

## Fasori spazio-temporali

## 1. Spire efficaci e fasori spazio-temporali

Si consideri l'avvolgimento di fase di fig.1, di una struttura a  $p = 2$  poli ( $n = p/2 = 1$  paio poli): le  $q = 3$  matasse di tale avvolgimento, tutte collegate in serie, siano tutte uguali, uniformemente distribuite, caratterizzate da passo diametrale e formate da  $N_m$  spire.

Indicata con  $i$  la generica corrente circolante nell'avvolgimento (positiva entrante nei lati attivi contrassegnati con + in fig. 1), ciascuna matassa produce una f.m.m. fondamentale di ampiezza  $M_m$  pari a:

$$M_m = (4/\pi) \cdot N_m \cdot i/2 \quad (1)$$

Peraltro, la diversa giacitura delle matasse implica che ognuna produce un fasore spaziale f.m.m.  $\bar{M}_m$  orientato secondo l'asse magnetico della bobina stessa ( $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3$  in fig.1). Il fasore f.m.m. complessivo è la risultante  $\bar{M}_r = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \bar{M}_3$ , ed è orientato perpendicolarmente alla matassa mediana del gruppo di  $q$  matasse (l'asse di  $\bar{M}_r$  è dunque l'asse magnetico dell'avvolgimento).

Per effetto dello spostamento spaziale tra le matasse, e del corrispondente sfasamento tra le f.m.m. di matassa, la risultante ha una ampiezza  $M_r$  inferiore alla somma delle componenti  $M_1 + M_2 + M_3$ .

Si definisce fattore di avvolgimento il rapporto:

$$f_a = M_r / (q \cdot M_m) \quad (2)$$

Evidentemente per un avvolgimento distribuito risulta  $f_a < 1$ .

Ricavando  $M_r$  da (2) e inserendo la (1) si ottiene:

$$M_r = f_a \cdot q \cdot M_m = f_a \cdot q \cdot (4/\pi) \cdot N_m \cdot i/2 = (4/\pi) \cdot (q \cdot N_m \cdot f_a) \cdot i/2 = (4/\pi) \cdot (N \cdot f_a) \cdot i/2 = (4/\pi) \cdot (N_e) \cdot i/2 = (2/\pi) \cdot (N_e) \cdot i \quad (3)$$

dove  $N = q \cdot N_m$  è il totale numero di spire in serie dell'avvolgimento di fase, mentre  $N_e = f_a \cdot N$  è denominato numero di spire efficaci dell'avvolgimento, perché tiene conto dello sfasamento suddetto, attraverso il fattore di avvolgimento  $f_a$ .

Si consideri ora la struttura trifase simmetrica di fig.2: essa si riferisce ad un paio poli di una struttura con  $n$  paio poli (dunque gli angoli in fig. 2 sono angoli elettrici); inoltre, le matasse mostrate sono rappresentative di avvolgimenti di fase distribuiti, dotati di  $N_{en}$  spire efficaci per paio poli ( $N_{en} = N_e/n$ , con  $N_e$  numero di spire efficaci in serie per fase).

Si sovrapponga al piano di macchina un piano complesso il cui asse reale  $Re$  è orientato come l'asse magnetico della fase A; sulla destra gli avvolgimenti sono mostrati come concentrati ed è evidenziata la congruenza di verso della corrente al morsetto di fase con l'asse della corrispondente f.m.m..

Indicato con

$$\alpha = \exp(j \cdot 2 \cdot \pi/3) = -1/2 + j \cdot \sqrt{3}/2 \quad (4)$$

il versore orientato a  $120^\circ$  in anticipo sull'asse reale (cioè secondo l'asse della fase B), in base alla (3), i fasori spaziali f.m.m. di fase sono esprimibili come segue:

$$\bar{m}_A = (2/\pi) \cdot N_{en} \cdot i_A \quad ; \quad \bar{m}_B = (2/\pi) \cdot N_{en} \cdot i_B \cdot \alpha \quad ; \quad \bar{m}_C = (2/\pi) \cdot N_{en} \cdot i_C \cdot \alpha^2 \quad (5)$$

Dunque il fasore f.m.m. risultante di fase è dato da:

$$\bar{m} = \bar{m}_A + \bar{m}_B + \bar{m}_C = (2/\pi) \cdot N_{en} \cdot (i_A + i_B \cdot \alpha + i_C \cdot \alpha^2) \quad (6)$$

