Prof Camere

$\inf(E) = -\infty$, $\nexists \min(E)$

$\sup(E) = \log_3 5$, $\nexists \max(E)$

8-10

1. I NUMERI COMPLESSI

In $\mathbb{R}$ non so risolvere $x^2 = -1$

Def.: Si definisce l'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ come l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali

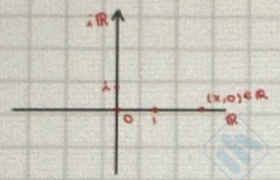
$$\mathbb{C} := \{(a,b) \,/\, a,b \in \mathbb{R}\} \underset{\text{come insiemi}}{=} \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

- La somma di $(a,b), (c,d) \in \mathbb{C}$ e'
  $$(a,b) + (c,d) := (a+c, b-d) \in \mathbb{C}$$
- Il prodotto di $(a,b), (c,d) \in \mathbb{C}$ e'
  $$(a,b) \underset{\mathbb{C}}{\cdot} (c,d) := (\underset{\mathbb{R}}{ab} - bd, ad + bc) \in \mathbb{C}$$

NOTAZIONI:
- $0 := (0,0)$ e' l'elemento neutro di $+$ in $\mathbb{C}$
- $1 := (1,0)$ e' l'elemento neutro di $\cdot$ in $\mathbb{C}$

OSS.: i numeri reali $x \in \mathbb{R}$ sono i numeri complessi della forma $(x,0) \in \mathbb{C}$
in particolare, $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

PIANO DI ARGAND-GAUSS



Poniamo per definizione $i = (0,1)$. Tutti i numeri complessi della forma $(0,y) \in \mathbb{C}$ sono numeri immaginari e il loro sottoinsieme si indica a volte $i\mathbb{R}$

es. $(0,y) = (0,1) \cdot (y,0)$ (verificare $=$).

Lemma. $i^2 = -1$

Dim.: $i^2 = i \cdot i = (0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) (= -1)$

Quindi i e' la soluzione di $x^2 = -1$ (così come $-i$)

1.1. FORMA ALGEBRICA

notazione: $a + ib := (a,b) \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$

es. Verificare che $(a,0) + i(b,0) = (a,b) \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$

Def.: $a + ib$ si dice forma algebrica di $(a,b) \in \mathbb{C}$

oss.: $(a+ib)(c+id) = ac + iad + ibc + i^2 bd \underset{i^2=-1}{=}$

$= ac + iad + ibc - bd = \underbrace{ac - bd}_{\in \mathbb{R}} + i\underbrace{(ad + bc)}_{\in \mathbb{R}}$ (da cui la regola del in $\cdot \mathbb{C}$).

Def.: Dato $z \in \mathbb{C}$ qualsiasi, dati $a,b \in \mathbb{R}$ tc $z = a + ib$, la parte reale di $z \in \mathbb{C}$ e' $\mathrm{Re}(z) := a \in \mathbb{R}$

Quindi $z = (\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$

Teo.: $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ così definiti sono un campo

es.: Verificare che valgono le proprieta' elencate nel def. di campo

oss.: non esiste una relazione d'ordine totale $\leq$ su $\mathbb{C}$ compatibile con $\leq$ su $\mathbb{R}$ e con la struttura di campo: dovrei saper confronta[re]
se per assurdo $i \leq 0 \Rightarrow$ moltiplicando per i dovrei avere $i^2 \geq 0 \cdot i = 0$, ma $i^2 = -1 \leq 0$, assurdo.