LE MATRICI

Se indichiamo con *n* e *m* due numeri interi positivi, una matrice A con *m* riga e *n* colonna è un insieme di *m x n* elementi a_{ij} con i = 1,…,m, j = 1,…,n, rappresentato dalla tabella

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mm} \end{bmatrix}.$$

Scriveremo A = (a_{ij}). Scriveremo $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ se gli elementi di A sono numeri reali, $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ se invece sono complessi. Se inoltre n = m la matrice si dice *quadrata* di dimensione *n*. Una matrice con una sola colonna viene detta *vettore colonna*, una matrice con una sola riga viene detta vettore riga.

In MAT&OCT per introdurre una matrice è sufficiente digitare negli elementi dalla prima riga all'ultima, introducendo al termine di ogni riga il carattere di separazione ; . Ad esempio, il comando

```
>> A = [1 2 3; 4 5 6]
```

produce

```
A =
   1   2   3
   4   5   6
```

cioè una matrice a 2 righe e 3 colonne dagli elementi indicati. La matrice di dimensione *m x n* con tutti elementi nulli è indicata con 0 e costruita con `zeros(m,n)`. Il comando `eye(m,n)` di MAT OCT cenerai invece una matrice rettangolare i cui elementi sono tutti nulli ad eccezione di quelli della diagonale principale che sono pari a 1. Un caso particolare è il comando `eye(n)`, esso produce una matrice quadrata di dimensione n con elementi diagonali unitari, chiamata matrice *identità* e denotata con I.

Con il comando `A[ ]` sì inizializza una matrice vuota. Sulle matrici possiamo definire alcune operazioni elementari:

1) se A = (a_{ij}) e B = (b_{ij}) sono due matrici *m x n*, allora la *somma* di A con B é la matrice A + B = (a_{ij} + b_{ij});

2) il *prodotto* di una matrice A per un numero λ è la matrice λA = λ(a_{ij});

3) il *prodotto fra due matrici* può essere eseguito soltanto se esse hanno dimensioni compatibili, precisamente se A é una matrice *m x p* e B é *p x n*, per un intero positivo p. La matrice prodotto è in tal caso la matrice

C = A B di dimensione *m x n* di elementi:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}, \; per \; i = 1,\ldots,m, \; j = 1,\ldots,n$$

Riportiamo noi esempio di somma il prodotto di due matrici:

```
>> A = [1 2 3; 4 5 6]
>> B = [7 8 9; 10 11 12]
>> C = [13 14 15; 16 17 18]
>> A + B
ans =
     8     10     12
    14     16     18
>> A + C
ans =
      94     100
     229     244
```

Il tentativo di eseguire operazioni fra matrici di dimensione incompatibile e porta ad un messaggio di errore. Ad esempio, Matlab risponde:

```
>> A + C
??? Error using ==> plus
Matrix dimensions must agree.
>> A + B
??? Error using ==> mtimes
Inner matrix dimensions must agree.
```

ed Octave

```
>> A + C
error: operator +: nonconformant agruments
(opi is 2x3, op2 in 3x2)
>> A*B
error: operator *: nonconformant agruments
(opi is 2x3, op2 in 2x3)
```

Il determinante di una matrice quadrata è un numero definito ricorsivamente come segue (*regola di Laplace*)

$$\det(A) = \begin{cases} a_{11} & \text{se } n = 1, \\ \Sigma \quad \Delta_{ij} \, a_{ij}, & \text{per } n > 1, \; \forall i = 1,\ldots,n \end{cases}$$

$$\det(A) = \begin{cases} a_{11} & \text{se } n = 1, \\ \sum_{j=1}^{n} \Delta_{ij}\, a_{ij}, & \text{per } n > 1,\ \forall i = 1,\dots,n \end{cases}$$