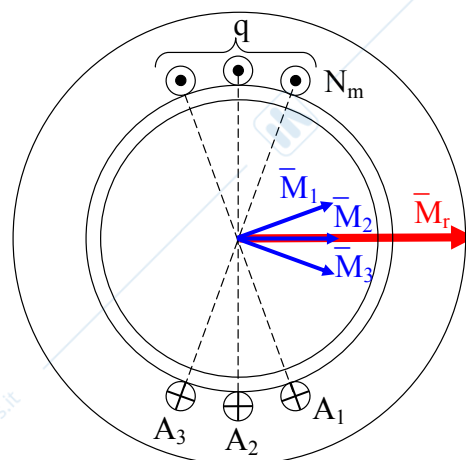


Fig.1 – avvolgimento distribuito di fase di una macchina a  $p = 2$  poli, costituito da  $q = 3$  matasse collegate in serie; ciascuna matassa è formata da  $N_m$  spire a passo diametrale.

## Fasori spazio-temporali

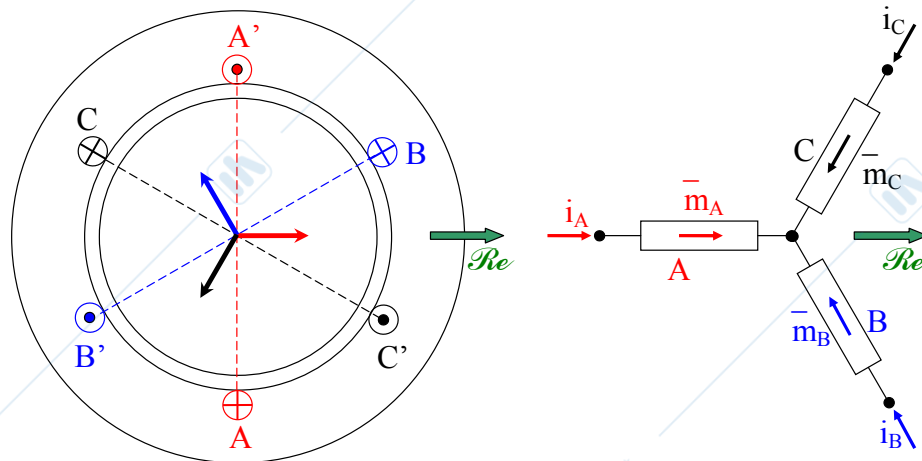


Fig.2 – struttura trifase simmetrica, relativa ad un paio poli di una struttura con  $n$  paio poli; le matasse sono rappresentative di avvolgimenti di fase distribuiti, dotati di  $N_{en}$  spire efficaci per paio poli. Sovrapposto al piano della macchina vi è un piano complesso (con origine nell'asse di rotazione) il cui asse reale  $Re$  è orientato come l'asse magnetico della fase A; sulla destra gli avvolgimenti sono mostrati come concentrati ed è evidenziata la congruenza di verso della corrente al morsetto di fase con l'asse della corrispondente f.m.m. di fase.

La quantità  $i_A + i_B \cdot \alpha + i_C \cdot \alpha^2$ , che è dimensionalmente una corrente ed è un numero complesso, è nota per essere coinvolta nella definizione della trasformata di Park corrente  $\bar{i}_p$ .

Infatti, nel caso di sistema trifase puro ( $i_A + i_B + i_C = 0$ , grazie al centro stella isolato), in un sistema di riferimento fisso, vale la seguente definizione:

$$\bar{i}_p = \sqrt{2/3} \cdot (i_A + i_B \cdot \alpha + i_C \cdot \alpha^2) \quad (7)$$

La adozione, non obbligata, del fattore  $\sqrt{2/3}$  nella (7) corrisponde a definire “razionale” tale relazione.

In base alle (6), (7), si può scrivere:

$$\bar{m} = (2/\pi) \cdot \sqrt{3/2} \cdot N_{en} \cdot \bar{i}_p = (3 \cdot \sqrt{2}/\pi) \cdot N_{en} \cdot \bar{i}_p / \sqrt{3} \quad (8)$$

La (8), valida ai valori istantanei, mostra come il fasore f.m.m. trifase sia proporzionale al fasore di Park corrente  $\bar{i}_p$  e in fase con esso: dunque  $\bar{i}_p$  può essere interpretato come una quantità di tipo magnetico, rappresentativa del campo di f.m.m. agente nel traferro.

