

Matematica Corso Base a.a. 2019-2020

ALGEBRA LINEARE
LEZIONE III

Federica Ricca



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Algebra Lineare

COSA

Analizzeremo le nozioni di:

- **vettore**
- **spazio vettoriale**
- **matrice**
- **sistemi di equazioni lineari**

PERCHE'

Nelle applicazioni reali (economiche, aziendali, finanziarie, ecc.):

I **vettori** e le **matrici** sono lo strumento fondamentale per la **rappresentazione** e l'**organizzazione** dei dati.

ESEMPIO Caratteristiche di una **azienda**:

	Num. Dipendenti	Fatturato annuo	Dimensione tot impianti	
Azienda 1 =	30	600	1600) VETTORI DI NUMERI
Azienda 2 =	20	480	1000	
Azienda 3 =	10	300	600	

Algebra Lineare

COSA

Analizzeremo le nozioni di:

- **vettore**
- **spazio vettoriale**
- **matrice**
- **sistemi di equazioni lineari**

PERCHE'

Nelle applicazioni reali (economiche, aziendali, finanziarie, ecc.):

I **vettori** e le **matrici** sono lo strumento fondamentale per la **rappresentazione** e l'**organizzazione** dei dati.

ESEMPIO Caratteristiche di una **azienda**:

	Num. Dipendenti	Fatturato annuo	Dimensione tot impianti	
Azienda 1	30	600	1600	MATRICE DI NUMERI
Azienda 2	20	480	1000	
Azienda 3	10	300	600	

Algebra Lineare

COSA

Analizzeremo le nozioni di:

- **vettore**
- **spazio vettoriale**
- **matrice**
- **sistemi di equazioni lineari**

PERCHE'

Nelle applicazioni reali (economiche, aziendali, finanziarie, ecc.):

I **vettori** e le **matrici** sono lo strumento fondamentale per la **rappresentazione** e l'**organizzazione** dei dati.

ESEMPIO Caratteristiche di una **azienda**:

	Num. Dipendenti	Fatturato annuo	Dimensione tot impianti
Azienda 1	30	600	1600
Azienda 2	20	480	1000
Azienda 3	10	300	600

Questo è un vettore?

Algebra Lineare

COSA

Analizzeremo le nozioni di:

- **vettore**
- **spazio vettoriale**
- **matrice**
- **sistemi di equazioni lineari**

PERCHE'

Nelle applicazioni reali (economiche, aziendali, finanziarie, ecc.):

I **vettori** e le **matrici** sono lo strumento fondamentale per la **rappresentazione** e l'**organizzazione** dei dati.

I **sistemi di equazioni lineari** servono per formalizzare matematicamente un insieme di relazioni fondamentali che descrivono il funzionamento di un sistema complesso (es.: attività di produzione).

Per **formulare** e **risolvere** sistemi di equazioni lineari occorre conoscere vettori, matrici e operazioni definite su questi elementi.

Vettori

Vettori

Definizione (vettore)

Dati m numeri reali, $a_1, \dots, a_i, \dots, a_m$, si definisce **vettore (reale) a m componenti (o di ordine m)** l' m -pla ordinata di tali numeri reali.

Un vettore si indica elencando i numeri reali ordinati all'interno di una coppia di parentesi tonde oppure quadre, eventualmente separati da una virgola.

Un vettore può essere scritto come **vettore riga**:

$$(a_1, \dots, a_i, \dots, a_m)$$

oppure come **vettore colonna**:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

ESEMPI

$$(1 \ 3) \quad (0 \ 0 \ 0 \ 0) \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vettori

Definizione (vettore)

Dati m numeri reali, $a_1, \dots, a_i, \dots, a_m$, si definisce **vettore (reale) a m componenti (o di ordine m)** l' m -pla ordinata di tali numeri reali.

Possiamo 'dare un nome' al vettore, ad esempio:

$$\mathbf{a}_m = (a_1 \dots a_i \dots a_m)$$

L'indice m a pedice indica la **dimensione del vettore**.
Quando non è necessario, tale indice può essere omissso.

Definizione (operazione di trasposizione)

Dato un **vettore riga** \mathbf{a} , si definisce **trasposizione di \mathbf{a}** l'operazione che trasforma il vettore riga \mathbf{a} in **vettore colonna**.

