorare il termine generale

Il problema qui è l'esponente $\log n$, ma $\log n$ è una funzione monotona crescente (diventa sempre + grande al crescere di n) e per $n \to +\infty$ tende a $+\infty$.

Di conseguenza da un certo punto in avanti

$\log n > 2$ DEFINITIVAMENTE QUINDI $n^{\log n} \geq n^2$ DEFINITIVAMENTE

Quindi questo ci permette di concludere che:

$$0 \leq \frac{1}{n^{\log n}} < \frac{1}{n^2}$$

$$\Downarrow$$

$a_n < \frac{1}{n^2}$ perché tra 2 frazioni aventi lo stesso numeratore

SERIE GEOMETRICHE

SONO TUTTE LE SERIE $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ con $q \in \mathbb{R}$

Per valutarne la convergenza è sufficiente valutare il parametro q.

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots q^n = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{se } q \neq 1 \\ n+1 & \text{se } q = 1 \end{cases}$$

Per determinare il carattere della serie è sufficiente fare il:

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{SE } |q| < 1 \text{ (compreso tra } -1 \text{ e } 1) \\ +\infty & \text{SE } q > 1 \\ \text{NON ESISTE} & \text{SE } q \leq -1 \end{cases}$$

Da quanto detto segue che:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \text{ è } \begin{cases} \text{CONVERGENTE (CON SOMMA } \frac{1}{1-q}) & \text{SE } |q| < 1 \\ \text{DIVERGENTE} & \text{SE } q \geq 1 \\ \text{INDETERMIN.} & \text{SE } q \leq -1 \end{cases}$$

Ogni qual volta ci si imbatte in una serie geometrica è sufficiente vedere q per vedere se la serie converge ed eventualmente a che cosa, diverge o è indeterminata.

ESEMPIO: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ serie geometrica in cui $q = \frac{1}{2}$

CONVERGE (essendo $\underset{\uparrow q}{\frac{1}{2}} < 1$) E LA SOMMA È $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

serie che sia asintotica alla nostra, e per fare questo ci conviene cercare di capire come si comporta a_n quando $n \to \infty$. Il numeratore per $n \to \infty$ la quantità $\cos n$ diventa trascurabile rispetto a n (visto che è una quantità limitata, mentre n tende a ∞), mentre nel denomin. quando $n \to \infty$ il $3n$ diventa trascurabile rispetto a n^3

- Quindi nel momento in cui facciamo $\lim_{n \to +\infty} a_n$ la frazione si comporta come il rapporto tra i termini preponderanti al numer e al denom:

$$\frac{n+\cos n}{n^3-3n} \sim \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$$

- Il nostro termine generale sarà asintotico a $\frac{n}{n^3}$ ovvero a $\frac{1}{n^2}$ infatti:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^3+n^2\cos n}{n^3-3n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\cancel{n^3}\left(1+\frac{\cos n}{n}\right)}{\cancel{n^3}\left(1-\frac{3}{n^2}\right)} = 1$$

$\frac{\cos n}{n} \to 0$, $\frac{3}{n^2} \to 0$

- Dividere a_n per b_n è equivalente a prendere a_n e a moltiplicarlo per n^2 visto che una divisione per $\frac{1}{n^2}$ è equivalente a una moltiplicazione per n^2.

- Questa successione $\{a_n$ è asintotica a $\frac{1}{n^2}$ ci basta far notare che:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$ CONVERGE (ARMONICA GENERALIZZATA con $\alpha > 1$)

$\Downarrow$ Per il criterio del confronto asintotico

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\cos n}{n^3-3n}$$ CONVERGE

CRITERIO DEL CONFRONTO

Supponiamo che $0 \leq a_n \leq b_n$ DEFINITIVAMENTE. Allora valgono le seguenti implicazioni

le implicazioni valgono solo in questo verso

1) $\sum b_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum a_n$ converge

2) $\sum a_n$ diverge a $+\infty$ $\Rightarrow$ $\sum b_n$ diverge a $+\infty$

- Questo criterio chiama in causa due serie, a_n e b_n. a_n è la serie iniziale di cui dobbiamo mostrare la convergenza o la divergenza e l'altra è una seconda serie che utilizziamo come confronto