E' utile evidenziare come si trasformano le (7) e (8) qualora la terna di correnti di fase costituisca un sistema equilibrato di sequenza diretta di correnti sinusoidali, di valore efficace  $I$ , pulsazione  $\omega$ , fase temporale  $\beta$ :

$$i_A = \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega \cdot t + \beta); \quad i_B = \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega \cdot t - 2 \cdot \pi/3 + \beta); \quad i_C = \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega \cdot t - 4 \cdot \pi/3 + \beta) \quad (9)$$

Considerando la (9), la (7) diviene:

$$\begin{aligned} \bar{i}_p &= \sqrt{2/3} \cdot \sqrt{2} \cdot I \cdot [\cos(\omega \cdot t + \beta) + \cos(\omega \cdot t - 2 \cdot \pi/3 + \beta) \cdot \alpha + \cos(\omega \cdot t - 4 \cdot \pi/3 + \beta) \cdot \alpha^2] = \dots \\ &= \sqrt{3} \cdot I \cdot \exp(j \cdot \beta) \cdot \exp(j \cdot \omega \cdot t) = \sqrt{3} \cdot \bar{I} \cdot \exp(j \cdot \omega \cdot t) = \bar{I}_p \cdot \exp(j \cdot \omega \cdot t) \end{aligned} \quad (10)$$

dove  $\bar{I} = I \cdot \exp(j \cdot \beta)$  è il fasore corrente efficace.

Sostituendo la (10) nella (8), il fasore spaziale f.m.m. trifase dovuto ad un sistema sinusoidale equilibrato di correnti di sequenza diretta risulta pari a:

$$\bar{m} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{\pi} \cdot N_{en} \cdot \bar{I} \cdot \exp(j \cdot \omega \cdot t) = \bar{M} \cdot \exp(j \cdot \omega \cdot t) \quad (11)$$

## Fasori spazio-temporali

$$\text{dove: } \bar{M} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{\pi} \cdot N_{en} \cdot \bar{I} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{\pi} \cdot (N_c/n) \cdot \bar{I} \quad (12)$$

Le (10), (11) e (12) evidenziano che:

- l'ampiezza  $\bar{I}_p$  del fasore di Park corrente  $\bar{i}_p$  è pari a  $\sqrt{3}$  volte la corrente di fase  $\bar{I}$  in valore efficace ed è in fase con essa;
- il fasore di Park corrente  $\bar{i}_p$  ruota nel piano complesso con velocità angolare costante pari alla pulsazione  $\omega$  delle correnti di fase;
- anche il fasore f.m.m. trifase  $\bar{m}$  ruota ad una velocità pari alla pulsazione  $\omega$  ed è in fase con  $\bar{i}_p$ ;
- il fasore f.m.m.  $\bar{M}$  ha ampiezza proporzionale al fasore corrente di fase  $\bar{I}$  ed è in fase con esso.

## 2. Spire efficaci e f.e.m. indotta

Si consideri l'avvolgimento distribuito di fig.3, relativo ad una fase di una struttura a  $p = 2$  poli ( $n = p/2 = 1$  paia poli): le  $q$  matasse di tale avvolgimento, collegate in serie, siano tutte uguali, uniformemente distribuite, caratterizzate da passo diametrale e ciascuna formata da  $N_m$  spire.

Sia  $\bar{\varphi}$  il fasore flusso di polo di una distribuzione  $b(x)$  sinusoidale di induzione al traferro, di valore di picco  $B$  (in generale:  $B = B(t)$ ):  $\bar{\varphi}$  è nella direzione in cui l'induzione è massima, orientato nel verso positivo (anomalia  $\theta_c = \theta_c(t)$  in fig. 3 (pedice  $c =$  campo)), e ha ampiezza:

$$\varphi(t) = \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} B(t) \cdot \cos(x \cdot \pi/\tau) \cdot \ell \cdot dx = (2/\pi) \cdot B(t) \cdot \tau \cdot \ell, \quad (13)$$

dove  $D$  è il diametro al traferro,  $\tau = \pi \cdot D/p$  il passo polare,  $\ell$  la lunghezza del pacco lamiere (ovvero dei lati attivi in cava):

$$\bar{\varphi} = \varphi \cdot \exp(j \cdot \theta_c) \quad (14)$$

Si prescinde nel seguito dalla natura della sorgente che produce il campo di induzione al traferro cui è associato il fasore flusso di polo  $\bar{\varphi}$ : può trattarsi di un induttore in moto, oppure di un campo rotante prodotto da un avvolgimento polifase percorso da correnti variabili.

$$\text{Si indichi con } \bar{v}_k = \exp(j \cdot \beta_k) \quad (15)$$

il versore normale alla matassa  $k$ -esima: tale matassa può appartenere allo statore o al rotore e, in quest'ultimo caso può essere in movimento, solidale con tutto il rotore, con legge  $\beta_k = \beta_k(t)$ .