dove $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ e A_{ij} é la matrice che si trova dalla matrice A per soppressione della *i*-esima riga e della *j*-esima colonna. Se $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ si ha $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, mentre se $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ otteniamo $\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{31}a_{12}a_{21} + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{13}a_{22}$. Se $A = B\,C$, allora $\det(A) = \det(B)\det(C)$. Data una matrice quadrata A di dimensione *n*, diciamo che essa è *invertibile* o *non singolare* se esiste unica la matrice $X = A^{-1}$ tale che $AX = XA = I$. A é detta matrice inversa di A. Ricordiamo che la matrice inversa A^{-1} esiste se e solo se il *determinante* di A è non nullo, cioè se i vettori colonna di A sono linearmente indipendenti. Nel caso in cui $\det(A) = 0$ diciamo che A é *singolare*. Il calcolo dell'impresa può essere realizzato attraverso il comando `inv(A)`, mentre per il calcolo del determinante si può usare il comando `det(A)`. Vediamo esempio di inversione di una matrice 2 x 2 e di calcolo del suo determinate:

```
>> A = [1 2; 3 4]
>> inv(A)
ans =
   -2.0000      1.0000
    1.5000     -0.5000
>> det(A)
ans =
   -2
```

Se la matrice è singolare, MAT OCT segnala il problema e restituisce un messaggio diagnostico, seguito da una matrice con elementi uguali a `Inf`, come si vede nel seguente esempio:

```
>> A = [1 2; 0 0]
>> inv(A)
Warning: Matrix is singular go working precision.
ans =
   Inf    Inf
   Inf    Inf
```

Le *matrici diagonali* per le quali cioè gli a_{kk}, con $k = 1,\dots,n$, sono gli unici elementi che possono essere non nulli. Tali elementi formano la cosiddetta diagonale principale della matrice e si ha $\det(A) = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$. Le matrici diagonali sono non singolari se $a_{kk} \neq 0$ per ogni k. In tal caso, l'inversa è ancora una matrice diagonale di elementi a_{kk} . Per la costruzione di una matrice diagonale di dimensione n in MAT&OCT basta digitare il comando diag(v), essendo v un vettore di dimensione n contenente i soli elementi diagonali. Scrivendo invece diag(v,m) si genera una matrice quadrata di dimensione n+abs(m) che presenta l'm-esima sopra-diagonale con elementi uguali a quelli contenuti nel vettore v. Se v[1 2 3] si avrà:

```
>> A=diag(v, -1)
A =
    0    0    0    0
    1    0    0    0
    0    2    0    0
    0    0    3    0
```

Altre matrici per le quali il calcolo determinante è elementare sono quelle *triangolari superiori* o *triangolari inferiori*: una matrice quadrata di dimensione *n* é triangolare inferiore se ha nulli tutti gli elementi che stanno al di sopra della diagonale principale. Il suo determinante è semplicemente il prodotto degli elementi diagonali. Tramite i comandi tril(A) e triu(A), è possibile estrarre dalla matrice A di dimensione n la sua parte triangolare inferiore e superiore, rispettivamente. Le varianti tril(A,m) o triu(A,m), con m che varia tra -n e n, consentono di estrarre le parti triangolari aumentate o diminuite da sopra (o sotto) diagonali. Ad esempio, considerata la matrice A=[3 1 2; -1 3 4; -2 -1 3], con il comando L1=tril(A) troviamo la matrice triangolare inferiore

```
L1 =
    3    0    0
   -1    3    0
   -2   -1    3
```

Sei invece scriviamo L2=tril(A,1), otteniamo la seguente matrice

```
L2 =
    3    1    0
   -1    3    4
   -2   -1    3
```

Un'operazione propria delle matrici è la *trasposizione*: data una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ indichiamo con $A^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$ la matrice trasposta, ottenuta scambiando tra loro le righe con le colonne di A. Quando n = m, se $A = A^T$, allora A é detta *simmetrica*. In MAT&OCT, se A è una matrice reale, A' denota la sua trasposta. Se invece A è una matrice complessa A' è la sua trasposta coniugata (ovvero A^H). Una matrice quadrata complessa A che coincide con la sua trasposta coniugata A è detta *hermitiana*.

