

1 Funzioni algebriche fratte

1.1 Esercizio svolto

Determinare il dominio della funzione

$$y =$$

$$x - 1$$

$$x^2 - 11x + 10$$

(generalizzazione) La funzione è del tipo

$$y =$$

$$f(x)$$

$$g(x)$$

con $f(x)$ e $g(x)$ polinomi reali in x . Per determinare il dominio D della funzione bisogna porre

(regola)

$$g(x) \neq 0$$

In questo caso sarà quindi

$$x^2 - 11x + 10 \neq 0 \quad (1)$$

Risolviamo quindi l'inequazione (1)

Calcoliamo prima il discriminante Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 121 - 40 = 81$$

per cui

$$x_1$$

$$= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$=$$

$$\frac{11 \pm \sqrt{81}}{2}$$

$$=$$

$$\frac{11 \pm 9}{2}$$

$$=$$

Le soluzioni dell'inequazione (1) sono

$$x_1 \neq$$

$$\frac{11 - 9}{2}$$

$$=$$

$$\frac{2}{2}$$

$$=$$

$$\frac{2}{2}$$

$$=$$

$$1$$

$$\text{e}$$

$$x_2 \neq$$

$$\frac{11 + 9}{2}$$

$$=$$

$$\frac{20}{2}$$

$$=$$

$$10$$

In conclusione la funzione data è definita per tutti i valori della x ad esclusione dei valori $\{1; 10\}$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1; 10\}$$

una inequazione si risolve come un'equazione

$$2$$

1.2 Esercizio svolto

Determinare il dominio della funzione

$$y =$$

1

 $x -$ x $x^2 + x + 1$

Riduciamo ad un'unica frazione:

 $y =$

1

 $x -$ x $x^2 + x + 1$ $=$ $x^2 + x + 1 - x^2$ $x(x^2 + x + 1)$ $=$ $x + 1$ $x(x^2 + x + 1)$

La funzione si presenta, quindi, nella forma

 $y =$ $x + 1$ $x(x^2 + x + 1)$

(2)

Per determinare il dominio D della funzione (2) bisogna porre il denominatore diverso da zero e studiare l'inequazione che ne deriva. Essendo, in questo caso, il denominatore fattorizzato bisognerebbe porre diverso da zero ciascun fattore:

 $-$ $x \neq 0$ $x^2 + x + 1 \neq 0$

(3)

La prima inequazione della (3) è già risolta, la seconda, avendo il discriminante negativo, è verificata per ogni valore della x , infatti:

 $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$

per cui, essendo l'equazione $x^2 + x + 1 = 0$ impossibile (nel campo dei numeri reali) l'inequazione risulta, invece, sempre verificata

 $S: \forall x \in \mathbb{R}$ In definitiva il dominio D della funzione data è $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

3

1.3 Esercizio svolto

Determinare il dominio della funzione

 $y =$ $x^4 - 1$ $x^3 + x^2 - 10x + 8$

Anche in questo caso bisogna porre il denominatore diverso da zero

 $x^3 + x^2 - 10x + 8 \neq 0$

Utilizzando la regola di Ruffini è possibile scomporre il polinomio di terzo grado nel prodotto dei due fattori

 $x^3 + x^2 - 10x + 8 = (x - 1)$

⊗

 $x^2 + 2x - 8$ $-$

(Il secondo fattore potrebbe essere scomposto ancora con il metodo di Ruffini)

Il dominio D della funzione si determina ponendo

–

$$x - 1 \neq 0$$

$$x^2 + 2x - 8 \neq 0$$

La prima inequazione dà come risultato

$$x \neq 1 \quad (4)$$

Risolviamo l'inequazione $x^2 + 2x - 8 \neq 0$ utilizzando la formula ridotta

–

$$\Delta = 1 + 8 = 9$$

x_1

$$x_2 \neq -1 \pm 3$$

da cui

$$x_1 \neq -4 \quad (5)$$

$$x_1 \neq 2 \quad (6)$$

La soluzione formata dalle (4), (5) e (6) fornisce anche il dominio della funzione:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -4 \vee x \neq 1 \vee x \neq 2\}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-4, 1, 2\}$$

