Esponenziali e logaritmi

1 Potenze ad esponente reale

Ricordiamo che per un qualsiasi numero razionale $\frac{m}{n}$ (in cui si può sempre prendere $n > 0$) si pone

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

a patto che a sia un *numero reale positivo*.
Siccome un qualunque numero reale x può essere approssimato tanto bene quanto si vuole tramite numeri razionali q, si riesce a dimostrare che migliorando l'approssimazione q le potenze a^q approssimano a loro volta un ben preciso numero reale, che viene allora indicato con la scrittura a^x. Tale procedimento dà dunque un senso alla potenza

$$a^x \quad \text{con } a > 0 \text{ e } x \text{ reale qualsiasi.}$$

Si tratta in generale un numero irrazionale e quindi determinabile solo approssimativamente (ad esempio da un calcolatore); tuttavia ciò non crea eccessivi problemi nel lavorare con potenze ad esponente reale, in quanto si opera spesso tramite le loro proprietà che ricalcano le usuali proprietà delle potenze: se a, b sono reali positivi ed x, y reali qualsiasi, si ha

- $a^0 = 1 \quad \text{e} \quad a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
- $a^x a^y = a^{x+y} \quad \text{e} \quad \dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $a^x b^x = (ab)^x \quad \text{e} \quad \dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$
- $(a^x)^y = a^{xy}$.

Inoltre, valgono le seguenti ulteriori priopriet\`a.

- **Positività** Per ogni x reale ed $a > 0$, si ha

$$\boxed{a^x > 0.}$$

- **Monotonia** Se è $a > 1$, allora le potenze di a crescono al crescere dell'esponente, ossia

$$x < y \Longleftrightarrow a^x < a^y$$

  mentre se è $0 < a < 1$, allora le potenze di a decrescono al crescere dell'esponente, ossia

$$x < y \Longleftrightarrow a^x > a^y.$$

- **Invertibilità** Per ogni $a > 0$, due potenze di a sono uguali se e solo se sono uguali gli esponenti, cioè

$$a^x = a^y \Longleftrightarrow x = y.$$

M.Guida, S.Rolando, 2008

1.1 Equazioni esponenziali elementari

Per quanto riguarda le *equazioni esponenziali* (cioè in cui l'incognita appare ad esponente), non esiste una metodologia di risoluzione generale, ma la proprietà di invertibilità consente di ricondurre le equazioni che si presentano come uguaglianza di potenze con ugual base (*equazioni esponenziali elementari*) ad equazioni razionali. Uno strumento per la risoluzione di altri casi sarà fornito dai logaritmi e dalle loro proprietà.

Esempio Tramite le proprietà delle potenze e la proprietà di invertibilità, l'equazione esponenziale

$$(3^x : 3)^x = 3^{x+3}$$

si scrive equivalentemente

$$\begin{aligned}\left(\tfrac{3^x}{3}\right)^x &= 3^{x+3}\\ \left(3^{x-1}\right)^x &= 3^{x+3}\\ 3^{(x-1)x} &= 3^{x+3}\\ (x-1)\,x &= x+3.\end{aligned}$$

ed è quindi equivalente all'equazione razionale di secondo grado $x^2 - 2x - 3 = 0$, che ha le soluzioni $x_1 = -1$ ed $x_2 = 3$. □

2 Logaritmi

Dati due numeri reali $b > 0$ e $a > 0$ con $a \neq 1$, si può dimostrare che l'equazione esponenziale $a^x = b$ ammette sempre una ed una sola soluzione; osserviamo che la restrizione $a > 0$ è ovviamente necessaria per dare senso ad a^x, mentre le richieste $b > 0$ ed $a \neq 1$ entrano nel garantire esistenza ed unicità della soluzione[1]. Tale soluzione è detta *logaritmo in base a di b* ed è indicata con la scrittura $\log_a b$, dove b è detto *argomento* del logaritmo. In altri termini, per definizione si ha

$$x = \log_a b \iff a^x = b$$

dove deve essere $a > 0$, $a \neq 1$ e $b > 0$.