Dato un **vettore colonna** \mathbf{a} , si definisce **trasposizione di \mathbf{a}** l'operazione che trasforma il vettore colonna \mathbf{a} in **vettore riga**.

ESEMPIO $\mathbf{a} = (1 \ 2 \ 3) \xrightarrow{\leftarrow} \mathbf{a}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Proprietà

Il risultato di due trasposizioni successive di un vettore \mathbf{a} è **il vettore \mathbf{a} stesso**:

$$(\mathbf{a}^T)^T = \mathbf{a}$$

Vettori

Definizione (vettore nullo)

Prende il nome di **vettore nullo di ordine m** il vettore di m componenti tutte uguali a 0:

$$\underline{0}_m = (0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \dots \ 0)$$

Definizione (scalare)

Prende il nome di **scalare** il vettore costituito da una singola componente (cioè un **vettore di ordine 1**).

→ **un numero reale (scalare)**
può essere visto come un caso particolare di vettore.

	Num. Dipendenti	Fatturato annuo	Dimensione tot impianti	
Azienda 1 =	30	600	1600	MATRICE DI NUMERI
Azienda 2 =	20	480	1000	
Azienda 3 =	10	300	600	

Vettori

Definizione (vettore fondamentale)

Prende il nome di **i-mo vettore fondamentale di ordine m** il vettore

$$e^i = (0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{componente } i\text{-ma}}}{1} \ 0 \ \dots \ 0)$$

ESEMPIO 1

I vettori fondamentali di **ordine 2** sono i seguenti:

$$(1 \ 0) \quad (0 \ 1)$$

ESEMPIO 2

I vettori fondamentali di **ordine 3** sono i seguenti:

$$(1 \ 0 \ 0) \quad (0 \ 1 \ 0) \quad (0 \ 0 \ 1)$$

ESEMPIO 3

I vettori fondamentali di **ordine 4** sono i seguenti:

$$(1 \ 0 \ 0 \ 0) \quad (0 \ 1 \ 0 \ 0) \quad (0 \ 0 \ 1 \ 0) \quad (0 \ 0 \ 0 \ 1)$$

Rappresentazione geometrica dei vettori

Rappresentazione geometrica dei vettori

I vettori possono essere **rappresentati geometricamente** in uno **spazio cartesiano**.

Un vettore può essere interpretato come uno **spostamento** e quindi rappresentato con una **freccia**:



Un vettore è caratterizzato da due elementi:

- la lunghezza (rispetto all'unità di misura fissata) detta **modulo**;
- la **direzione** e il **verso** che descrivono come avviene lo spostamento.

Vediamo la **rappresentazione geometrica** di vettori ad una, due o tre componenti, rispettivamente nello spazio cartesiano di dimensione 1 (**asse orientato**), 2 (**piano cartesiano**) e 3 (**spazio cartesiano**).