4

2 Funzioni irrazionali

2.1 Esercizio svolto

Determinare il dominio della funzione

$y =$

$\sqrt{x^2 - 1}$

$$x^2 - 1$$

(generalizzazione) La funzione è del tipo

$y =$

$\sqrt{f(x)}$

$f(x)$

Per determinare il dominio della funzione è necessario studiare la disequazione (regola)

$$g(x) \geq 0$$

La soluzione di tale disequazione fornisce il dominio della funzione data

Nel nostro caso bisogna studiare la disequazione

$$x^2 - 1 \geq 0 \quad (7)$$

È una disequazione di secondo grado la cui equazione associata è pura. Risolviamo l'equazione associata:

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

da cui si ottengono le due soluzioni opposte

$$x = -1$$

$$x = 1$$

Avendo trovato due soluzioni distinte il discriminante è positivo per cui la soluzione della disequazione (7) è data dall'insieme degli intervalli esterni rispetto alle due soluzioni ottenute

$$x \leq x_1 \vee x \geq x_2$$

Nel nostro caso

$$x \leq -1 \vee x \geq 1$$

per cui il dominio della funzione assegnata è

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \vee x \geq 1\}$$

$$D = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$$

5

2.2 Esercizio svolto

Determinare il dominio della funzione

$$y =$$

s

$$x^2 - 4x$$

$$1 - x^2$$

Anche in questo caso, trattandosi di una funzione irrazionale, dovremo porre il radicando maggiore o uguale a zero e studiare la disequazione:

$$x^2 - 4x$$

$$1 - x^2 \geq 0 \quad (8)$$

si tratta di una disequazione fratta da studiare ponendo maggiore o uguale a zero il numeratore (N) e maggiore a zero il denominatore (D) per poi studiare il prodotto dei segni:

$$N \geq 0; x^2 - 4x \geq 0; x(x - 4) \geq 0$$

da cui

$$N_1 \geq 0; x \geq 0$$

$$N_2 \geq 0; x - 4 \geq 0; x \geq 4$$

Studiamo il segno del denominatore:

$$D > 0; 1 - x^2 > 0; x^2 - 1 < 0$$

Dall'equazione associata ricaviamo le due soluzioni (vedi esercizio precedente)

$$x_1 = -1 \text{ e } x_2 = 1, \text{ ma essendo questa volta il verso della disequazione discorde}$$

rispetto al coefficiente di x^2 si avr`a:

$$-1 < x < 1$$

Ricapitolando

$$N_1 \geq 0; x \geq 0$$

$$N_2 \geq 0; x - 4 \geq 0; x \geq 4$$

$$D > 0; -1 < x < 1$$

Non essendoci soluzioni di molteplicit`a pari 2 si avr`a alternanza di segni negli intervalli individuati dalle soluzioni stesse, ed assumendo la frazione valore negativo

per $x = -2$, valore minore della soluzione pi`u piccola, si avr`a la seguente

alternanza dei segni negli intervalli individuati dalle soluzioni:

la frazione

$$x^2 - 4x$$

$$1 - x^2 \text{ assume segno}$$

.....

.....

$$- \text{ se } x \in]-\infty; -1[$$

$$+ \text{ se } x \in]-1; 0[$$

$$- \text{ se } x \in]0; 1[$$

$$+ \text{ se } x \in]1; 4[$$

$$- \text{ se } x \in]4; +\infty[$$

2) ovvero nessun numero compare un numero pari di volte come soluzione

6

Confrontando i segni degli intervalli con il verso della disequazione (8) si pu`o concludere che il dominio della funzione `e:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 0 \vee 1 < x \leq 4\}$$

$$D =]-1; 0] \cup]1; 4]$$

essendo $x = 0$ e $x = 4$ inclusi in quanto soluzioni del numeratore.

Verifichiamolo graficamente

7

2.3 Esercizio svolto

Determinare il dominio della funzione

$y =$

$$\frac{x^3 + 3x - 5}{4x^2 - x - 1}$$

$$\frac{1}{2}$$

1

2

In questo caso bisognerebbe porre

.....

