Istituzioni di Matematiche

Esercizio 1: Si consideri il sistema

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + y = 2 \\ x - z = -1 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

(1) Si scrivano le matrici incompleta A e completa $A' = (A|B)$ associate al sistema e se ne calcoli la caratteristica. Si dica se il sistema ha soluzione, e si risolva.
(2) Si dica cosa rappresenta geometricamente l'insieme delle soluzioni, che chiamiamo r. Si verifichi che il punto $Q = (1, 1, 2)$ appartiene ad r.
(3) Si scriva l'equazione del piano π ortogonale a r e passante per l'origine, e si determini il punto P di intersezione tra π e r.
(4) Si calcoli l'area del triangolo di vertici P, Q, O.

Esercizio 1: In $\mathbb{R}^3$, si considerino il punto $P = (-6, 1, 3)$, il piano $\sigma : x + y + 2z = 0$ e la retta

$$r : \begin{cases} x + 2y + z = 11 \\ -x - y + z = -3 \end{cases}$$

(1) Si scriva un'equazione parametrica per r.
(2) Si individui con un'equazione il piano π passante per P e ortogonale a r.
(3) Si verifichi se $P \in r$ e, in caso contrario, si determini la proiezione ortogonale H di P su r.
(4) Si stabilisca se i piani π e σ sono coincidenti, paralleli o incidenti. Se sono incidenti, si calcoli il coseno dell'angolo acuto fra i due piani.

Esercizio 1: Si considerino i punti $A = (0, -1, 2)$, $B = (1, -1, 3)$ e la retta

$$r : \begin{cases} x - y + 4z = 3 \\ x + z = 2 \end{cases}$$

(1) Si scriva l'equazione parametrica della retta r.
(2) Si scriva l'equazione della retta s passante per A e B.
(3) Si verifichi che r e s si intersecano in un punto P.
(4) Si determini il punto C in modo tale che P sia punto medio del segmento AC e si calcoli la lunghezza del segmento AC.
(5) Si individuino il piano σ perpendicolare a r passante per A e il piano π perpendicolare a s e passante per B.
(6) Si determini il coseno dell'angolo tra i piani σ e π.

Esercizio 1: Si consideri la retta r di equazioni cartesiane

$$r : \quad \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

e il piano di equazione

$$\pi : \quad x + 2y - z = 1$$

.

(1) Si scriva l'equazione parametrica della retta r;
(2) Si verifichi che r e π si intersecano in un punto P e si calcolino le coordinate di P;
(3) Si dica se il punto $A = (-1, 0, 1)$ appartiene alla retta r;
(4) Si determinino le equazioni cartesiane della retta s passante per A e perpendicolare al piano π;
(5) Si determini la proiezione ortogonale H del punto A sul piano π;
(6) Si determini l'equazione del piano contenente il triangolo di vertici A, P, H;

(7) Si determini l'area del triangolo di vertici A, P, H.

Esercizio 1: Si considerino i punti

$$A = (1, -2, 3), \quad B = (0, 1, 3), \quad C = (2, 1, -1)$$

(1) Si scriva l'equazione la retta r passante per i punti A e B.
(2) Si scriva l'equazione del piano π passante per il punto C e perpendicolare alla retta di direzione $(-1, 3, 0)$.
(3) Si determini la proiezione ortogonale del punto C sulla retta r.
(4) Si calcoli la distanza del punto C dalla retta r.
(5) Si consideri il triangolo di vertici A, B e C e si calcoli il coseno dell'angolo ϑ di vertice A.

Esercizio 1: Nello spazio euclideo tridimensionale $\mathbb{R}^3$, si consideri la retta r di equazione Cartesiana

$$\begin{cases} x + y - 2z + 2 = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

e si considerino i punti

$$A = (1, 0, 1), \quad B = (-1, 1, 3).$$

(1) Si scriva l'equazione parametrica della retta r.
(2) Si determini se A appartiene alla retta r. In caso di risposta negativa, si scriva l'equazione del piano π ortogonale ad r e passante per il punto A.
(3) Si determini la proiezione ortogonale del punto A sulla retta r.
(4) Si calcoli l'area del triangolo di vertici A, B, H.
(5) Si determini l'equazione della retta s passante per A e per B.
(6) Si calcoli il coseno dell'angolo acuto individuato dalle rette r ed s.