Il flusso concatenato  $\psi_k$  con tale matassa  $k$ -esima si può così esprimere:

$$\psi_k = N_m \cdot \varphi \cdot \cos(\theta_c - \beta_k) = N_m \cdot \bar{\varphi} \cdot \bar{v}_k \quad (16)$$

dove con  $\bullet$  si è indicato l'operatore prodotto scalare tra fasori.

Poiché le  $q$  matasse sono collegate in serie a formare l'avvolgimento di fase, il totale flusso concatenato di fase  $\psi_f$  vale:

$$\psi_f = \sum_k (N_m \cdot \bar{\varphi} \cdot \bar{v}_k) = N_m \cdot \bar{\varphi} \cdot \sum_k \bar{v}_k = (q \cdot N_m) \cdot \bar{\varphi} \cdot [(\sum_k \bar{v}_k)/q] \quad (17)$$

Nell'ultima della (17) il prodotto  $q \cdot N_m$  è il totale numero di spire  $N$  in serie dell'avvolgimento:

$$N = q \cdot N_m \quad (18)$$

mentre  $(\sum_k \bar{v}_k)/q$  è la risultante dei  $q$  versori di matassa  $\bar{v}_k$ , divisa per il numero di matasse  $q$ .

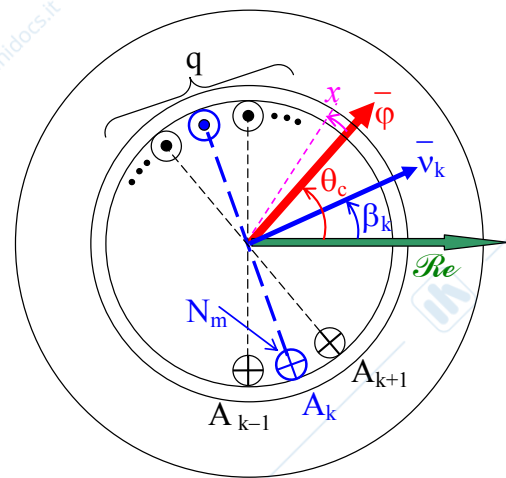


Fig. 3 – avvolgimento di fase di una macchina a  $p = 2$  poli, con  $q$  matasse in serie; ciascuna matassa include  $N_m$  spire a passo diametrale.

Fasori spazio-temporali

$(\sum_k \bar{v}_k)/q$  ha ampiezza pari al fattore di avvolgimento  $f_a$  (2) con cui si compongono i fasori f.m.m. di matassa):

$$f_a = |(\sum_k \bar{v}_k)| / q \quad (19)$$

Il verso di  $(\sum_k \bar{v}_k)/q$  coincide con l'asse magnetico della matassa mediana del gruppo di  $q$  matasse adiacenti: quindi  $(\sum_k \bar{v}_k)/q$  è l'asse magnetico dell'avvolgimento di fase.

Ne consegue che, anche agli effetti del flusso concatenato (e della f.e.m. indotta, ad esso correlata) un avvolgimento distribuito è caratterizzato dal seguente numero di spire efficaci:

$$N_e = N \cdot f_a \quad (20)$$

Si consideri ora l'avvolgimento di fase di  $N_e$  spire efficaci di fig. 4, avente il versore  $\bar{v}$  come asse magnetico (normale al piano "elettrico" di giacitura della fase):

$$\bar{v} = \exp(j \cdot \theta_a) \quad (21)$$

Il flusso concatenato con l'avvolgimento di fase è dato da:

$$\psi_f = N_e \cdot \phi \cdot \cos(\theta_c - \theta_a) = N_e \cdot \bar{\phi} \cdot \bar{v} = \bar{\psi} \cdot \bar{v} \quad ; \quad (22)$$

dunque,  $\psi_f$  è considerato positivo nel verso di  $\bar{v}$  (cioè quando la proiezione di  $\bar{\phi}$  su  $\bar{v}$  è diretta come  $\bar{v}$ ). Nella (22) si è indicato con

$$\bar{\psi} = N_e \cdot \bar{\phi} = N_e \cdot \phi \cdot \exp(j \cdot \theta_c) = \psi \cdot \exp(j \cdot \theta_c) \quad (23)$$

il fasore flusso concatenato, attribuendogli la stessa orientazione del fasore  $\bar{\phi}$ .

