Esercizi sui vettori

1) Siano $\mathbf{u} = (1, 3, 6)$, $\mathbf{v} = (0, 1, -1)$ e $\mathbf{w} = (-2, 2, 1)$ tre vettori in $\mathbf{R}^3$. Determinare le componenti di ciascuno dei vettori

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}, \quad \mathbf{u}-\mathbf{v}, \quad 5\mathbf{u}-2\mathbf{v}-3\mathbf{w}, \quad -2\mathbf{u}+\frac{1}{2}\mathbf{v}-\mathbf{w}-\mathbf{v}$$

2) Dati $\mathbf{u} = (0, 1, -3)$ e $\mathbf{v} = (1, 2, -2)$, normalizzare i vettori $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}-\mathbf{v}$.

3) Siano $\mathbf{u} = (1, 0, 2)$, $\mathbf{v} = (0, 1, -1)$ e $\mathbf{w} = (-3, -1, 1)$ tre vettori in $\mathbf{R}^3$. Calcolare

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}, \quad \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}, \quad (\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}, \quad (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}),$$

4) Siano $\mathbf{u} = (1, 0, 2)$, $\mathbf{v} = (0, 3, -1)$ e $\mathbf{w} = (2, 2, 1)$, calcolare

$$\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}, \quad \mathbf{v}\wedge\mathbf{w}, \quad \mathbf{u}\wedge(\mathbf{v}+\mathbf{w}), \quad (\mathbf{u}+\mathbf{v})\wedge(\mathbf{u}-\mathbf{v})$$

5) Calcolare il prodotto misto $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ in ciascuno dei seguenti casi:

$$\mathbf{u} = (3, 0, 0), \quad \mathbf{v} = (0, 4, 0), \quad \mathbf{w} = (1, 1, 1)$$
$$\mathbf{u} = (1, -1, 0), \quad \mathbf{v} = (2, 0, 2), \quad \mathbf{w} = (1, -1, 1)$$

6) Dati $\mathbf{u} = (2, 1, -1)$ e $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$, trovare almeno un vettore non nullo $\mathbf{w}$ tale che

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{w} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 0.$$

7) Trovare il coseno dell'angolo che il vettore $\mathbf{v} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1)$ forma con ciascuno degli assi x, y, z.

8) Dati $\mathbf{u} = (4, 1, 3)$, $\mathbf{v} = (1, 2, -2)$, $\mathbf{w} = (2, 1, 2)$ e $\mathbf{x} = (2, -2, -1)$, trovare tutte le coppie di vettori ortogonali.

9) Calcolare l'area del triangolo di vertici $O = (0, 0, 0)$, $A = (2, 1, 3)$, $B = (-1, 1, 2)$.

10) Calcolare il volume del parallelepipedo individuato dai vettori $\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{j}+\mathbf{k}$ e $\mathbf{k}+\mathbf{i}$.

11) Siano $\mathbf{u} = (2, 1, 0)$, $\mathbf{v} = (1, 0, 1)$ e $\mathbf{w} = (1, 1, 1)$; trovare un vettore $\mathbf{x}$ tale che $\mathbf{x}\cdot\mathbf{u} = 1$, $\mathbf{x}\cdot\mathbf{v} = 0$ e $\mathbf{x}\cdot\mathbf{w} = 3$.

12) Dati i vettori $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v} = (2, \frac{1}{2}, -1)$, e $\mathbf{w} = (5, 1, -2)$, dire per quali valori di $m \in \mathbf{R}$ esiste un vettore $\mathbf{x}$ tale che

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = 1, \qquad \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = -1, \qquad \mathbf{x} \cdot \mathbf{w} = m.$$

Per tali valori di m, scrivere la corrispondente espressione di $\mathbf{x}$.

13) Dati $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v} = (2, 1, -1)$ e $\mathbf{w} = (-1, 2, h)$, con $h \in \mathbf{R}$,
   a) determinare h in modo che $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ siano complanari;
   b) determinare h in modo che $|(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}| = \sqrt{89}$.

14) Dati $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} + (a + 2)\mathbf{k}$, e $\mathbf{v} = (3b - 1)\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, con $a, b \in \mathbf{R}$, determinare a e b in modo che $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ siano paralleli.

15) Dati $\mathbf{v} = (1, 0, 1)$ e $\mathbf{w} = (0, 1, 1)$, trovare i vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ ortogonali sia a $\mathbf{v}$ che a $\mathbf{w}$ ed aventi modulo $\sqrt{2}$.

16) Dati $\mathbf{u} = (2, 1, 0)$, $\mathbf{v} = (-1, 1, 1)$, e $\mathbf{w} = (t+3, -t, t-3)$, con $t \in \mathbf{R}$, calcolare il valore di t per cui i tre vettori sono complanari.

17) Siano $\mathbf{u} = (t + 2, -2t, 2t + 1)$, $\mathbf{v} = (0, -1, 1)$ e $\mathbf{w} = (1, -2, 2)$, con $t \in \mathbf{R}$. Calcolato il valore di t per cui $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1$ e sostituitolo in $\mathbf{u}$, verificare che $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ non sono complanari.

18) Dati $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{k}$, determinare $\mathbf{y}$ in modo che sia parallelo al vettore $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \wedge (\mathbf{u} - \mathbf{v})$ e che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \cdot \mathbf{y} = 14$.

19) Dati $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$, determinare $\mathbf{x}$ in modo che

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = 21, \qquad \mathbf{x} \text{ sia ortogonale a } \mathbf{v}, \qquad \mathbf{x} \text{ sia complanare con } \mathbf{v} - \mathbf{u} \text{ e } \mathbf{v} + \mathbf{u}.$$

20) A quale condizione devono soddisfare due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ affinchè $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ sia perpendicolare a $\mathbf{x} - \mathbf{y}$? E a quale, affinchè $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| = |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$?