GLI INTERVALLI

IRRAZIONALE= Ogni numero (positivo o negativo) la cui rappresentazione decimale è illimitata e non periodica.

INSIEME NUMERI REALI= L'insieme formato dai numeri razionali e numeri irrazionali indicato con la lettera R.

INTERVALLO= Insieme di tutti i valori compresi tra due estremi *a* e *b* che possono *essere finiti o infiniti, a* è detto *estremo sinistro o inferiore*, *b* è detto *estremo destro o superiore* dell'intervallo.
→ **Limitato** : Estremi numeri finiti
→ **Illimitato** : Almeno un estremo è infinito
→ **Chiuso** : Estremi compresi
→ **Aperto** : Estremi non compresi

MAGGIORANTE= Numero maggiore o uguale in R a tutti gli elementi di A
l'insieme A si dice **superiormente limitato.**
MINORANTE= Se è minore o uguale a tutti gli elementi dell'insieme
l'insieme A si dice **inferiormente limitato.**

Un insieme sia superiormente sia inferiormente limitato si dice **limitato**.

ESTREMO SUPERIORE= Il minimo dell'insieme dei maggioranti.
ESTREMO INFERIORE= Massimo dei minoranti.

Intervalli limitati			
Tipo di intervallo	**Notazione con le parentesi**	**Notazione algebrica**	**Rappresentazione grafica**
Intervallo **chiuso**	$[a, b]$	$a \leq x \leq b$	a b
Intervallo **aperto**	(a, b)	$a < x < b$	a b
Intervallo **chiuso a sinistra** e **aperto a destra**	$[a, b)$	$a \leq x < b$	a b
Intervallo **chiuso a destra** e **aperto a sinistra**	$(a, b]$	$a < x \leq b$	a b

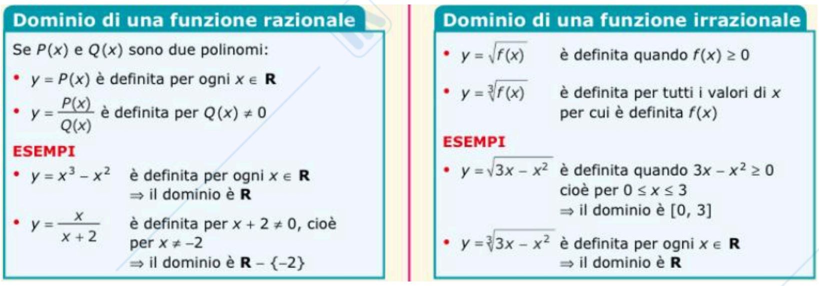
+∞ (più infinito) L'estremo superiore di ogni insieme superiormente illimitato;
-∞ (meno infinito) L'estremo inferiore di ogni insieme interiormente illimitato.

L'insieme dei numeri reali R con l'aggiunta dei due elementi +∞ e -∞ viene indicato **R**= RU {+∞} e si chiama **sistema ampliato dei numeri reali.**

Intervalli illimitati			
Tipo di intervallo	**Notazione con le parentesi**	**Notazione algebrica**	**Rappresentazione grafica**
Chiuso, illimitato a destra	$[a, +\infty)$	$x \geq a$	a
Aperto, illimitato a destra	$(a, +\infty)$	$x > a$	a
Aperto, illimitato a sinistra	$(-\infty, a)$	$x < a$	a
Chiuso, illimitato a sinistra	$(-\infty, a]$	$x \leq a$	a
R	$(-\infty, +\infty)$	$\forall x \in \mathbf{R}$	

FUNZIONE = Si chiama funzione *f* di dominio A e condominio B la relazione che associa ad un elemento di A, un solo elemento di B. (f : A → B)
→ se A e B sono sottoinsiemi di R la funzione si dice **reale di variabile reale**

DOMINIO = Insieme dei valori di x per cui é definita l'espressione f(x)
Se non è espresso, è "*naturale*"



Dominio di una funzione razionale

Se $P(x)$ e $Q(x)$ sono due polinomi:

- $y = P(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbf{R}$
- $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ è definita per $Q(x) \neq 0$

ESEMPI

- $y = x^3 - x^2$ è definita per ogni $x \in \mathbf{R}$ $\Rightarrow$ il dominio è $\mathbf{R}$
- $y = \frac{x}{x+2}$ è definita per $x + 2 \neq 0$, cioè per $x \neq -2$ $\Rightarrow$ il dominio è $\mathbf{R} - \{-2\}$

Dominio di una funzione irrazionale

- $y = \sqrt{f(x)}$ è definita quando $f(x) \geq 0$
- $y = \sqrt[3]{f(x)}$ è definita per tutti i valori di x per cui è definita $f(x)$

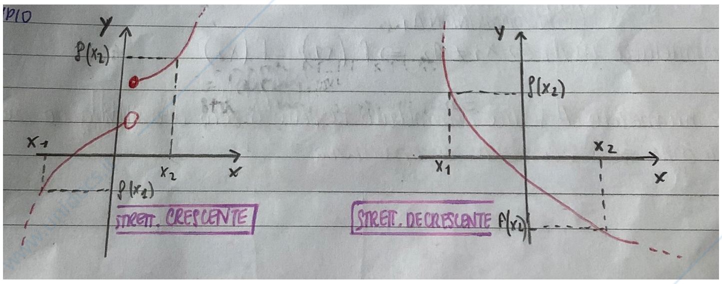
ESEMPI

- $y = \sqrt{3x - x^2}$ è definita quando $3x - x^2 \geq 0$ cioè per $0 \leq x \leq 3$ $\Rightarrow$ il dominio è $[0, 3]$
- $y = \sqrt[3]{3x - x^2}$ è definita per ogni $x \in \mathbf{R}$ $\Rightarrow$ il dominio è $\mathbf{R}$

INSIEME DELLE IMMAGINI= È formato dai valori assunti da y al variare di x nel dominio della funzione.
Una funzione può essere:

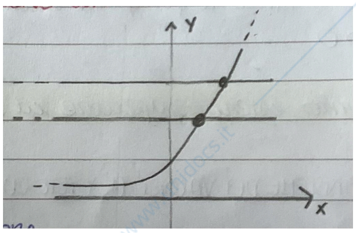
1. **Superiormente limitata**
2. **Inferiormente limitata**
3. **Limitata:** se è sia superiormente che inferiormente limitata.

FUNZIONI CRESCENTI E DECRESCENTI
f si dice strettamente crescente se:
X1<X2 → f(x1)<f(x2)
f si dice strettamente decrescente se:
X1<X2 → f(x1)>f(x2)



FUNZIONI UGUALI = Quando hanno lo stesso dominio f(x)=g(x) x€D

FUNZIONE INVERSA
Si chiama funzione inversa la funzione che associa a ciascun elemento dell'immagine di f la sua unica controimmagine.
Ogni retta orizzontale che interseca il grafico della funzione deve avere un solo punto di intersezione con esso.



FUNZIONE INIETTIVA
f è iniettiva se ad elementi distinti di A1 associa elementi distinti di B
→ $X1 \neq X2 \rightarrow f(x1) \neq f(x2)$
f non è iniettiva se esistono almeno due elementi distinti che hanno la stessa immagine oppure esiste almeno un elemento di B che ha due o più controimmagini in A.

Si chiama funzione f di dominio A e condominio B una relazione che associa a ogni elemento di A uno e uno solo elemento di B.

- Le funzioni si possono classificare in base al tipo di operazioni che compaiono nell'espressione.

Se comprare soltanto un numero finito di operazioni elevate a potenza la funzione è **algebrica** altrimenti è **trascendente**.
Funzioni: Intere-frazionarie-razionali-irrazionali.
→ <u>Due funzioni si dicono uguali se hanno lo stesso dominio</u>.