Dunque *il logaritmo in base a di b è l'esponente da attribuire alla base a per ottenere l'argomento b.*

Esempi Scrivendo l'argomento come potenza della base, si ottiene subito

- $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$
- $\log_3 \sqrt[7]{9^{10}} = \log_3 \sqrt[7]{3^{20}} = \log_3 3^{\frac{20}{7}} = \frac{20}{7}$
- $\log_{0.1} 0.01 = \log_{\frac{1}{10}} \frac{1}{100} = \log_{\frac{1}{10}} \frac{1}{10^2} = \log_{\frac{1}{10}} \left(\frac{1}{10}\right)^2 = 2.$

[1] infatti per ogni x reale è $a^x > 0$ e $1^x = 1$; quindi $a^x = b \leqslant 0$ sarebbe impossibile, mentre $1^x = b$ sarebbe possibile (ammettendo però infinite soluzioni) solo se $b = 1$

Ricorrendo alla definizione di logaritmo si ha

$$\begin{aligned} x = \log_{\frac{1}{4}} 16 \quad \Leftrightarrow \quad & \left(\tfrac{1}{4}\right)^x = 16 \\ & \left(4^{-1}\right)^x = 16 \\ & 4^{-x} = 4^2 \quad \Leftrightarrow \quad -x = 2 \end{aligned}$$

e dunque $\log_{\frac{1}{4}} 16 = -2$. □

Come conseguenze immediate della definizione di logaritmo, si ricavano le seguenti importanti proprietà.

- Fissato $a > 0, a \neq 1$, si ha

$$\boxed{\log_a a^z = z \quad \text{per ogni } z \text{ reale.}}$$

  In particolare, $\boxed{\log_a a = 1}$ e $\boxed{\log_a 1 = 0}$ (in quanto $\log_a 1 = \log_a a^0$).

- Fissato $a > 0, a \neq 1$, si ha

$$\boxed{a^{\log_a b} = b \quad \text{per ogni } b \text{ reale positivo.}}$$

Fissata una base $a > 0$ con $a \neq 1$, sui numeri reali positivi si è dunque definita una nuova operazione, che a partire dal numero $b > 0$ fornisce il $\log_a b$ come risultato. Tale operazione è detta *estrazione di logaritmo* ed è l'operazione inversa dell'elevamento ad esponente reale, nel senso che fornisce l'esponente data la potenza[2]. Il risultato è in generale un numero irrazionale e quindi determinabile solo approssimativamente (ad esempio da un calcolatore), ma ciò non crea eccessivi problemi nell'operare con i logaritmi in quanto si procede spesso mediante le loro proprietà, che costituiscono una rilettura in termini di logartimi delle proprietà delle potenze: se a, b sono numeri reali positivi diversi da 1 ed x, y reali positivi qualunque, allora

- $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a (x^\alpha) = \alpha \log_a x \quad$ per ogni α reale
- $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a} \quad$ (*cambiamento di base*).

Esempio Se è $x > 0$ (da cui segue anche $x + 1 > 0$), allora

$$\begin{aligned} \log_a (x+1) - \log_a x - 2\log_a 2 &= \log_a (x+1) - \left(\log_a x + \log_a 2^2\right) \\ &= \log_a (x+1) - \log_a 4x = \log_a \tfrac{x+1}{4x} \end{aligned}$$