Se per il calcolo della f.e.m. di fase  $e_f(t)$  si decide di formulare la legge della induzione con il segno + ( $e_f(t) = + d\psi_f(t)/dt$ ), si deve legare il verso di azione della f.e.m.  $e_f(t)$  a quella del flusso concatenato con la regola della vite sinistrorsa (cioè come indicato da  $\odot$  e  $\otimes$  in fig. 4).

Dunque, in base alla (22), la f.e.m. indotta nell'avvolgimento di fig. 4 è esprimibile come segue:

$$e_f(t) = + d\psi_f/dt = + d(\bar{\psi} \cdot \bar{v})/dt = (d\bar{\psi}/dt) \cdot \bar{v} + \bar{\psi} \cdot d\bar{v}/dt = d[\psi \cdot \exp(j \cdot \theta_c)]/dt \cdot \bar{v} + \bar{\psi} \cdot d\bar{v}/dt \quad (24)$$

Poiché  $\theta_c$  e  $\theta_a$  sono angoli elettrici, le loro derivate temporali sono velocità angolari elettriche, da cui:

$$\omega_c = d\theta_c/dt \quad , \quad \omega_a = d\theta_a/dt \quad (25)$$

dove  $\omega_c$  è la velocità elettrica del campo rispetto al riferimento fisso  $Re$  e  $\omega_a$  la velocità elettrica dell'avvolgimento, ancora rispetto al riferimento  $Re$ . In generale si può avere:  $\omega_c = \omega_c(t)$ ,  $\omega_a = \omega_a(t)$ . Sviluppando ulteriormente la (24) e considerando che:

$$d\bar{v}/dt = d(\exp(j \cdot \theta_a))/dt = j \cdot \omega_a \cdot \exp(j \cdot \theta_a) = j \cdot \omega_a \cdot \bar{v} \quad , \quad (26)$$

si ottiene:

$$e_f(t) = (d\psi/dt) \cdot \exp(j \cdot \theta_c) \cdot \bar{v} + \psi \cdot j \cdot \omega_c \cdot \exp(j \cdot \theta_c) \cdot \bar{v} + \bar{\psi} \cdot (j \cdot \omega_a \cdot \bar{v}) \quad (27)$$

Ma per l'ultimo termine della (27) si può scrivere :

$$\begin{aligned} \bar{\psi} \cdot (j \cdot \omega_a \cdot \bar{v}) &= \bar{\psi} \cdot [\exp(j \cdot \pi/2) \cdot \omega_a \cdot \exp(j \cdot \theta_a)] = [\psi \cdot \exp(j \cdot \theta_c)] \cdot \{\omega_a \cdot \exp[j \cdot (\theta_a + \pi/2)]\} = \\ &= \psi \cdot \omega_a \cdot \cos[\theta_c - (\theta_a + \pi/2)] = \psi \cdot \omega_a \cdot \cos[(\theta_c - \pi/2) - \theta_a] = \{\omega_a \cdot \psi \cdot \exp[j \cdot (\theta_c - \pi/2)]\} \cdot \exp(j \cdot \theta_a) = \\ &= -j \cdot \omega_a \cdot \bar{\psi} \cdot \bar{v} \quad . \end{aligned} \quad (28)$$

Quindi la (27) diviene:

$$e_f(t) = (d\psi/dt) \cdot \exp(j \cdot \theta_c) \cdot \bar{v} + j \cdot \omega_c \cdot \psi \cdot \exp(j \cdot \theta_c) \cdot \bar{v} - j \cdot \omega_a \cdot \bar{\psi} \cdot \bar{v} \quad , \quad (29)$$

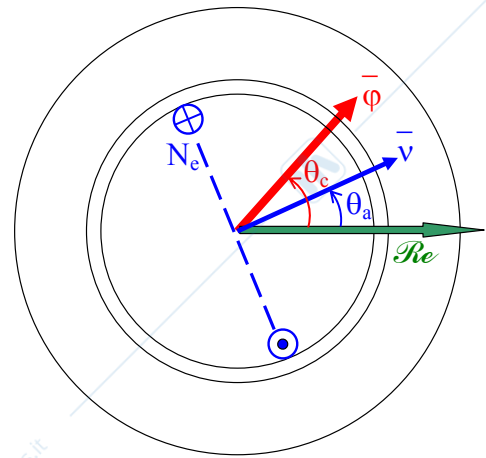


Fig. 4 – avvolgimento distribuito di fase di una macchina a  $p = 2$  poli, costituito da  $N_e$  spire efficaci a passo diametrale.