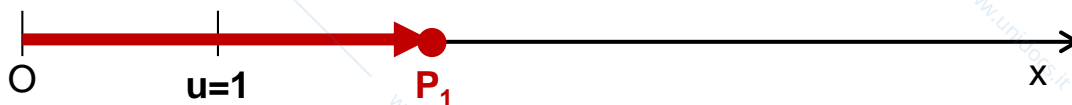
Rappresentazione geometrica dei vettori

Caso $m=1$

VETTORE DI ORDINE 1

$$a_1 = (2)$$

spostamento
da $O=(0)$ al punto P_1

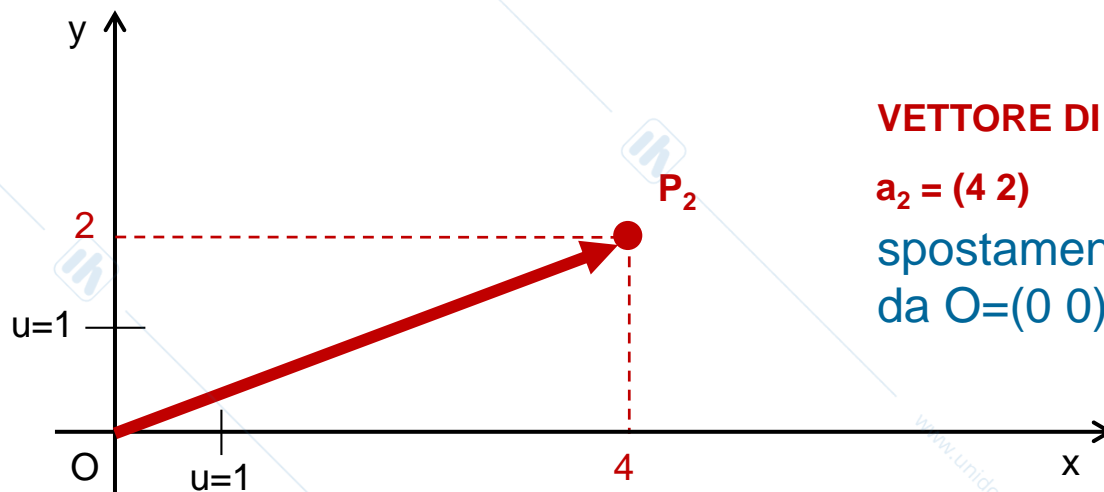


R

Retta reale con origine in O e unità di misura u (sistema unidimensionale)

Rappresentazione geometrica dei vettori

Caso $m=2$



VETTORE DI ORDINE 2

$$a_2 = (4 \ 2)$$

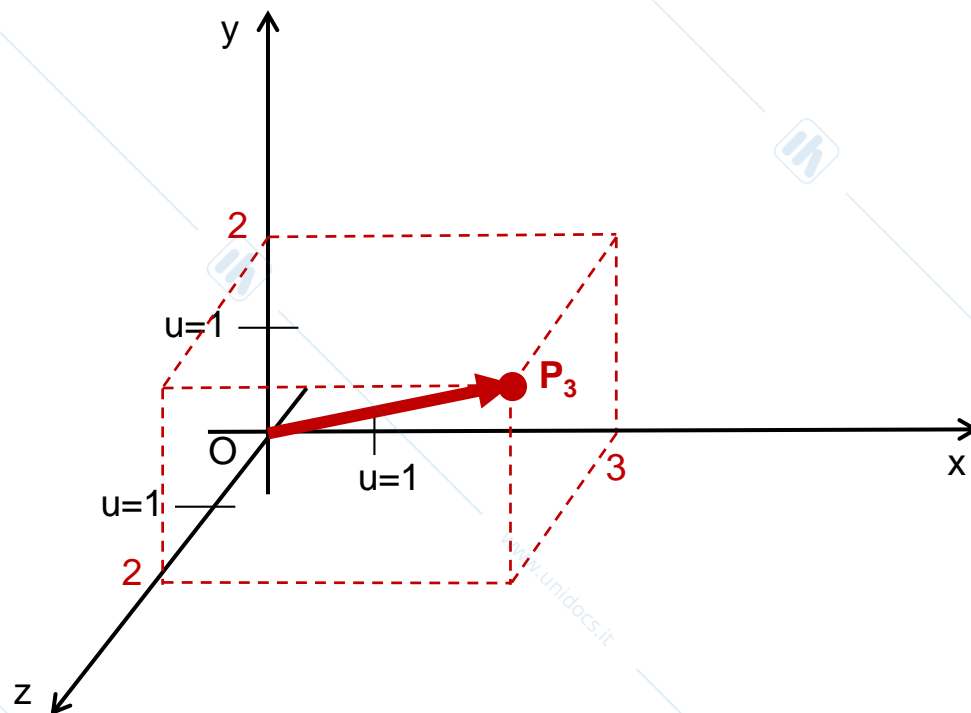
spostamento
da $O=(0 \ 0)$ al punto P_2

\mathbb{R}^2

Piano cartesiano con origine in O e unità di misura u per i due assi (sistema bidimensionale, ortogonale e monometrico).

Rappresentazione geometrica dei vettori

Caso $m=3$



VETTORE DI ORDINE 3

$$\mathbf{a}_3 = (3 \ 2 \ 2)$$

spostamento

da $O=(0 \ 0 \ 0)$ al punto P_3

\mathbb{R}^3

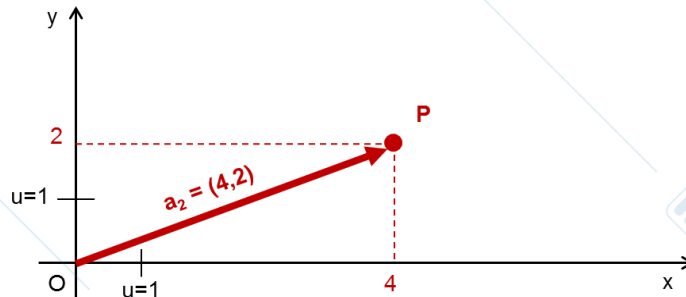
Spazio cartesiano con origine in O e unità di misura u per tutti gli assi
(sistema tridimensionale, ortogonale e monometrico).