[2] e ciò non è da confondere con l'estrazione di radice, che, data la potenza, ne fornisce la base

per qualsiasi base $a > 0, a \neq 1$. $\square$

Poiché si è abituati a scrivere i numeri mediante sistema di numerazione decimale, è facile intuire come i logaritmi in base 10 svolgano un ruolo importante in molti contesti. Per ragioni che qui non approfondiamo, come base (per logaritmi e potenze) si è anche portati a privilegiare il numero irrazionale

$$e = 2.7182818284\,59... \quad (\textbf{numero di Nepero}),$$

tanto da riservare al logaritmo in base e il nome di **logaritimo naturale**. In questi casi si usano spesso notazioni abbreviate, scrivendo 'Log' in luogo di '$\log_{10}$' ed 'ln' oppure semplicemente 'log' al posto di '$\log_e$'. Il calcolo dei logaritmi Log ed ln è implementato in ogni calcolatrice scientifica e la proprietà di cambiamento di base consente poi di ricavare il valore (approssimato) del logaritmo in qualsiasi altra base; ad esempio

$$\log_3 17 = \frac{\mathrm{Log}17}{\mathrm{Log}3} \simeq \frac{1.23}{0.477} \simeq 2.578 \quad \text{oppure} \quad \log_3 17 = \frac{\ln 17}{\ln 3} = \frac{2.833}{1.099} \simeq 2.578.$$

Valgono infine le seguenti ulteriori proprietà dei logaritmi in base qualunque.

- **Monotonia** Se è $a > 1$, allora i logaritmi in base a crescono al crescere dell'argomento, ossia

$$0 < x < y \Longleftrightarrow \log_a x < \log_a y$$

  mentre se è $0 < a < 1$, allora i logaritmi in base a decrescono al crescere dell'argomento, ossia

$$0 < x < y \Longleftrightarrow \log_a x > \log_a y.$$

- **Invertibilità** Per ogni $a > 0, a \neq 1$, due logaritmi in base a sono uguali se e solo se sono uguali i loro argomenti, cioè se x e y sono positivi allora

$$\log_a x = \log_a y \Longleftrightarrow x = y.$$

2.1 Equazioni logaritmiche elementari

La proprietà di invertibilità consente subito di risolvere le *equazioni logaritmiche* (cioè in cui l'incognita appare ad argomento di un logaritmo) *elementari* (cioè che si possono scrivere come uguaglianza di logaritmi con ugual base), riconducendole ad equazioni razionali.

Esempio Affinchè l'equazione logaritmica

$$\log_3 x + \log_3 (x - 8) = 2$$

abbia senso, gli argomenti di tutti i logaritmi presenti devono essere positivi ed occorre quindi imporre la condizione

$$\begin{cases} x > 0 \\ x - 8 > 0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\boxed{x > 8.} \qquad (*)$$

Tramite le proprietà dei logaritmi (tra cui la proprietà di invertibilità), dall'equazione segue[3]

$$\begin{aligned} \log_3 [x(x-8)] &= 2 \\ \log_3 (x^2 - 8x) &= \log_3 3^2 \\ x^2 - 8x &= 9 \end{aligned}$$

e le soluzioni dell'equazione logaritmica sono quindi da ricercarsi tra le soluzioni dell'equazione razionale di secondo grado $x^2 - 8x - 9 = 0$, che ha le soluzioni $x_1 = -1$ ed $x_2 = 9$. Tra queste, $x_1 = -1$ va scartata perché non soddisfa la condizione $(*)$ e l'equazione di partenza è dunque risolta solo per $x = 9$. □

3 Altre equazioni logaritmiche ed esponenziali

Come già preannunciato, invertibilità e proprietà dei logaritmi permettono anche di ricondurre ad equazioni razionali quelle equazioni esponenziali che si presentano come uguaglianza tra prodotti di potenze con basi qualsiasi.