Crescente in senso lato: $X1<X2 \rightarrow f(x1) < f(x2)$
Decrescente in senso lato: $X1<X2 \rightarrow f(x1)>f(x2)$

STUDIO DEL SEGNO DI FUNZIONE= Determinare i suoi eventuali punti *d'intersezione con gli assi cartesiani* e nello *studiare il segno della funzione.*

FUNZIONE DI R in R= Elemento del dominio ha una sola immagine
Incontrano il grafico in due o più punti.

ASSE DI SIMMETRIA= Preso un punto della figura a piacere il suo simmetrico rispetto alla retta appartiene alla figura.

Insieme delle immagini non è tutto R perché
→ **Funzione strettamente decrescente** quando al valore più piccolo corrisponde immagine più grande.
→ **Funzione strettamente crescente** quando al valore più piccolo corrisponde immagini più piccola
è **INIETTIVA =** Elementi diversi hanno immagini diverse, non ci punti con la stessa ordinata.

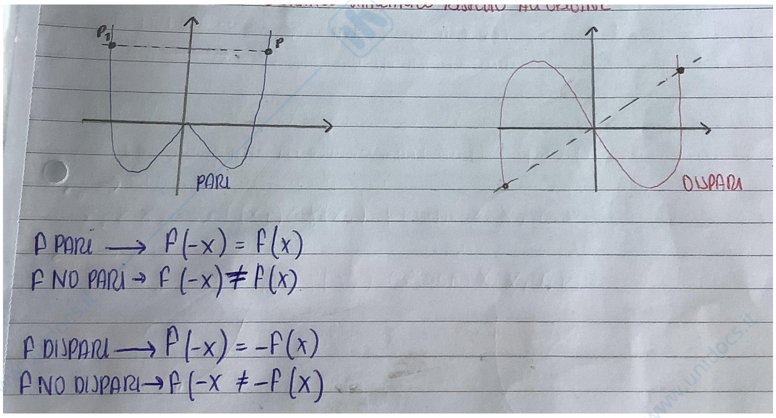
FUNZIONE INVERSA= Funzione che associa a ciascun elemento dell' immagine di f la sua controimmagine.

FUNZIONE MONOTONA = Quattro possibilità crescente, decrescente, strettamente crescente e strettamente decrescente
→ Se rappresenta sempre lo stesso andamento (crescente o decrescente)

In senso stretto	≠	in senso lato
al valore più piccolo corrisponde immagine minore		al valore più piccolo corrisponde immagine minore o uguale

FUNZIONE PARI E DISPARI

a. Se risulta: *f(-x) =f(x)* per ogni x e D → è **pari** e il suo grafico è <u>simmetrico rispetto all'asse y</u>
b. Se invece: *f(-x) =-f(x)* per ogni x e D → si dice **dispari** e il suo grafico è <u>simmetrico rispetto all'origine.</u>



FUNZIONE COMPOSTA

Date due funzioni *f* e *g*, si dice funzione composta di *f* e *g*, e si indica con il simbolo *g* o *f* (che si legge: *«g composto f»*), la funzione definita da: g(*f*(x)) = *g*(*f*(x))

→ Il <u>dominio</u> di *g* o *f* è costituito da tutti gli elementi appartenenti al dominio di *f* tali che *f(x)* appartiene al dominio di *g*.

INTORNO

Un intervallo dove dentro c'è un punto.
Intorno di 0 es. -2;+2

Si chiama invece intorno destro di x_0 di raggio δ l'insieme:

$$I^+_{x_0,\delta} = \{x \in \mathbb{R} : x_0 < x < x_0 + \delta\} = (x_0, x_0 + \delta)$$