Rappresentazione geometrica dei vettori

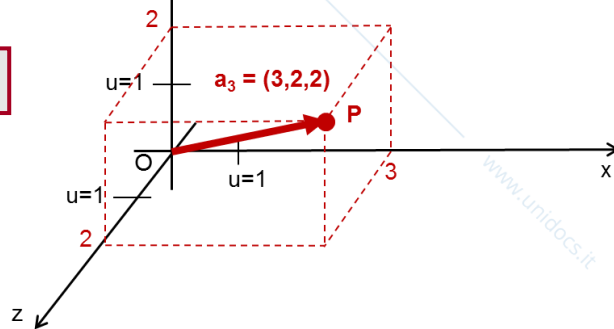
Caso $m=1$



Caso $m=2$



Caso $m=3$



L'insieme dei vettori ad **1 componente** è in **corrispondenza biunivoca** con l'insieme dei **numeri reali \mathbb{R}**

L'insieme dei vettori a **2 componenti** è in **corrispondenza biunivoca** con l'insieme delle **coppie ordinate di numeri reali \mathbb{R}^2**

L'insieme dei vettori a **3 componenti** è in **corrispondenza biunivoca** con l'insieme delle **terne ordinate di numeri reali \mathbb{R}^3**

modulo del vettore = **lunghezza** della freccia
direzione del vettore = **retta** su cui **giace** la freccia
verso del vettore = parte della retta in cui **punta** la freccia

Operazioni con vettori

Operazioni con vettori: confronto

Confronto tra due vettori

Due vettori a m componenti a e b sono **uguali** ($a=b$) se

$$a_i = b_i \quad \text{per ogni } i=1,2,\dots,m$$

ESEMPIO 1 I vettori $a=(1 \ 2 \ 3)$ e $b=(1 \ 2 \ 3)$ sono uguali.

Due vettori a m componenti a e b sono **diversi** se differiscono per almeno una componente *omologa*, cioè **esiste almeno un indice i** per cui

$$a_i \neq b_i$$

ESEMPIO 2 I vettori $a=(1 \ 0 \ 3)$ e $b=(1 \ 2 \ 3)$ sono diversi.

ESEMPIO 3 I vettori $a=(1 \ 0 \ 0)$ e $b=(0 \ 0 \ 1)$ sono **uguali o diversi?**

NOTA Due vettori con un numero di componenti diverso, a_n e b_m , con $n \neq m$, **non possono essere uguali.**

Operazioni con vettori: somma

Somma di due vettori

Dati due vettori a m componenti a e b , si definisce il vettore 'somma di a e b ':

$$a+b = (a_1+b_1 \ a_2+b_2 \ \dots \ a_i+b_i \ \dots \ a_m+b_m)$$

ESEMPIO La somma dei vettori $a=(1 \ 2 \ 3)$ e $b=(1 \ 2 \ 3)$ è:

$$a+b = (1+1 \ 2+2 \ 3+3) = (2 \ 4 \ 6)$$

ESEMPIO La somma dei vettori $a=(1 \ 2 \ 3)$ e $b=(-2 \ -1 \ 1)$ è:

$$a+b = (1+(-2) \ 2+(-1) \ 3+1) = (-1 \ 1 \ 4)$$

L'operazione di somma tra due vettori ammette una semplice interpretazione geometrica.