Esempio L'equazione esponenziale

$$3^{2x} \cdot 5 \cdot 3^{-x} = 2 \cdot 2^{x-1}$$

può essere subito equivalentemente riscritta

$$\begin{aligned} 5 \cdot 3^{2x-x} &= 2^{1+x-1} \\ 5 \cdot 3^x &= 2^x. \end{aligned}$$

Poiché ambo i membri sono positivi per ogni x, dalla proprietà di invertibilità segue che l'equazione è equivalente a quella ottenuta uguagliando i logaritmi (ad esempio naturali, ma una qualsiasi base farebbe allo scopo) di primo e secondo membro, ossia

$$\ln(5 \cdot 3^x) = \ln 2^x$$

che, applicando le proprietà dei logaritmi, equivale a

$$\begin{aligned} \ln 5 + \ln 3^x &= \ln 2^x \\ \ln 5 + x \ln 3 &= x \ln 2 \\ x \ln 3 - x \ln 2 &= -\ln 5 \\ (\ln 3 - \ln 2)\, x &= -\ln 5 \\ x &= -\tfrac{\ln 5}{\ln 3 - \ln 2}. \end{aligned}$$

L'equazione di partenza è dunque risolta dal numero $-\frac{\ln 5}{\ln 3 - \ln 2} \simeq -3.97$ che, volendo, può anche essere scritto $-\frac{\ln 5}{\ln 3 - \ln 2} = -\frac{\ln 5}{\ln \frac{3}{2}} = \log_{\frac{3}{2}} 5$. □

[3] si noti che $x > 8 \Longrightarrow x^2 - 8x > 0$

Alcune equazioni logaritmiche o esponenziali sono risolubili mediante cambiamento di incognita. Esse si presentano come uguaglianza tra espressioni in cui l'incognita appare solo ad argomento o esponente dello stesso logaritmo o della stessa potenza.

Esempio L'equazione logaritmica

$$\frac{(\ln x)^2 - 1}{1 + \ln x} = 2$$

richiede di imporre la condizione $\boxed{x > 0}$. Ponendo $t = \ln x$, deve essere

$$\frac{t^2-1}{1+t} = 2$$

ossia $\frac{t^2-1}{1+t} - 2 = 0$, $\frac{t^2-2t-3}{1+t} = 0$, $t^2 - 2t - 3 = 0$, che equivale a $t = -1$ oppure $t = 3$. Si tratta allora di risolvere le equazioni logaritmiche elementari

$$\begin{array}{cc} \ln x = -1 & \ln x = 3 \\ x = e^{-1} & x = e^3 \end{array}$$

e l'equazione di partenza ha dunque le soluzioni $x_1 = \frac{1}{e}$ e $x_2 = e^3$, entrambe accettabili (perchè soddisfacenti la condizione di positività imposta). □

Esempio Ponendo $t = e^x$, risulta $e^{4x} = (e^x)^4 = t^4$, $e^{2x} = t^2$ e l'equazione esponenziale

$$\frac{e^{4x} - 4}{e^{2x} + 2} + 1 = 0$$

diventa

$$\begin{aligned} \frac{t^4-4}{t^2+2} + 1 &= 0 \\ \frac{(t^2-2)(t^2+2)}{t^2+2} + 1 &= 0 \\ t^2 - 2 + 1 &= 0 \\ t^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

che ha le soluzioni $t_1 = -1$ e $t_2 = 1$. Si tratta allora di risolvere le equazioni esponenziali elementari

$$\begin{array}{cc} e^x = -1 & e^x = 1 \\ \text{impossibile} & x = 0 \end{array}$$

e l'equazione di partenza ha dunque l'unica soluzione $x = 0$. □

Di fronte ad equazioni esponenziali o logaritmiche per cui le tecniche precedenti non siano applicabili, si cerca di procedere per via grafica o per via numerica, tramite metodi che qui non trattiamo ed accontentandosi in genere di soluzioni approssimate.

