

## Appunti 6 – Matrici quadrate: inversa e determinante (Parte I)

Lo studio delle matrici quadrate è molto ricco, ad esempio, perchè è sempre possibile moltiplicare una matrice quadrata per se stessa ripetutamente. Questa semplice osservazione è alla base della definizione di matrice inversa e di un numero che chiameremo 'determinante' di una matrice quadrata.

**A6.1 Matrici identiche.** Ricordiamo che una matrice si dice *quadrata* se ha lo stesso numero di righe e di colonne. Quindi,  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$  è quadrata se e solo se  $m = n$ .

**Definizione.** Una matrice si dice *diagonale* se tutte le entrate  $a_{ij}$  con  $i \neq j$  sono nulle. Le entrate non nulle, se esistono, devono quindi trovarsi sulla diagonale  $\searrow$  che va da in alto a sinistra a in basso a destra. La matrice  $A$   $n \times n$  tale che

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

si chiama *matrice identica di ordine  $n$*  e si indica con  $I_n$ .

Si verifica facilmente che

**Proposizione.** Se  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$  allora  $I_m A = A = A I_n$ .

Ecco un esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se  $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$  allora sia  $AB$  che  $BA$  sono definite ed hanno taglia  $n \times n$ . Di solito queste matrici non sono uguali e di **prodotto di matrici si dice non commutativa**.

**Esercizio.** Provare con  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  e  $B = A^T$ .

Più sorprendente è il fatto che  $AB$  può essere la matrice nulla anche se sia  $A$  che  $B$  sono non nulle.

**Esercizio.** Calcolare  $AB$  e  $BA$  con  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

Quindi il prodotto di matrici è radicalmente diverso dal prodotto di numeri reali. Bisogna essere molto cauti nel manipolare il prodotto di matrici perchè non tutte le proprietà a cui siamo abituati valgono.

**A6.2 Potenze di matrici.** Possiamo elevare una matrice ad ogni esponente positivo. Ad esempio,  $A^2$  significa semplicemente  $AA$  e

$$A^3 = AAA = A^2A = AA^2.$$

Un'importante proprietà delle potenze di una matrice data è che queste *commutano* tra di loro, cioè l'ordine della moltiplicazione è irrilevante (mentre è fondamentale per matrici

qualunque!):

$$A^m A^n = A^{m+n} = A^n A^m, \quad m, n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Per convenzione, data una matrice  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  poniamo  $A^0 = I_n$ . Possiamo anche definire le potenze negative di una matrice utilizzando la matrice *inversa*, ma questa non sempre esiste. La situazione per  $n = 2$  è descritta nel lemma seguente.

**Lemma.** Sia  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Esiste  $B \in \mathbb{R}^{2,2}$  tale che  $AB = I_2$  se e solo se  $ad - bc \neq 0$ . In questo caso la matrice  $B$  è anche tale che  $BA = I_2$ .

*Dimostrazione.* In questo caso la ricetta è ben nota:

$$B = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Se  $ad - bc \neq 0$  questa matrice soddisfa entrambe le identità richieste. Se  $ad - bc = 0$  allora

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} A = \mathbf{0} \quad (3)$$

è la matrice nulla e questo impedisce l'esistenza di una matrice  $B$  tale che  $AB = I_2$ ; infatti, moltiplicando (??) a destra per  $B$  ci darebbe che  $a, b, c, d$  sono tutti nulli e questo è impossibile. QED

Se  $ad - bc \neq 0$ , allora (??) si dice *inversa* di  $A$  e si denota con  $A^{-1}$ . Più in generale, una matrice quadrata  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  si dice *invertibile* o *non-singolare* se esiste una matrice  $A^{-1}$  tale che  $AA^{-1} = I_n$  o  $A^{-1}A = I_n$ . È un fatto non banale e di rilievo che, in questo caso, la matrice inversa  $A^{-1}$  è l'unica che soddisfa entrambe le equazioni.

**Esercizio.** (i) Se  $A$  è invertibile, allora lo è anche  $A^T$  e risulta che  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .

(ii) Se  $A, B$  sono invertibili allora  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

(iii) Se  $A$  è invertibile e  $n \in \mathbb{N}$  allora  $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ .

L'inversa può essere usata per risolvere equazioni con matrici quadrate. Ad esempio, consideriamo l'equazione

$$AB = C,$$

dove  $A$  è una matrice invertibile e  $C$  è assegnata; vogliamo trovare  $B$ . Usando l'inversa di  $A$ , se questa esiste, otteniamo

$$B = I_n B = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}C.$$

**Esempio.** Vediamo come ricavare l'espressione per  $A^{-1}$  nel caso  $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ . Un calcolo diretto mostra che

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = 0.$$

Assumiamo che esista  $A^{-1}$  e quindi che  $AA^{-1} = I_2$ , allora otteniamo

$$A - (a+d)I_2 + (ad-bc)A^{-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad (ad-bc)A^{-1} = (a+d)I_2 - A.$$

La stessa espressione di  $A^{-1}$  si ottiene assumendo che  $A^{-1}A = I_2$ .