- Se riusciamo a far vedere che i termini della nostra serie sono definitivamente $\leq$ dei termini di una seconda serie e questa seconda serie converge, allora possiamo concludere che convergerà anche la nostra

- Un discorso analogo a ruoli invertiti vale per la divergenza

Serie che si utilizzano di solito per il confronto:

1. Serie geometriche
2. Serie armoniche generalizzate

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ CONVERGE se $\alpha > 1$; DIVERGE se $\alpha \leq 1$

- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$ CONVERGE se $\alpha > 1$ o $\alpha = 1$ e $\beta > 1$; DIVERGE se $\alpha < 1$ o $\alpha = 1$ e $\beta \leq 1$

ESEMPIO 1

Studiare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos n}{n} \right)^2$

SERIE A TERMINI DI SEGNO VARIABILE

I due strumenti che si utilizzano principalmente in queste serie sono:

- L'ASSOLUTA CONVERGENZA
- IL CRITERIO DI LEIBNIZ

Una serie $\sum a_n$ si dice assolutamente convergente se converge la serie $\sum |a_n|$ (serie dei valori assoluti) ovvero la serie che ha per termine generale il valore assoluto del termine generale della nostra serie di partenza

TEOREMA: Se la serie $\sum a_n$ converge assolutamente, allora converge. L'implicazione inversa non è valida!

Questa implicazione è comoda perché ci consente di spostare l'analisi sulla serie dei valori assoluti, se riusciamo a provare che questa converge possiamo concludere che anche la serie di partenza convergerà.

- È più semplice studiare la serie dei valori assoluti perché è una serie a termini non negativi e quindi per studiare la convergenza di serie possiamo utilizzare i criteri delle serie a termini positivi

ESEMPIO 1

Studiare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n!)}{n^4}$

- Serie a termini di segno variabile, perché mentre il denominatore è sempre positivo, il sin al numeratore assume sia valori positivi, sia negativi

CRITERIO DEL RAPPORTO

- Uno dei criteri + importanti per le serie a termini positivi
- E' importante ricordare 2 proprietà delle serie:

SIANO $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ DUE SERIE NUMERICHE CONVERGENTI E SIA $K \in \mathbb{R}$

- Se è vero ciò valgono le seguenti proprietà:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} K a_n = K \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

NB: SE $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora anche $\sum_{n=0}^{\infty} K a_n$ CONVERGE (stesse cose x la divergenza)

- UNA SERIE $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ A TERMINI DEFINITIVAMENTE NON NEGATIVI

(cioè con $a_n \geq 0$ definitivo) CONVERGE O DIVERGE A $+\infty$, NON PUÒ ESSERE INDETERMINATA!

ESEMPIO:

Determinare il carattere della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 3^{-n}}{n^2 - 5}$$

- numeratore strettamente positivo
- denominatore positivo per $n^2 > 5$ → $\forall n \geq 3$

- $a_n \geq 0$ DEFINITIVAMENTE (per $n \geq 3$), quindi la serie converge o diverge a $+\infty$

- Se però ci calcoliamo $\lim_{n \to \infty} a_n = 1$, quindi la CN per la convergenza non è rispettata $\Rightarrow$ LA SERIE NON CONVERGE

- QUINDI LA SERIE DIVERGE A $+\infty$

a far cambiare di segno i termini della serie

- Non ci resta che guardare come si comporta $\frac{n^2+3}{n^4+2n}$ se facciamo $n \to \infty$ il 3 al num è trascurabile rispetto ad n^2 e analogamente al denomin $2n$ è trascurabile rispetto a n^4