Operazioni con vettori: somma

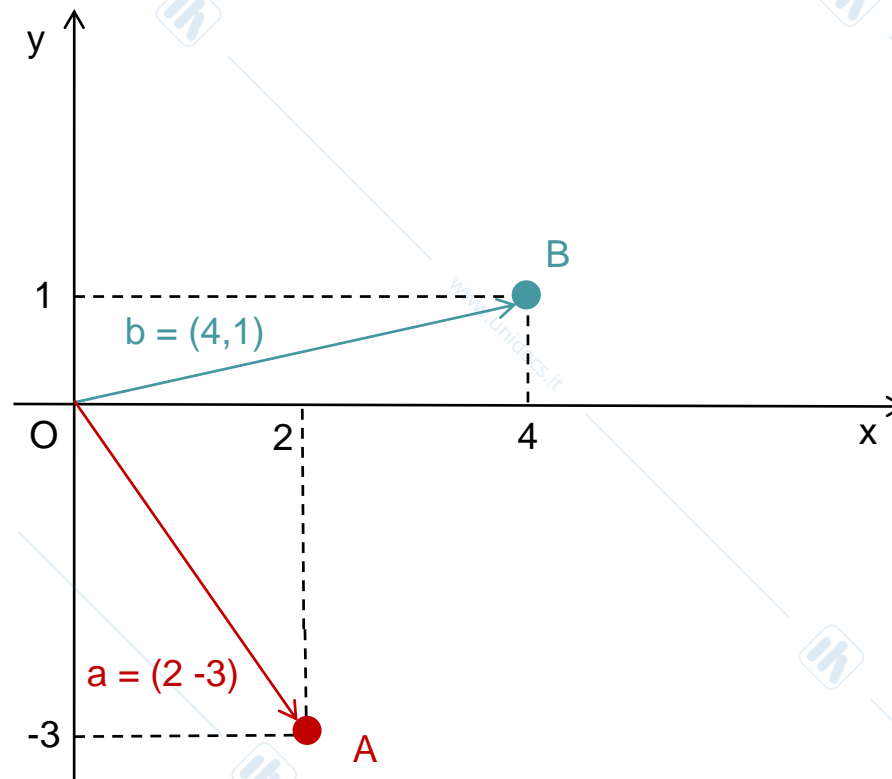
Somma di due vettori

Dati due vettori a m componenti a e b, si definisce il vettore 'somma di a e b':

$$a+b = (a_1+b_1 \ a_2+b_2 \ \dots \ a_i+b_i \ \dots \ a_m+b_m)$$

Interpretazione geometrica m=2

Consideriamo $a = (2 \ -3)$ e $b = (4 \ 1)$.



Operazioni con vettori: somma

Somma di due vettori

Dati due vettori a m componenti a e b, si definisce il vettore 'somma di a e b':

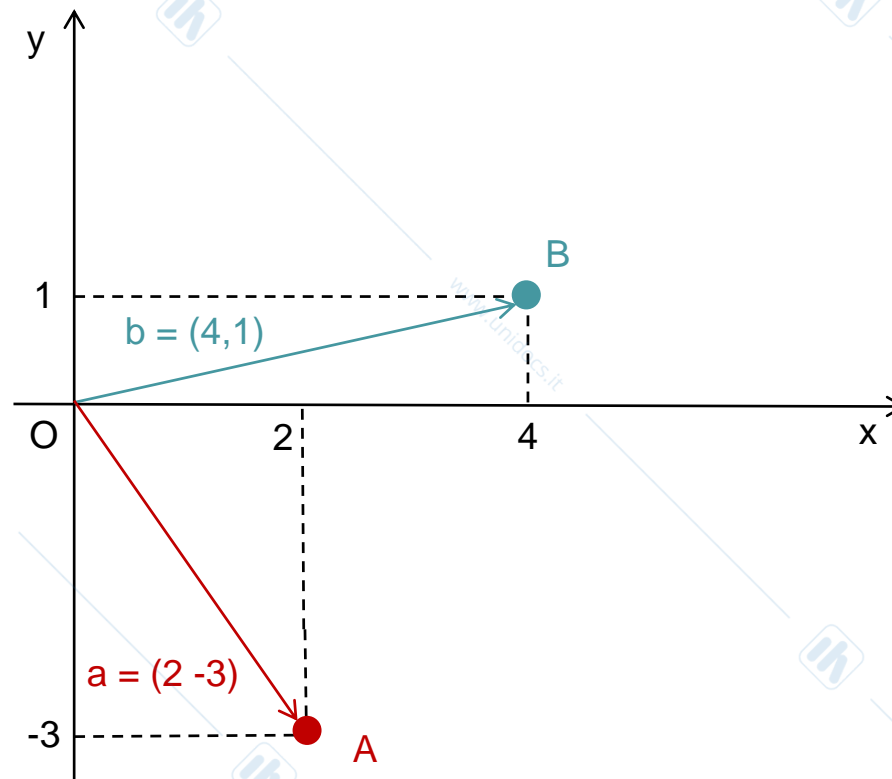
$$a+b = (a_1+b_1 \ a_2+b_2 \ \dots \ a_i+b_i \ \dots \ a_m+b_m)$$

Interpretazione geometrica m=2

Consideriamo $a = (2 \ -3)$ e $b = (4 \ 1)$.