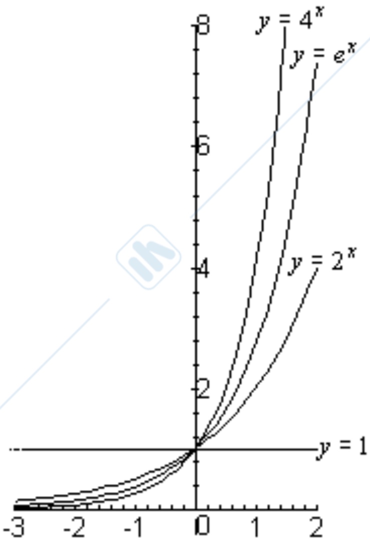
4 Curve esponenziali e curve logaritmiche

Con riferimento alle ben note nozioni di piano cartesiano e luogo geometrico, le operazioni di elevamento ad esponente reale e di estrazione di logaritmo sopra introdotte possono essere usate per individuare particolari curve nel piano.

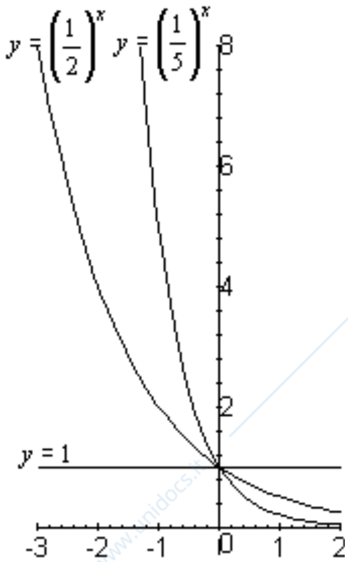
Fissata una base $a > 0$, la curva di equazione

$$y = a^x$$

è detta **curva esponenziale** (**di base** a) ed è costituita da tutti e soli i punti del piano cartesiano le cui coordinate siano del tipo (x, a^x) con x reale qualsiasi. Le ordinate dei punti di una curva esponenziale sono tutte positive (poiché $a^x > 0$) e, viceversa, ogni numero reale *positivo* y è ordinata del punto $(\log_a y, y)$ che sta sulla curva (in quanto $y = a^{\log_a y}$).
Nella seguente figura sono tracciate le curve esponenziali corrispondenti a diversi valori dalla base a.



$y = a^x$ con $a \geq 1$



$y = a^x$ con $0 < a \leq 1$

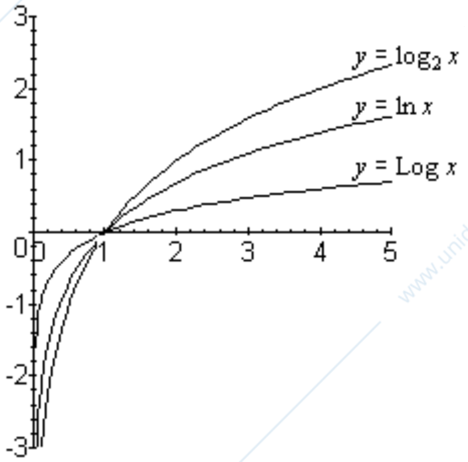
Si noti che ad ogni x reale corrisponde uno ed un solo punto (x, a^x) sulla curva esponenziale di base a. Si osservi poi che la proprietà di monotonia sopra citata si riflette nel fatto che l'ordinata di un punto che si muova su una curva esponenziale nel verso delle ascisse crescenti (ossia "da sinistra a destra") aumenta se $a > 1$ e diminuisce se $0 < a < 1$. Inoltre, essendo $1^x = 1$ per ogni x, la curva esponenziale di base $a = 1$ si riduce alla retta $y = 1$. Infine, *tutte le curve esponenziali passano per il punto di coordinate* $(0, 1)$, in quanto $a^0 = 1$ per ogni base a.