**A6.3 Determinanti.** La quantità  $ad - bc$  si dice *determinante* della matrice  $2 \times 2$   $A$ . Vedremo che è possibile associare ad ogni matrice quadrata in  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  un numero che chiameremo *determinante* e che indicheremo con  $\det A$  o con  $|A|$ . Questo numero è una funzione delle entrate di  $A$  ed è tale che

**Teorema.**  $\det A \neq 0$  se e solo se  $A$  è invertibile.

Ritorniamo su questo risultato più avanti nel corso. Per il momento vediamo come calcolare il determinante nel caso  $n = 3$ . Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Possiamo formare una tabella estesa ricopiando le prime due colonne:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

La formula di *Sarrus* afferma che il determinante di  $A$  è la somma dei prodotti delle entrate sulle tre diagonali discendenti  $\searrow$  a cui si sottraggono quelli sulle tre diagonali ascendenti  $\nearrow$ .

Equivalentemente,

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \quad (4)$$

I tre mini-determinanti sono costruiti dalle ultime due righe di  $A$ .

**Esercizio.** Usare una delle espressioni precedenti per dimostrare le seguenti proprietà del determinante di una matrice  $A 3 \times 3$ :

(i) se una delle righe è moltiplicata per  $c$  allora lo è anche  $\det A$ ,

(ii)  $\det(cA) = c^3 \det A$ ,

(iii) scambiando due righe  $\det A$  cambia segno,

(iv) se una riga è multipla di un'altra allora  $\det A = 0$ ,

(v)  $\det A = \det(A^T)$ , quindi i due punti precedenti si applicano anche alle colonne.

I determinanti delle matrici  $3 \times 3$  possono essere usati per calcolare il prodotto misto.

**Proposizione.** Dati i vettori

$$\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}, \vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}, \text{ e } \vec{w} = w_x \vec{i} + w_y \vec{j} + w_z \vec{k},$$

abbiamo che

$$\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = \det \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix}.$$

**Esercizio.** Provare la proposizione precedente con un calcolo diretto.

Per spiegare come ottenere (??), indichiamo con  $A_{ij} \in \mathbb{R}^{2,2}$  la matrice ottenuta da  $A$  cancellando la riga  $i$  e la colonna  $j$ . Indichiamo con  $\tilde{A}$  la matrice le cui entrate sono

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij}).$$

In parole, la matrice è ottenuta rimpiazzando ogni entrata di  $A$  con il determinante della sua **matrice complementare** e cambiando i segni come nella scacchiera indicata (queste quantità si dicono *complementi algebrici*).

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

La matrice  $\tilde{A}^T$  si chiama *aggiunta di  $A$* .

**Proposizione.**  $A\tilde{A}^T = (\det A)I_n$  e quindi se  $\det A \neq 0$  allora  $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}^T$ .

La proposizione precedente afferma che, se esiste, l'inversa di  $A$  è la matrice aggiunta divisa per il determinante.

*Dimostrazione.* (Idea) Usiamo le proprietà del prodotto misto. Poniamo  $B = A\tilde{A}^T = (b_{ij})$  ed indichiamo con  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ , i vettori che hanno come componenti le entrate della prima, della seconda e della terza riga di  $A$ . Così, ad esempio, abbiamo

$$b_{11} = \vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = \det(A)$$

e

$$b_{12} = \vec{u} \cdot \vec{u} \times \vec{w} = 0.$$

**Esercizio.** Completare la dimostrazione usando le proprietà del prodotto misto.

Notare che il secondo membro di of (??) rappresenta l'entrata in alto a sinistra di  $A\tilde{A}^T$ .

**Esempio.** Per trovare l'inversa di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \\ 13 & 21 & 35 \end{pmatrix},$$

calcoliamo

$$A\tilde{A}^T = A \begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 \\ 7 & 9 & -8 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \\ 13 & 21 & 35 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 7 & -2 \\ -1 & 9 & -2 \\ -2 & -8 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3.$$

Quindi,  $\det A = 2$  e

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{7}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} & -1 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si verifica inoltre che  $A^{-1}A = I_3$ .

### A6.4 Esercizi consigliati.

1. Calcolare i prodotti di matrici:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Sia  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ . Calcolare i prodotti:

$$AB, \quad BA, \quad (BA)^T, \quad (AB)^T, \quad A^T B^T, \quad B^T A^T.$$

3. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Trovare  $a, b, c$  tali che  $AB = I_2$ . Esiste una matrice  $C$  tale che  $CA = I_3$ ?

4. Le matrici  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  soddisfano le equazioni  $AE = EA$ ,  $AE^T = E^T A$ . Dedurre che  $A = aI_2$ .

5. Trovare esempi di matrici  $A, B, C \in \mathbb{R}^{2,2}$  per le quali

- (i)  $A^2 = 0$  and  $A \neq 0$ ,
- (ii)  $B^2 = B$  and  $B \neq I_2$ ,
- (iii)  $C^2 + 2C + I_2 = 0$ .

6. Calcolare le inverse delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per l'ultima è necessario generalizzare il metodo della scacchiera.

7. Sia  $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$  e  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Calcolare le matrici seguenti:

$$AP, \quad P^{-1}, \quad D = P^{-1}AP, \quad PD, \quad AD.$$