Esercizio 1: Nello spazio Euclideo tridimensionale $\mathbb{R}^3$, si consideri la retta r di equazione Cartesiana

$$\begin{cases} x + y - 2z + 2 = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

e si considerino i punti

$$A = (1, 0, 1), \quad B = (-1, 1, 3).$$

(1) Si scriva l'equazione parametrica della retta r.
(2) Dopo aver verificato che A non appartiene alla retta r scrivere l'equazione del piano π ortogonale ad r e passante per il punto A.
(3) Si determini la proiezione ortogonale H del punto A sulla retta r.
(4) Si calcoli l'area del triangolo di vertici A, B, H.
(5) Si determini l'equazione della retta s passante per A e per B.
(6) Si calcoli il coseno dell'angolo acuto individuato dalle rette r ed s.

Esercizio 1: Si considerino i punti $A = (-2, 0, 2)$, $B = (0, -1, 1)$ e il piano π di equazione $-x + z - 1 = 0$.

(1) Si dica se A e B appartengono a π e si scriva l'equazione della retta s_1 passante per A e B.
(2) Si determini il seno dell'angolo tra s_1 e π.
(3) Si scriva l'equazione della retta r passante per A e perpendicolare a π; si trovi la proiezione ortogonale H di A su π.
(4) Si determini il punto C in modo tale che H sia punto medio del segmento AC e si scriva l'equazione della retta s_2 passante per B e C.
(5) Si determini il coseno dell'angolo tra r e s_2.
(6) Si determini il luogo geometrico dei punti equidistanti da A e da C.

Esercizio 1: In $\mathbb{R}^3$, si considerino il punto $P = (-6, 1, 3)$, il piano $\sigma : x + y + 2z = 0$ e la retta

$$r : \begin{cases} x + 2y + z = 11 \\ -x - y + z = -3 \end{cases}$$

(1) Si scriva un'equazione parametrica per r.
(2) Scrivere un'equazione del piano π passante per P e ortogonale a r.
(3) Si verifichi che $P \notin r$ e si determini la proiezione ortogonale H di P su r.
(4) Si stabilisca se i piani π e σ sono coincidenti, paralleli o incidenti. Si calcoli il coseno dell'angolo acuto fra i due piani.

Esercizio 1: In $\mathbb{R}^3$, si considerino il punto $A = (0, 0, 1)$ e la retta

$$r : \begin{cases} x - 4y + z = 11 \\ 4x + 6y - 7z = 0 \end{cases}$$

(1) Scrivere un'equazione parametrica per r.
(2) Scrivere un'equazione del piano π passante per A e ortogonale a r.
(3) Determinare la proiezione ortogonale H di A su r.
(4) Determinare i punti B e C su r tali che ABC sia un triangolo equilatero.

Esercizio 2: Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

e siano $\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C$ i tre endomorfismi di $\mathbb{R}^3$ definiti da $\varphi_A(X) = AX, \varphi_B(X) = BX, \varphi_C(X) = CX$ per ogni vettore colonna $X \in \mathbb{R}^3$.

(1) Si determini la dimensione del nucleo e dell'immagine di ciascuno degli endomorfismi $\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C$.
(2) Si dica, motivando la risposta, quali tra le matrici A, B, C sono diagonalizzabili.

Esercizio 2: Si consideri l'endomorfismo L di $\mathbb{R}^3$ così definito:

$$L(x, y, z) = (x, x + 2y, x + 2y + 2z) .$$

(1) Si scriva la matrice associata a L rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
(2) Si calcolino le dimensioni di $\operatorname{Im} L$ e di $\ker L$ e si determini se L è un isomorfismo.
(3) Si calcolino gli autovalori e gli autovettori di L e si determini se L è diagonalizzabile.