.....

r

$$4x^2 - x - 1$$

1

$$2x - 6 = 0$$

$$4x^2 - x - 1$$

1

2

$$4x^2 - x - 1$$

1

$$2 \geq 0$$

La prima condizione si ha per $4x^2 - x - 1$

1

$2x - 6 = 0$ per cui, confrontandola con la

seconda condizione si ottiene, in definitiva, la sola condizione:

$$4x^2 - x - 1$$

1

2

$$> 0 \quad (9)$$

(generalizzazione) Questa situazione si verifica per ogni funzione del tipo

$y =$

$$f(x) \cdot p$$

$$g(x)$$

(regola) in tal caso `e possibile porre

$$g(x) > 0$$

Risolviamo la (9)

$$\Delta = 1 + 4(4)$$

1

2

$$\Delta = 1 + 8 = 9$$

x_1

,

$x_2 =$

$$1 \pm \sqrt{9}$$

8

Le soluzioni dell'equazione associata alla (9) sono

$$x_1 =$$

$$1 - 3$$

8

$$= -2$$

8

$$= -$$

$$1$$

$$4$$

$$e$$

$$x^2 =$$

$$1 + 3$$

$$8$$

$$=$$

$$4$$

$$8$$

$$=$$

$$1$$

$$2$$

per cui la disequazione (9) ha per soluzione tutte le x appartenenti agli intervalli esterni rispetto a tali soluzioni. Pertanto il dominio della funzione assegnata è

$$D =$$

$$-$$

$$x \in \mathbb{R} \mid x < -$$

$$1$$

$$4 \vee x >$$

$$1$$

$$2$$

$$D =$$

$$-$$

$$-\infty; -$$

$$1$$

$$4$$

$$-$$

$$\cup$$

$$-$$

$$1$$

$$2$$

$$: +\infty$$

$$-$$

$$8$$

3 Funzioni varie

3.1 Esercizio svolto

Determinare il dominio della funzione

$$y = \sqrt{x+2} + \sqrt{1-x}$$

La funzione è somma di due funzioni irrazionali per cui bisogna porre a sistema le condizioni di esistenza delle due radici

$$-$$

$$x + 2 \geq 0$$

$$1 - x \geq 0$$

da cui si ha: _

$$x \geq -2$$

$$x \leq 1$$

Dal grafico del sistema ricaviamo il dominio della funzione

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1\}$$

$$D = [-2; 1]$$

9

3.2 Esercizio svolto

Determinare il dominio della funzione

$$y =$$

$$\sqrt{x^2 - 3}$$

$$x - 5$$

+

$$p$$

$$-x^2 + x + 30$$

In questo caso abbiamo due radici e un termine frazionario. Le tre condizioni vanno messe a sistema:

·

·

$$x^2 - 3 \geq 0$$

$$x - 5 \neq 0$$

$$x^2 - x - 30 \leq 0$$

(10)

Per la seconda radice abbiamo cambiato il segno di tutti i termini e il verso della disequazione. Risolviamo la prima disequazione della (10). Consideriamo l'equazione associata:

$$x^2 - 3 = 0$$

$$x^2 = 3$$

da cui si ottengono le due soluzioni opposte

$$x = -$$

$$\sqrt{3}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1\}$$

$$D = [-2; 1]$$

$$x = \sqrt{3}$$

Avendo trovato due soluzioni distinte il _ associato `e positivo per cui la soluzione della disequazione (10) `e data dall'insieme degli intervalli esterni rispetto alle due soluzioni ottenute

$$x \leq -$$

$$\sqrt{3} \vee x \geq$$

$$\sqrt{3} \quad (11)$$

L'inequazione $x - 5 \neq 0$ ha soluzione

$$x \neq 5 \quad (12)$$

L'ultima disequazione `e di secondo grado completa :

$$\Delta = 1 + 120 = 121$$

$$x_1$$

,

$$x_2 =$$

$$1 \pm \sqrt{121}$$

2

=

$$1 \pm 11$$

2

Le soluzioni dell'equazione associata sono:

$$x_1 =$$

$$1 - 11$$

$$2$$

$$= -10$$

$$2$$

$$= -5$$

e

$$x_2 =$$

$$1 + 11$$

$$2$$

$$=$$

$$12$$

$$2$$

$$= 6$$

$$10$$

La soluzione della disequazione $x_2 - x - 30 \leq 0$ sar`a dunque:

$$-5 \leq x \leq 6 \quad (13)$$

Riportiamo la (10), la 12 e la (13) sul grafico del sistema:

da cui ricaviamo il dominio:

$$D =$$

n

$$x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x \leq -$$

$$\sqrt{3} \vee$$

$$\sqrt{3} \leq x \leq 6 \vee x \neq 5$$

o

$$D =$$

h

$$-5; -$$

$$\sqrt{3}$$

i

u

$$h\sqrt{3}; 5 \cup]5; 6$$

i

11

3.3 Esercizio svolto

Determinare il dominio della funzione

$$y =$$

s

$$x^2 + 2x$$

$$x - 1 -$$

$$1$$

$$\sqrt{x^2 - 1}$$

Impostiamo il sistema ponendo il primo radicando maggiore o uguale a zero e il secondo radicando maggiore di zero (cfr. esercizio 2.3)

$$x^2 + 2x$$

$$x - 1 \geq 0 \quad (A)$$

n

$$x^2 - 1 > 0 \quad (B)$$

Risolviamo prima la disequazione fratta (A):

studiamo il numeratore

$$N \geq 0; x^2 + 2x \geq 0; x(x + 2) \geq 0$$

da cui

$$N_1 \geq 0; x \geq 0$$

$$nN_2 \geq 0; x + 2 \geq 0; x \geq -2$$

Studiamo il denominatore

$$D > 0; x - 1 > 0; x > 1$$

Ponendo i tre risultati sul grafico

otteniamo la soluzione della disequazione (A)

$$-2 \leq x \leq 0 \vee x > 1 \quad (14)$$

Studiamo adesso la disequazione (B)

$$x^2 - 1 > 0$$

la cui soluzione è (cfr. esercizio 2.1

$$x < -1 \vee x > 1 \quad (15)$$

Ponendo le soluzioni (14) e (15) sul grafico del sistema

12

otteniamo il dominio della funzione data:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < -1 \vee x > 1\}$$

$$D = [-2; -1[\cup]1; +\infty[$$

13

4 Esercizi proposti

Determinare il dominio delle seguenti funzioni

1. $y =$

$$x^2 + x^3$$

$$x - 7$$

2. $y =$

$$x^2 + 2x + 1$$

$$x^2 + 6x - 7$$

3. $y =$

$$x^2 + 1$$

$$x(x^2 - 4)$$

4. $y =$

$$1$$

$$x^5 - 4x^4$$

5. $y =$

$$x^2 - 2$$

$$x^2 - 5$$

6. $y =$

$$x + 3$$

$$x^3 - 8x - 19x - 12$$

7. $y =$

$$r$$

$$x - 3$$

$$x + 4$$

8. $y =$

$$\sqrt{2x^2 - 7x - 22}$$

$$4$$

9. $y =$

$$r$$

$$1 +$$

$$1$$

$$x$$

10. $y =$

r

$x^2 - 8$

$x^2 - 4$

11. $y =$

$x^2 - 3x - 3$

$\sqrt{16 - x^2} - 6x$

12. $y = \sqrt{x^2 - x - 12} - \sqrt{2x - x^2}$

13. $y =$

r

$x - 1$

$x^2 - 4$

+

1

$x - 2$

14. $y =$

3

$\sqrt{x^2 - 3} -$

r

$x^2 - 3$

3

15. $y = \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{3 - x^2}$

16. $y =$

\sqrt{x}

$x - 1$

+

$\sqrt{x - 1}$

x

14

5 Soluzioni

Soluzioni degli esercizi proposti

1. $x^6 = 7$

2. $x^6 = -7 \vee x^6 = 1$

3. $x^6 = -2 \vee x^6 = 0 \vee x^6 = 2$

4. $x^6 = 0 \vee x^6 = 4$

5. $x^6 = -\sqrt{5} \vee x^6 = \sqrt{5}$

6. $x^6 = 1 \vee x^6 = 3 \vee x^6 = 4$

7. $x < -4 \vee x \geq 3$

8. $x < -4 \vee x \geq$

11

2

9. $x \leq -2\sqrt{2} \vee -2 < x < 2 \vee x \geq 2\sqrt{2}$

10. $x \leq -1 \vee x > 0$

11. $-8 \leq x \leq 2$

12. \emptyset [nessuna soluzione]

13. $-2 < x \leq 1 \vee x > 2$

14. $x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3}$

15. $-\sqrt{3} \leq x \leq -\sqrt{2} \vee \sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{3}$

16. $x > 1$

15

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari