EQUAZIONE DIFFERENZIALE: $G(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{k}(x)) = 0$

↳ integrale **GENERALE**: soluzione formata da famiglia di $f(x)$ dipendenti da delle costanti

↳ integrale **PARTICOLARE**: soluzione che soddisfa delle condizioni

↳ integrale **SINGOLARE**: soluzione non contenuta nell'integrale generale per nessuna c

TIPOLOGIE

* a VARIABILI SEPARABILI

EQUAZIONE: $y'(x) = f(x) \cdot g(y)$, con $g(y) \neq 0$

SOLUZIONE: $\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx$

↳ quando porto $g(y)$ a denominatore controllo se c'è integrale singolare

* LINEARI di PRIMO ORDINE

a) OMOGENEE

EQUAZIONE: $y'(x) + a(x) y(x) = 0$

SOLUZIONE: $y(x) = c e^{\left(-\int a(x) dx\right)}$

b) NON OMOGENEE

EQUAZIONE: $y'(x) + a(x) y(x) = f(x)$

SOLUZIONE: $y(x) = c e^{\left(-\int a(x) dx\right)} + \left[e^{\left(-\int a(x) dx\right)} \cdot \int f(x) \cdot e^{\left(\int a(x) dx\right)} dx \right]$

↳ è la somma tra la soluzione dell'omogenea e l'integrale particolare

* LINEARI di SECONDO ORDINE a COEFFICIENTI COSTANTI

a) OMOGENEE

EQUAZIONE: $y''(x) + a y'(x) + b y(x) = 0 \Rightarrow$ eq. CARATTERISTICA: $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

SOLUZIONE: dipende dal Δ dell'eq. caratteristica

- $\Delta > 0$ $\quad y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$
- $\Delta = 0$ $\quad y(x) = c_1 e^{\lambda x} + x c_2 e^{\lambda x}$
- $\Delta < 0$ $\quad y(x) = e^{2x} (c_1 \cos\beta x + c_2 \sin \beta x)$

b) NON OMOGENEE

EQUAZIONE: $y''(x) + a\,y'(x) + b\,y(x) = f(x)$

SOLUZIONE: dipende dal tipo di $f(x)$ a secondo membro, sulla base del quale calcolo l'integrale particolare a cui sommo l'integrale dell'omogenea associata

- $f(x) = p(x)$ di grado n
  - ✓ $b \neq 0$, $\bar{y}(x)$ è polinomio di grado n: $y(x) =$ omogenea $+ \alpha x^2 + \beta x + \gamma$
  - ✓ $b = 0$, $\bar{y}(x)$ è polinomio di grado $n+1$: $y(x) =$ omogenea $+ \alpha x^{n+1} + \beta x^{n} + \gamma x^{n-1} + \delta x^{(n-1 \dots 0)}$
    (NON $\beta x + \gamma$, quello è grado n)

- $f(x) = e^{\gamma x}$
  - ✓ $e^{\gamma x}$ NON soluzione omogenea: $y(x) =$ omogenea $+ c\,e^{\gamma x}$
  - ✓ $e^{\gamma x}$ SOLUZIONE omogenea: $y(x) =$ omogenea $+ c\,x\,e^{\gamma x}$

- $f(x) = \cos x + \sin x$
  - ✓ $\alpha \pm \beta i$ NON soluzione omogenea: $y(x) =$ omogenea $+ \underbrace{e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)}_{\text{avrò solo sin o cos, uno verrà perso nello svolgimento}}$
  - ✓ $\alpha \pm \beta i$ SOLUZIONE omogenea: $y(x) =$ omogenea $+ \underbrace{x\,e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)}_{\text{avrò solo sin o cos, uno verrà perso nello svolgimento}}$

METODO VARIAZIONE delle COSTANTI

posso calcolare l'integrale particolare di una lineare di II ordine, per una qualsiasi $f(x)$ a secondo membro:

$$\begin{cases} C_1'(x)\,y_1(x) + C_2'(x)\,y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)\,y_1'(x) + C_2'(x)\,y_2'(x) = f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1' = \dfrac{-y_2 f(x)}{y_1 y_2' - y_1' y_2} \\[2ex] c_2' = \dfrac{y_1 f(x)}{y_1 y_2' - y_1' y_2} \end{cases}$$

$y(x) =$ omogenea $+ c_1 y_1 + c_2 y_2$