## Fasori spazio-temporali

$$\text{cioè: } e_i(t) = [(d\psi/dt) \cdot \exp(j \cdot \theta_c) + j \cdot (\omega_c - \omega_a) \cdot \bar{\psi}] \cdot \bar{v} \quad (30)$$

La (30) suggerisce l'opportunità di definire un fasore f.e.m. istantanea  $\bar{e}(t)$ , dato da:

$$\bar{e}(t) = \bar{e}_i(t) + \bar{e}_m(t) = (d\psi/dt) \cdot \exp(j \cdot \theta_c) + j \cdot (\omega_c - \omega_a) \cdot \bar{\psi} . \quad (31)$$

Osservando la struttura della (30) e della (31), si riconoscono le seguenti, rilevanti proprietà (cfr. fig. 5):

- il primo termine della (31) è una f.e.m. trasformatorica,  $\bar{e}_i(t) = (d\psi/dt) \cdot \exp(j \cdot \theta_c)$ , perché dipende dalla variazione nel tempo del modulo del flusso  $\bar{\psi}(t) = N_e \cdot \bar{\varphi}(t)$ ; inoltre,  $\bar{e}_i(t)$  è in fase spaziale con  $\bar{\psi} = N_e \cdot \bar{\varphi}$  (in quanto avente la medesima anomalia  $\theta_c$ );
- il secondo termine della (31) è un fasore f.e.m. mozionale,  $\bar{e}_m(t) = j \cdot (\omega_c - \omega_a) \cdot \bar{\psi}$ , proporzionale alla velocità elettrica relativa tra campo e indotto ( $\omega_c - \omega_a$ ), proporzionale a  $\bar{\psi}$  e orientato  $90^\circ$  prima rispetto a  $\bar{\psi}$ ;
- la conoscenza del fasore f.e.m.  $\bar{e}(t)$  consente, tramite la (30), il calcolo della f.e.m. in un qualunque avvolgimento h-esimo della macchina (statorico:  $h = a_s, b_s, c_s$ , con  $\omega_a = 0$ ; rotorico:  $h = a_r, b_r, c_r$ ), pur di impiegare il versore di fase corrispondente  $\bar{v}_h$ ; dunque, la f.e.m. della fase h,  $e_h(t)$ , corrisponde alla proiezione del fasore  $\bar{e}(t)$  sull'asse magnetico  $\bar{v}_h$  della fase stessa.

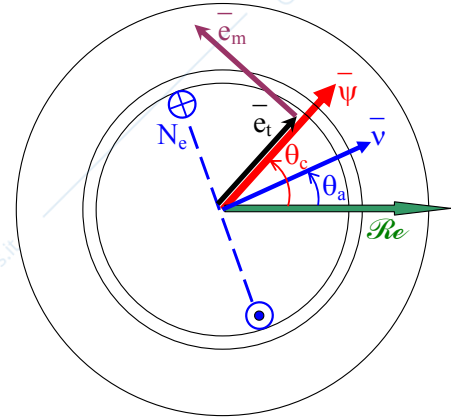


Fig. 5 – fasori spaziali f.e.m. trasformatorica  $\bar{e}_i$  e mozionale  $\bar{e}_m$ , e flusso concatenato  $\bar{\psi}$ .

Vale la pena di esaminare una situazione particolare, peraltro importante, che riguarda il funzionamento in condizioni di regime permanente stabilizzato; tale condizione di funzionamento è così caratterizzata:

- il fasore flusso  $\bar{\psi}(t)$  ha ampiezza  $\psi$  invariabile, ed è in movimento con velocità elettrica costante  $\omega_c$ ;
- l'avvolgimento indotto è in moto con velocità elettrica costante  $\omega_a$  (nulla per un avvolgimento statorico);
- le leggi di movimento sono quelle del moto rotatorio uniforme:

$$\theta_c(t) = \omega_c \cdot t + \theta_{c0} ; \quad \theta_a(t) = \omega_a \cdot t + \theta_{a0} , \quad (32)$$

dove  $\theta_{c0}$  e  $\theta_{a0}$  sono fasi arbitrarie all'istante  $t = 0$ .