Fissata una base $a > 0$ con $a \neq 1$, la curva di equazione

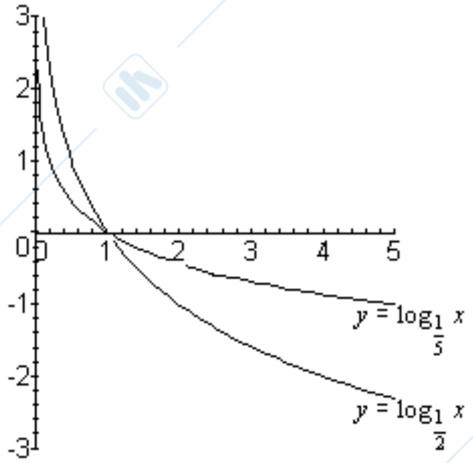
$$y = \log_a x$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

è detta **curva logaritmica** (**di base** a) ed è costituita da tutti e soli i punti del piano cartesiano le cui coordinate siano del tipo $(x, \log_a x)$ con x reale *positivo* (altrimenti $\log_a x$ non avrebbe senso). Si noti che ogni numero reale y è ordinata del punto (a^y, y) che sta sulla curva (in quanto $y = \log_a a^y$).
Nella seguente figura sono tracciate le curve logaritmiche corrispondenti a diversi valori dalla base a.



$y = \log_a x$ con $a > 1$



$y = \log_a x$ con $0 < a < 1$

Si noti che ad ogni x reale positivo corrisponde uno ed un solo punto $(x, \log_a x)$ sulla curva logaritmica di base a. Si osservi inoltre che la proprietà di monotonia sopra citata si riflette nel fatto che l'ordinata di un punto che si muova su una curva logaritmica nel verso delle ascisse crescenti (ossia "da sinistra a destra") aumenta se $a > 1$ e diminuisce se $0 < a < 1$. Infine, *tutte le curve logaritmiche passano per il punto di coordinate* $(1, 0)$, in quanto $\log_a 1 = 0$ per ogni base a.

Esercizi

1. *Risolvere le seguenti equazioni esponenziali:*
   - $\left(2 \cdot 2^{x-4}\right)^x = 4^{-x}$ $[x_1 = 0; x_2 = 1]$
   - $\frac{1}{4^x} = \sqrt{2}$ $[x = -\frac{1}{4}]$
   - $10^x = -2$ [impossibile]
   - $\left(4^{3-x}\right)^{2-x} = 1$ $[x_1 = 2; x_2 = 3]$
   - $3^{\sqrt{x}} = 243$ $[x = 25]$

2. *Calcolare i seguenti logaritmi:*
   - $\log_2 \frac{1}{16} = ...$ $[-4]$
   - $\log_{\frac{1}{9}} \sqrt{27} = ...$ $[-\frac{3}{4}]$
   - $e^{\ln 3} = ...$ $[3]$
   - $2\ln(-2) = ...$ [non esiste]

   Si ricordi che la proprietà $\alpha \log_a x = \log_a x^\alpha$ è applicabile solo quando l'argomento x è un numero positivo.

3. *Determinare x tale che* $\log_2 \sqrt{x} = \frac{1}{2}$. $[x = 2]$

4. *Sapendo che è $x > 0$, ridurre ad un unico logaritmo le espressioni*
   - $\log_2 5 + 5\log_2 x - 3\log_2 2x$ $\left[\log_2 \frac{5}{8}x^2\right]$
   - $2\ln x - \ln\left(x^2 + x\right) + \ln(x+1)$. $[\ln x]$

5. *Risolvere l'equazione* $\log_3 x - \log_3 (x-1) = 2$. $\left[x = \frac{9}{8}\right]$

6. *Risolvere l'equazione* $\log\left[(5 - 2^x)(7 - 2^x)\right] = \log 3$.

   Eliminati i logaritmi, si ponga $2^x = t$. $[x_1 = 2; x_2 = 3]$

7. *Risolvere le equazioni*
   - $3^{2x} = 2^{3x}$ $[x = 0]$
   - $(\log_2 x)^2 = 1$ $\left[x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = 2\right]$
   - $e^x e^x - 2e^x + 1 = 0$. $[x = 0]$