Esercizio 2: Si consideri l'endomorfismo L di $\mathbb{R}^3$ così definito:

$$L(x, y, z) = (x + y + z, 3x, x + 2y) .$$

(1) Si scriva la matrice associata ad L rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$;
(2) Si determinino la dimensione di $\operatorname{Im} L$ e di $\ker L$;
(3) Si determinino gli autovalori e gli autovettori di L e si dica se L è diagonalizzabile.

Esercizio 2: Si consideri l'endomorfismo L di $\mathbb{R}^3$ così definito:

$$L(x, y, z) = (2x, x + y, x + y + z) .$$

(1) Si scriva la matrice associata ad L rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
(2) Si determinino la dimensione, una base, e l'equazione cartesiana di $\operatorname{Im} L$ e di $\ker L$.
(3) Si determinino gli autovalori, gli autovettori, e si dica se L è diagonalizzabile.

Esercizio 2: Si consideri la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Si calcoli il determinante di M.
(2) Si calcolino gli autovalori di M.
(3) Si dica se M è diagonalizzabile.
(4) Si determini una base ortogonale di autovettori di M.

Esercizio 2: Si consideri l'endomorfismo Φ di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice rispetto alla base canonica è

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) Si determinino le dimensioni, una base e le equazioni cartesiane di $\mathrm{Im}\Phi$ e di $\mathrm{Ker}\Phi$.
(2) Si calcolino gli autovalori e gli autospazi di M.
(3) Si dica se M è diagonalizzabile.

Esercizio 2: Si consideri l'endomorfismo Φ di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice rispetto alla base canonica è

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(1) Si determinino le dimensioni, una base e le equazioni cartesiane di $\mathrm{Im}\Phi$ e di $\mathrm{Ker}\Phi$.
(2) Si calcolino gli autovalori e gli autospazi di M.
(3) Si dica se M è diagonalizzabile.

Esercizio 2: Si consideri l'endomorfismo Φ di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice rispetto alla base canonica è

$$M = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

(1) Si determinino le dimensioni di $\mathrm{Im}\Phi$ e di $\mathrm{Ker}\Phi$.
(2) Si calcolino gli autovalori e gli autospazi di M.
(3) Si dica se M è diagonalizzabile.

Esercizio 2: Si consideri l'endomorfismo L di $\mathbb{R}^3$ così definito:

$$L(x, y, z) = (2x + y, x + 2y + z, x - y - z)\ .$$

(1) Si scriva la matrice associata a L rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
(2) Si determinino la dimensione, una base e l'equazione cartesiana di $\mathrm{Im}\, L$ e di $\ker L$.
(3) Si determinino gli autovalori, gli autovettori e si dica se L è diagonalizzabile.

Esercizio 2: Si consideri la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Si calcoli il determinante di M.
(2) Si calcolino gli autovalori di M.
(3) Si dica se M è diagonalizzabile.
(4) Si dica se esiste una base ortogonale di autovettori di M, ed in caso affermativo, la si calcoli.

Esercizio 3: Studiare la funzione

$$f(x) = \ln\left(x^2 - 5x - 6\right),$$

in particolare:

(1) Determinare il dominio di f e dire se f è continua;
(2) Calcolare $\lim_{x\to-\infty} f(x)$,$\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-1^-} f(x)$, $\lim_{x\to 6^+} f(x)$;
(3) Dire se f è limitata e se il grafico di f ha asintoti;

(4) Calcolare la derivata $f'(x)$ e determinare su quali intervalli f è crescente o decrescente;
(5) Calcolare la derivata seconda $f''(x)$, determinare su quali intervalli f è concava o convessa;
(6) Tracciare il grafico di f.

Esercizio 3: Si consideri la funzione $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = e^x(\sin(x) + \cos(x)) .$$

(1) Si provi che f è continua e si calcolino $f(0)$ e $f(\pi)$.
(2) Si individuino gli intervalli su cui f è crescente o decrescente, oltre che i punti di minimo e di massimo assoluto e i valori minimo e massimo di f.
(3) Si individuino gli intervalli su cui f è convessa o concava e gli eventuali punti di flesso.
(4) Per $x_0 = \frac{3}{4}\pi$, si calcolino $f(x_0)$ e $f'(x_0)$ e si scriva l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$.