In tale situazione, il contributo trasformatorico della (31) è nullo (perché  $|\bar{\psi}| = |\psi \cdot \exp(j \cdot \theta_c)| = \psi = \text{costante}$ ), e rimane un unico contributo di f.e.m., quello mozionale:

$$\begin{aligned} \bar{e}_m(t) &= j \cdot (\omega_c - \omega_a) \cdot \bar{\psi} = j \cdot (\omega_c - \omega_a) \cdot \psi \cdot \exp(j \cdot \theta_c) = [j \cdot (\omega_c - \omega_a) \cdot \psi \cdot \exp(j \cdot \theta_{c0})] \cdot \exp(j \cdot \omega_c \cdot t) = \\ &= [j \cdot (\omega_c - \omega_a) \cdot \bar{\Psi}] \cdot \exp(j \cdot \omega_c \cdot t) = \bar{E}_m \cdot \exp(j \cdot \omega_c \cdot t) . \end{aligned} \quad (33)$$

Se nella (33) si prescinde dal versore rotante  $\exp(j \cdot \omega_c \cdot t)$ , ovvero ci si pone su un piano complesso solidale con il campo rotante, si può scrivere il legame fasoriale tra i seguenti fasori costanti: f.e.m. mozionale  $\bar{E}_m$ , flusso concatenato di avvolgimento  $\bar{\Psi}$ , flusso di polo  $\bar{\Phi}$ :

$$\bar{E}_m = j \cdot (\omega_c - \omega_a) \cdot \bar{\Psi} = j \cdot (\omega_c - \omega_a) \cdot N_e \cdot \bar{\Phi} , \quad (34)$$

con

$$\bar{\Psi} = \psi \cdot \exp(j \cdot \theta_{c0}) = N_e \cdot \Phi \cdot \exp(j \cdot \theta_{c0}) = N_e \cdot \bar{\Phi} . \quad (35)$$

Si osservi che, essendo  $\bar{\Phi}$  e  $\bar{\Psi}$  fasori espressi in valore di picco, anche la f.e.m.  $\bar{E}_m$  della (34) è in valore di picco; volendo riferirsi al più consueto valore efficace (r.m.s. = root mean square), la (34) diviene:

$$\bar{E}_{m, \text{rms}} = j \cdot (\omega_c - \omega_a) \cdot \bar{\Psi} / \sqrt{2} = j \cdot (\omega_c - \omega_a) \cdot N_e \cdot \bar{\Phi} / \sqrt{2} . \quad (34')$$

Infine, sempre in condizioni di regime permanente stabilizzato, in base alla (30) la f.e.m. istantanea  $e_i(t)$  indotta nell'avvolgimento vale:

Fasori spazio-temporali

$$e_f(t) = [j \cdot (\omega_c - \omega_a) \cdot \bar{\Psi}] \bullet \bar{v} = (\omega_c - \omega_a) \cdot \Psi \cdot \cos\{[\theta_c(t) + \pi/2] - \theta_a(t)\} \tag{36}$$

ovvero: 
$$e_f(t) = -(\omega_c - \omega_a) \cdot \Psi \cdot \sin[(\omega_c - \omega_a) \cdot t + \theta_{c0} - \theta_{a0}] \tag{37}$$

Dunque, in condizioni di regime permanente stabilizzato, il diagramma fasoriale di fig. 5 si riduce a quello di fig. 6, relativo a fasori  $\bar{E}_m$  e  $\bar{\Psi}$  costanti (in quanto di ampiezza costante, e la cui anomalia risulta pure costante, perché misurata rispetto ad un sistema di riferimento  $Re_c$  solidale con il campo).

In base a (34) e (37) e alla situazione fasoriale di fig. 6, è utile evidenziare le seguenti proprietà:

- la f.e.m.  $e_f(t)$  indotta nell'avvolgimento ha ampiezza e pulsazione proporzionale alla differenza  $\omega_c - \omega_a$ ;
- in caso di avvolgimento rotante a velocità elettrica  $\omega_a$  uguale a quella del campo  $\omega_c$ , la f.e.m. mozionale è nulla (l'avvolgimento vede un campo invariabile);
- in caso di velocità  $\omega_a > \omega_c$  (funzionamento con velocità di rotazione supersincrona), la f.e.m. dell'avvolgimento di fase passa in opposizione di fase rispetto alla condizione  $\omega_a < \omega_c$ , come ben riconoscibile dalla (34);
- con avvolgimento fermo ( $\omega_a = 0$ ), la pulsazione di  $e_f(t)$  uguaglia la velocità elettrica  $\omega_c$ , e la (36) diviene:

$$e_f(t) = -\omega_c \cdot \Psi \cdot \sin(\theta_c - \theta_a) = -\omega_c \cdot \Psi \cdot \sin(\omega_c \cdot t + \theta_{c0} - \theta_{a0}) \tag{38}$$