- Quindi la funzione è asintoticamente equivalente a $\frac{n^2}{n^4}$, cioè $\frac{1}{n^2}$, quindi:

$$\left|(-1)^n \frac{n^2+3}{n^4+2n}\right| \sim \frac{1}{n^2} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{n^2+3}{n^4+2n}\right| \text{ CONVERGE}$$

criterio del confronto asintotico

- Il criterio del confronto asintotico ci consente di concludere che la serie dei valori assoluti converge, visto che deve avere lo stesso comportamento della serie $\frac{1}{n^2}$ (serie armonica generalizzata con $\alpha > 1$, CONVERGENTE)

- Se abbiamo visto che la serie dei valori assoluti converge, avremo che la serie di partenza è ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE, in base al teorema che abbiamo visto prima, la nostra serie sarà CONVERGENTE

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+3}{n^4+2n} \text{ converge} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+3}{n^4+2n} \text{ CONVERGE}$$

Assoluta convergenza

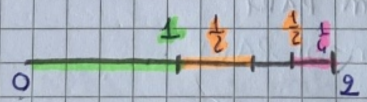
Potrebbe creare qualche perplessità il fatto che la somma di infiniti termini possa dare un numero finito, perché viene da pensare che se io continuo ad aggiungere infiniti termini il risultato deve venire infinito. Per convincerci che la somma può venire finita facciamo qualche esempio.

ESEMPIO 1: Se $a_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ è chiaro che $S_n = 0$ (tutte le somme parziali sono uguali a 0) $\forall n \in \mathbb{N}$, (se consideriamo la successione in cui tutti i termini sono uguali a 0)

perché se io continuo ad aggiungere 0 viene sempre 0, e se faccio il limite della successione delle somme parziali otterrò 0, quindi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ CONVERGE A 0

ESEMPIO 2:

Consideriamo una successione in cui i termini siano tutti strettamente positivi, quindi strettamente >0, per fare questo consideriamo un segmento di lunghezza 2



Supponiamo di voler misurare la lunghezza nel seguente modo:
Dividendolo a metà e misurando la lunghezza del primo tratto, che sarà naturalmente 1, poi dividiamo anche il secondo tratto a metà e misurando la prima parte, essa sarà lunga $\frac{1}{2}$, poi prendiamo il terzo tratto, lo divido in 2 e misuro la prima parte ottenendo $\frac{1}{4}$, si potrebbe andare avanti all'infinito con questo procedimento, e la lunghezza dell'asta varrebbe uguale alla somma di tutte

- Per risolvere questa serie possiamo utilizzare il TEOREMA DEL CONFRONTO, ma non alla serie di partenza, perché non ne rispetta le ipotesi, ma alla SERIE DEI VALORI ASSOLUTI

$$0 \le \frac{|\sin(n!)|}{n^4} \le \frac{1}{n^4} \underset{\text{criterio del confronto}}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(n!)|}{n^4} \text{ converge}$$

- Dire che la serie dei valori assoluti converge è come dire che la nostra serie di partenza è assolutamente convergente e grazie al teorema di assoluta convergenza, se la serie è assolutamente convergente allora converge

$$0 \le \frac{|\sin(n!)|}{n^4} \le \frac{1}{n^4} \underset{\text{criterio del confronto}}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(n!)|}{n^4} \text{ converge} \underset{\text{assoluta convergenza}}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n!)}{n^4} \text{ converge}$$

ESEMPIO 2

Studiare il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+3}{n^4+2n}$

- $\dfrac{n^2+3}{n^4+2n}$ è una quantità strettamente positiva $\forall n \ge 1$,

mentre $(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{quando } n \text{ è pari} \\ -1 & \text{quando } n \text{ è dispari} \end{cases}$

- Si tratta quindi di una serie a termini di segno alterno visto che il termine generale è positivo per n pari, negativo per n dispari. Anche in questo caso ci conviene testare subito se la serie è assolutamente convergente e per fare questo vediamo che aspetto ha il valore assoluto del termine generale:

$$\left|(-1)^n \frac{n^2+3}{n^4+2n}\right| = \frac{n^2+3}{n^4+2n}$$

- L'effetto del modulo è di eliminare $(-1)^n$, che continuavo

è più grande quella con il denominatore + piccolo
Quindi la serie armonica generalizzata con esponente > 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ CONVERGE} \Rightarrow \text{per il criterio del confronto } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\log n}} \text{ CONVERGE}$$