Esercizio 3: Studiare la funzione

$$f(x) = (x + 2)^2 e^{-3x},$$

in particolare:

(1) determinare il dominio di f dire se f è continua;
(2) dire se f è limitata e se il grafico di f ha asintoti;
(3) calcolare la derivata $f'(x)$ e determinare su quali intervalli f è crescente o decrescente e gli eventuali punti di massimo e minimo relativi;
(4) calcolare la derivata seconda $f''(x)$ e determinare su quali intervalli f è concava o convessa e gli eventuali punti di flesso
(5) tracciare il grafico di f.

Esercizio 3: Studiare la funzione

$$f(x) = \ln\left(x(x^2 - 3)\right) ,$$

in particolare:

(1) determinare il dominio di f dire se f è continua;
(2) dire se f è limitata e se il grafico di f ha asintoti;
(3) calcolare la derivata $f'(x)$ e determinare su quali intervalli f è crescente o decrescente e gli eventuali punti di massimo e minimo relativi;
(4) calcolare la derivata seconda $f''(x)$ e determinare su quali intervalli f è concava o convessa e gli eventuali punti di flesso
(5) tracciare il grafico di f.

Esercizio 3: Studiare la funzione

$$f(x) = \ln\left(\frac{2x + 1}{x - 3}\right),$$

in particolare:

(1) determinare il dominio di f dire se f è continua;
(2) dire se f è limitata e se il grafico di f ha asintoti;
(3) calcolare la derivata $f'(x)$ e determinare su quali intervalli f è crescente o decrescente;
(4) calcolare la derivata seconda $f''(x)$ e determinare su quali intervalli f è concava o convessa
(5) tracciare il grafico di f.

Esercizio 3: Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x^3}{\ln x},$$

in particolare:

(1) Determinare il dominio di f e dire se f è continua.
(2) Dire se f è limitata e se il grafico di f ha asintoti.

(3) Calcolare la derivata $f'(x)$ e trovare gli eventuali punti critici di f.
(4) Determinare su quali intervalli f è crescente o decrescente.
(5) Determinare quali degli eventuali punti critici sono punti di massimo o minimo relativo.
(6) Calcolare la derivata seconda $f''(x)$, determinare su quali intervalli f è concava o convessa e trovare gli eventuali punti di flesso.
(7) Tracciare il grafico di f.

Esercizio 3: Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{4}{x^5} - \frac{5}{x^4},$$

in particolare:

(1) Determinare il dominio di f e dire se f è continua;
(2) Dire se f è limitata e se il grafico di f ha asintoti;
(3) Calcolare la derivata $f'(x)$ e trovare gli eventuali punti critici di f;
(4) Determinare su quali intervalli f è crescente o decrescente;
(5) Determinare quali degli eventuali punti critici sono punti di massimo o minimo relativo;
(6) Calcolare la derivata seconda $f''(x)$, determinare su quali intervalli f è concava o convessa e trovare gli eventuali punti di flesso;
(7) Tracciare il grafico di f.

Esercizio 3: Studiare la funzione

$$f(x) = e^{1/x} - x,$$

in particolare:

(1) determinare il dominio di f dire se f è continua;
(2) dire se f è limitata e se il grafico di f ha asintoti;
(3) calcolare la derivata $f'(x)$ e trovare gli eventuali punti critici di f;
(4) determinare su quali intervalli f è crescente o decrescente;
(5) calcolare la derivata seconda $f''(x)$, determinare su quali intervalli f è concava o convessa e trovare gli eventuali punti di flesso;
(6) tracciare il grafico di f.

Esercizio 4: Si consideri la funzione di due variabili

$$f(x, y) = \frac{x^2 + 2x - 4y^2}{2y}.$$

(1) Si determini il campo di esistenza della funzione f.
(2) Si classifichi la conica curva di livello $f(x, y) = 1$.
(3) Si determinino e si classifichino gli eventuali punti critici di f.
(4) Si determinino i punti di massimo e minimo assoluto di f sul segmento della retta $y = x$ con $x \in [0, 1]$.