I VETTORI

I vettori sono indicati con lettera in grassetto; così **v** denota sempre un vettore colonna, la cui componente *i*-esima verrà indicata con v_i. Se un vettore ha come componenti *n* numeri reali si scriverà semplicemente $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$. Per introdurre un vettore colonna basta riportare fra parentesi quadre i valori delle componenti del vettore stesso separati da un punto e virgola, mentre per un vettore riga è sufficiente riportare i valori separati da spazi bianchi o virgole. Ad esempio, le istruzioni `v=[1;2;3]` e `w=[1 2 3]` inizializzano rispettivamente un vettore colonna ed un vettore riga di dimensione 3. Il comando `zeros(n,1)` produce un vettore colonna di dimensione n con elementi tutti nulli: esso verrà denotato nel testo con 0. Analogamente, il comando `ones(n,1)` genera un vettore colonna con tutte le componenti pari a 1, indicato perciò con 1. Tra i vettori saranno particolarmente importanti e quelli tra loro *linearmente indipendenti*: ricordiamo che un sistema di vettori $\{y_1,\dots,y_m\}$ si dice linearmente indipendente se la relazione

$$\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_m y_m = 0$$

é soddisfatta solo se tutti i coefficienti $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ sono nulli. Un insieme di *n* vettori $B = \{y_1,\dots,y_m\}$ linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^m$ (o $\mathbb{C}^m$) forma una *base* per $\mathbb{R}^m$, gode cioè nella proprietà che è un qualunque vettore **w** di $\mathbb{R}^m$ può essere scritto in modo unico come combinazione lineare dei vettori della base

$$w = \sum_{k=1}^{m} w_k y_k$$

I numeri w_k sono le *componenti* di **w** rispetto alla base *B*. Ad esempio, la base canonica per $\mathbb{R}^m$ è quella costituita dai vettori $\{e_1,\dots,e_n\}$, dove e_i ha la *i*-esima componente pari a 1 e le restanti nulle. Questa non è l'unica $\mathbf{v},\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$, il primo è definito come

$$(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \mathbf{w}^T\mathbf{v} = \sum v_k w_k$$

essendo (v_k) e (w_k) le componenti di v e w, rispettivamente. Il comando corrispondente é `w'*v` o `dot(v,w)`. Per un vettore **v** con componenti complesse, `v'` denota il suo trasposto coniugato **v** ovvero un vettore riga le cui componenti sono i complessi coniugati v_k di v_k. Il modulo di un vettore **v** è allora dato da

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(\mathbf{v},\mathbf{v})} = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} v_k^2}$$

e viene calcolato con il comando `norm(v)`. $\|\mathbf{v}\|$ é anche detta *norma euclidea* del vettore **v**. Il prodotto vettore fra due vettori **v**,**w** $\in \mathbb{R}^m$, é invece dato dal vettore **u** $\in \mathbb{R}^m$ ortogonale sia a **v** che a **w** e di modulo $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|\,\sin(\alpha)$, dove α è il più piccolo dei due angoli individuati dalle direzioni di **v** e **w**. Il comando corrispondente é `cross(v,w)`. La visualizzazione dei vettori in MAT&OCT può essere effettuata con i comandi `quier` per i vettori di $\mathbb{R}^m$ e `quiver3` per quelli di $\mathbb{R}^m$. Nei programmi MAT&OCT che proporremo compariranno delle operazioni fra vettori precedute da un punto, come ad esempio `x.*y`, `x./y` o `x.^2`. In questo modo si segnala all'elaboratore che l'operazione non va eseguita nel senso usuale, bensì componente per componente. Così `x.*y` non è il prodotto scalare fra i vettori **x** e **y** , ma restituisce ancora un vettore con la componente *i*-esima pari a $x_i y_i$. Ad esempio, se definiamo i vettori:

```
>> x = [1; 2; 3;]; y = [4; 5; 6];
```

il prodotto scalare ed il prodotto componente per componente sono dati rispettivamente da:

```
>> y'*x
ans =
    32
>> x.*y
ans =
    4
   10
   18
```

Si noti che il prodotto `y*x` non è neppure definito, non avendo i vettori le dimensioni corrette.