Il valore massimo istantaneo positivo di  $e_f(t)$  nella (38) si ha quando  $\theta_c = \theta_a - \pi/2$ , cioè quando il fasore flusso  $\bar{\Psi}$  (e quindi anche il valore di picco B della corrispondente distribuzione di induzione) giace sul piano elettrico dell'avvolgimento, con la cuspidi che punta verso il lato attivo  $\odot$ .

Questa situazione è mostrata in fig.7, dove l'avvolgimento di fase, essendo fermo, è stato rappresentato con i lati attivi lungo lo statore); si osservi che in tale condizione il fasore  $\bar{E}_m$  ha la stessa direzione e lo stesso verso del versore  $\bar{v}$ .

Pertanto, in tale istante la f.e.m. istantanea nell'avvolgimento è massima. Inoltre, tale f.e.m. presenta i versi  $\odot$  e  $\otimes$  di fig. 7. Questo risultato è congruente con la formulazione elementare della legge della induzione: la f.e.m. indotta nel conduttore elementare di lunghezza  $\ell$  vale:

$$e_\ell = \bar{v} \times \bar{B}_\ell \bullet \bar{\ell} \tag{39}$$

dove  $\times$  è l'operatore prodotto vettoriale,  $\bar{v}$  è il vettore velocità relativa del conduttore rispetto al campo (che ha lo stesso valore ma verso opposto rispetto a quello della velocità del campo rispetto al conduttore,  $\omega_c \cdot D/2$ ),  $\bar{B}_\ell$  è l'induzione locale vista dal conduttore,  $\bar{\ell}$  la lunghezza del conduttore, orientata nel verso in cui si assume agente la  $e_\ell$ ; usando la regola delle tre dita della mano destra per la applicazione della (39), quando si verifica la condizione  $\theta_c = \theta_a - \pi/2$  risulta che la  $e_\ell$  nei conduttori di fig. 7 ha il segno congruente con i versi  $\odot$  e  $\otimes$  di fig. 6.

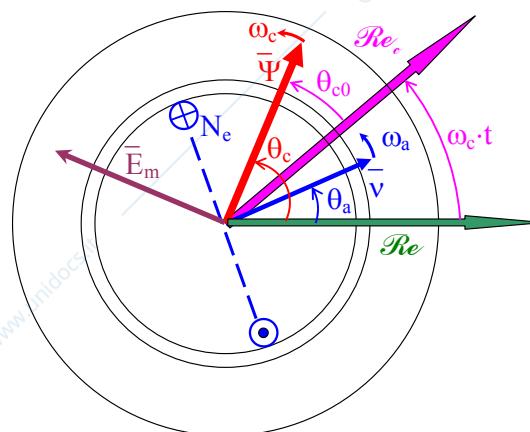


Fig. 6 - fasori f.e.m. mozionale  $\bar{E}_m$ , flusso concatenato  $\bar{\Psi}$ , e sistemi di riferimento fisso  $Re$  e mobile  $Rec$ .

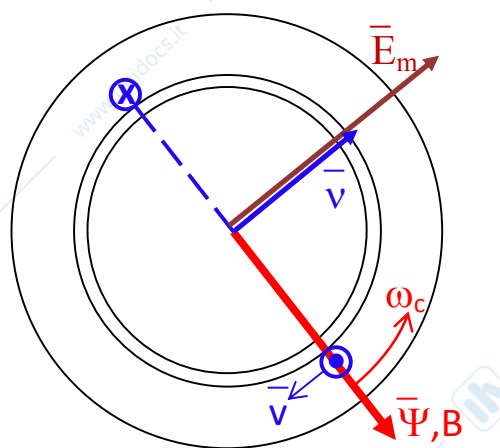


Fig. 7 - fasori f.e.m. mozionale  $\bar{E}_m$  e flusso concatenato  $\bar{\Psi}$  nell'istante in cui  $\bar{\Psi}$  giace nel piano elettrico di avvolgimento: la f.e.m. istantanea nell'avvolgimento è massima ( $\bar{E}_m$  e  $\bar{v}$  sono paralleli), e presenta i versi  $\odot$  e  $\otimes$  di figura.