Esercizio 4: In $\mathbb{R}^2$, sia C il settore circolare delimitato dal semiasse positivo delle x, dalla retta $y = x$ e dalla circonferenza $x^2 + y^2 = 4$. Si consideri la funzione $f : C \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \frac{x}{1 + y}.$$

(1) Descrivere la linea di livello $f(x, y) = 1$, dire se è una conica ed eventualmente classificarla;.
(2) Si disegni il settore C nel piano $\mathbb{R}^2$ e si determinino due valori a e $b \in \mathbb{R}$ e due funzioni $g_1(y)$ e $g_2(y)$ tali che si possa descrivere C come

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tali che } a \le y \le b \text{ e } g_1(y) \le x \le g_2(y)\}.$$

(3) Si calcoli il volume del solido compreso tra il grafico di f e il piano (x, y).

Esercizio 4: Sia
$$f(x,y) = e^{3x^2-8xy+4y^2}$$
.

(1) Determinare il dominio di f;
(2) Determinare gli eventuali punti critici di f e classificarli;
(3) Descrivere la linea di livello $f(x,y) = e^2$; dire se è una conica ed eventualmente classificarla;
(4) Determinare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(-1,1,f(-1,1))$;
(5) Sia D il triangolo delimitato dalle rette di equazione $y = x$, $x = 1$, $y = 0$, si calcoli l'integrale doppio
$$\iint_D \ln(f(x,y))dxdy.$$

Esercizio 4: Si considerino la funzione di due variabili
$$f(x,y) = \frac{2x^2}{y-3}.$$
e il rettangolo $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 2\}$.

(1) Si determini il campo di esistenza della funzione f e si verifichi che esso contiene R.
(2) Descrivere la linea di livello $f(x,y) = 2$, dire se è una conica ed eventualmente classificarla;.
(3) Si calcolino le derivate parziali e la matrice hessiana di f, e si determinino gli eventuali punti critici di f.
(4) Si descriva la linea di livello 3.
(5) Si calcoli l'integrale doppio $\iint_R f(x,y)dxdy$.

Esercizio 4: Sia $f(x,y) = 4x^2 + 8xy + 3y^2 + 2$.

(1) Determinare il dominio di f.
(2) Determinare gli eventuali punti critici di f e classificarli.
(3) Descrivere la linea di livello $f(x,y) = 3$, dire se è una conica ed eventualmente classificarla.
(4) Determinare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(-1,1,f(-1,1))$
(5) Sia T il triangolo delimitato dalle rette $y-2x = 0$, $2x-3y = 0$, $y-1 = 0$; determinare il massimo e il minimo assoluto di f in T.
(6) Calcolare l'integrale doppio $\int\int_T f(x,y)dxdy$.

Esercizio 4: Sia $f(x,y) = \frac{y^2-2}{x}$.

(1) Determinare il dominio di f.
(2) Determinare gli eventuali punti critici di f.
(3) Descrivere la linea di livello $f(x,y) = 3$, dire se è una conica ed eventualmente classificarla.
(4) Determinare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1,1,f(1,1))$
(5) Sia Q il rettangolo di vertici $(1,1),(4,1),(4,2),(1,2)$. Verificare che Q è contenuto nel dominio di f e calcolare l'integrale doppio $\int\int_Q f(x,y)dxdy$.

Esercizio 4: Sia $f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2$.

(1) Determinare gli eventuali punti critici di f.
(2) Descrivere la linea di livello $f(x,y) = 6$, dire se è una conica ed eventualmente classificarla.
(3) Determinare i valori massimi e minimi di f nel quadrato Q di lato 2 centrato nell'origine e con i lati paralleli agli assi cartesiani.
(4) Determinare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1,-1,f(1,-1))$
(5) Calcolare l'integrale doppio $\int\int_Q f(x,y)dxdy$.