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

Date 2 SUCCESSIONI a_n e b_n A TERMINI DEFINITIVAMENTE POSITIVI, SE

$$\boxed{a_n \sim b_n} \quad \left(\text{ovvero se } \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1\right)$$

↳ sono ASINTOTICHE

ALLORA LE CORRISPONDENTI SERIE $\sum a_n$ e $\sum b_n$ HANNO LO STESSO CARATTERE, cioè o sono ENTRAMBE CONVERGENTI o sono ENTRAMBE DIVERGENTI

- Anche in questo caso abbiamo 2 serie: $\sum a_n$ di cui dobbiamo stabilire il carattere e $\sum b_n$ che è una serie che viene introdotta per poter operare il confronto con la nostra (la maggior parte delle volte si utilizzano le serie armoniche generalizzate)

ESEMPIO 1

Studiamo il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \cos n}{n^2 - 3n}$

- SI TRATTA DI UNA SERIE A TERMINI DEFINITIVAMENTE POSITIVI (numeratore sempre positivo, denominatore positivo definit., infatti questa è una quantità che per $n \to +\infty$ tende a $+\infty$ e quindi da un certo punto in poi $n^2 - 3n$ è una quantità POSITIVA
- Per applicare il confronto asintotico bisogna trovare una

ESEMPIO 3

Studiare il carattere della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n n!}$

- Serie a termini positivi (fattoriali ed esponenziali sono quantità strettamente positive)

$\Downarrow$

$a_n > 0$

- $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{2^n n!}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}}{2 \cdot \cancel{2^n}\cancel{(n+1)}n!} \cdot \frac{\cancel{2^n n!}}{\cancel{(2n)!}}$

$= \lim_{n \to +\infty} (2n+1) = +\infty \implies$ la serie DIVERGE A $+\infty$

- Se il risultato del limite è 1, il criterio non è conclusivo, possiamo trovare serie il cui limite del rapporto fa 1 e convergono e serie che hanno il limite del rapporto che fa 1 e divergono

ex:

- 1 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} \implies \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \dots = \lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)(n^2+1)}{n[(n+1)^2+1]} = 1$

- 2 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^3+1} \implies \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \dots = \lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)(n^3+1)}{n[(n+1)^3+1]} = 1$

- Sono due serie molto simili, entrambe hanno il limite del rapporto che fa 1, eppure la 1° diverge a $+\infty$ e la 2° converge

Quindi nel caso in cui il limite del rapporto è uguale a 1 occorre cambiare criterio

SERIE NUMERICHE

Introduzione

Data una successione di numeri reali $\{a_n\}$ si chiama SERIE dei termini a_n LA SOMMA DEGLI INFINITI TERMINI DELLA SUCCESSIONE, LA SERIE VIENE INDICATA CON $\sum_{n=0} a_n$ che si legge " serie (o somma) per n che va da 0 a ∞ di a_n"

DOBBIAMO FORMALIZZARE l'idea intuitiva della somma degli infiniti termini della successione, l'idea è di costruirsi una 2° successione che possiamo indicare con S_n nel seguente modo:

$S_0 = a_0$

$S_1 = a_0 + a_1$

$S_2 = a_0 + a_1 + a_2$

Procedendo analogamente potremo elencare tutti gli altri, in particolare il termine generale S_n di questa successione

$S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$

che sarà uguale alla somma di tutti i termini della successione di partenza, a partire da a_0 fino ad a_n,

$$\{S_n\} = a_0 + a_1 + \ldots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

LA successione $\{S_n\}$ è detta SUCCESSIONE DELLE SOMME PARZIALI DELLA SERIE

Se vogliamo che la sommatoria sia estesa a tutti i termini della successione $\{a_n\}$ non ci resta