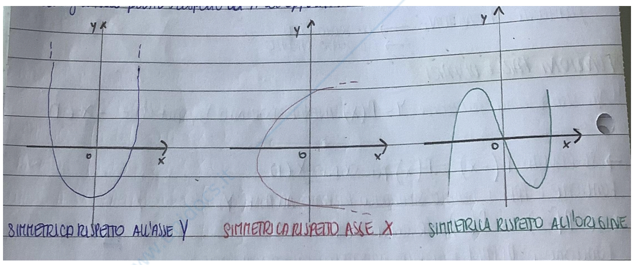
Si chiama intorno sinistro di x_0 di raggio δ l'insieme:

$$I^-_{x_0,\delta} = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - \delta < x < x_0\} = (x_0 - \delta, x_0)$$

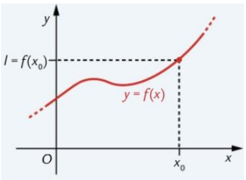
Infine si chiama intorno bucato di x_0 di raggio δ l'insieme:

$$I_{x_0,\delta} \setminus \{x_0\} = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| < \delta\} = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$$

Una figura si dice che è **simmetrica rispetto alla retta r** se il simmetrico di ogni suo punto rispetto ad A le appartiene.



FUNZIONE CONTINUA



Definizione

Una funzione f, definita in un intorno (completo) di x_0, si dice **continua** nel punto x_0 quando $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Tutte le funzioni elementari sono continue nei punti dove sono definite.

LIMITI

Si legge: *«il limite della funzione f(x) per x che tende a x0 è l»*→ significa che i valori di f(x) sono vicini quanto si vuole a / pur di prendere valori di x sufficientemente vicini a x0

Definizione

Siano $x_0, l \in \mathbb{R}^*$ e sia $f(x)$ una funzione definita in un intorno di x_0, eccetto al più in x_0. Diremo che la funzione $f(x)$ tende a l quando x tende a x_0 e scriveremo che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

se è verificata la seguente condizione:

a. per ogni intorno U di l (**Fig. 13a**)
b. esiste un intorno V di x_0 (**Fig. 13b**)
c. tale che per ogni $x \in V$, con $x \neq x_0$, risulta $f(x) \in U$ (**Fig. 13c**)

LIMITE DESTRO E SINISTRO

Definizione

Diciamo che una funzione $f(x)$ ammette **limite destro** $l \in \mathbb{R}$ al tendere di x a $x_0 \in \mathbb{R}$ *da destra*, e scriviamo $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$, quando si verifica che:

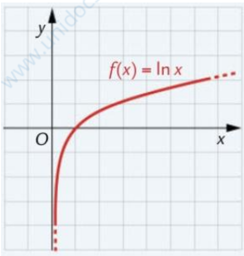
$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 : x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Definizione

Diciamo che una funzione $f(x)$ ammette **limite sinistro** $l \in \mathbb{R}$ al tendere di x a $x_0 \in \mathbb{R}$ *da sinistra*, e scriviamo $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$, quando si verifica che:

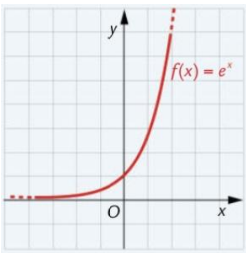
$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 : x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

ASINTOTI



Definizione

Se, al tendere di x a x_0, con $x_0 \in \mathbb{R}$, una funzione tende a $-\infty$ o a $+\infty$ o a ∞, si dice che la retta di equazione $x = x_0$ è un **asintoto verticale** per la funzione (**Figg. 2, 3** e **4**).



Definizione

Se, al tendere di x a $-\infty$ o a $+\infty$ o a ∞, una funzione tende a un numero reale l, si dice che la retta di equazione $y = l$ è un **asintoto orizzontale** per la funzione (**Figg. 7, 8** e **9**).

Se il limite è l solo per x → +∞ si parla di **asintoto orizzontale destro**
Se il limite è l solo per x →-∞ si parla di **asintoto orizzontale sinistro.**
Se infine il limite è l sia per x →-∞ sia per x → +∞ si parla di **asintoto orizzontale bilatero.**