Si ha:

$$c = a + b = (2+4 \ -3+1) = (6 \ -2)$$



Operazioni con vettori: somma

Somma di due vettori

Dati due vettori a m componenti a e b, si definisce il vettore 'somma di a e b':

$$a+b = (a_1+b_1 \ a_2+b_2 \ \dots \ a_i+b_i \ \dots \ a_m+b_m)$$

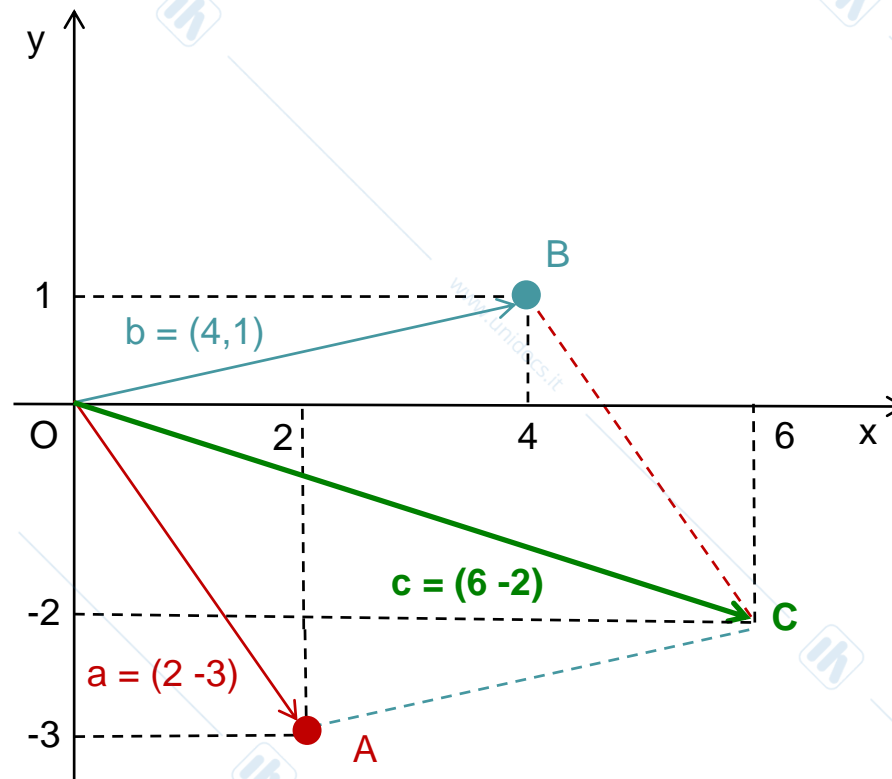
Interpretazione geometrica m=2

Consideriamo $a = (2 \ -3)$ e $b = (4 \ 1)$.

Si ha:

$$c = a + b = (2+4 \ -3+1) = (6 \ -2)$$

Rappresentando i vettori a e b nel piano cartesiano, il vettore somma $c=a+b$ corrisponde alla diagonale del parallelogramma OACB.



Operazioni con vettori: somma

Somma di due vettori

Dati due vettori a m componenti a e b , si definisce il vettore 'somma di a e b ':

$$a+b = (a_1+b_1 \ a_2+b_2 \ \dots \ a_i+b_i \ \dots \ a_m+b_m)$$

Vettori tra loro proporzionali

Consideriamo $a = (2 \ 1)$ e $b = (4 \ 2)$ e $c = (6 \ 3)$

Si ha:

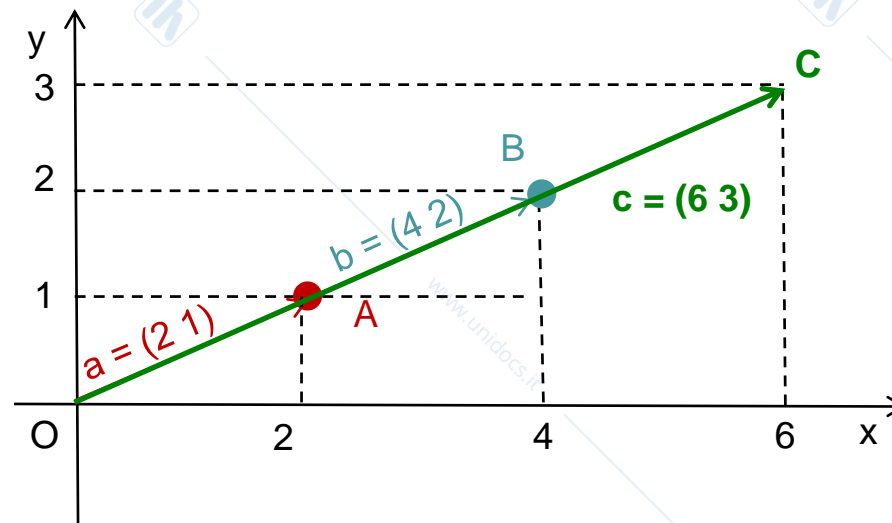
$$b = (4 \ 2) = (2 \ 1) + (2 \ 1) = a + a$$

$$c = (6 \ 3) = (2 \ 1) + (2 \ 1) + (2 \ 1) = a + a + a$$

I vettori b e c hanno componenti **proporzionali** alle componenti di a con fattori di proporzionalità **2 e 3**, rispettivamente.

$$b = 2a$$

$$c = 3a$$



Operazioni con vettori: somma

Somma di due vettori

Dati due vettori a m componenti a e b , si definisce il vettore 'somma di a e b ':

$$a+b = (a_1+b_1 \ a_2+b_2 \ \dots \ a_i+b_i \ \dots \ a_m+b_m)$$

Vettori tra loro proporzionali

Consideriamo $a = (2 \ 1)$ e $b = (4 \ 2)$ e $c = (6 \ 3)$

Si ha:

$$b = (4 \ 2) = (2 \ 1) + (2 \ 1) = a + a$$

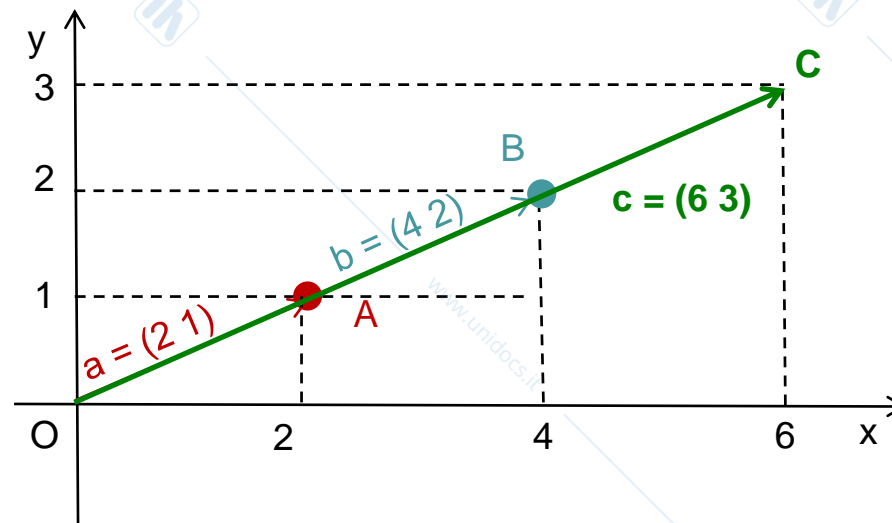
$$c = (6 \ 3) = (2 \ 1) + (2 \ 1) + (2 \ 1) = a + a + a$$

I vettori b e c hanno componenti **proporzionali** alle componenti di a con fattori di proporzionalità **2 e 3**, rispettivamente.

$$b = 2a$$

$$c = 3a$$

Geometricamente significa che giacciono sulla stessa retta (hanno la stessa direzione) di a .



In questo caso il parallelogramma $OACB$ è *degenere* e i vettori differiscono tra loro solo per la loro lunghezza.

Operazioni con vettori: somma

Somma di due vettori

Dati due vettori a m componenti a e b , si definisce il vettore 'somma di a e b ':

$$a+b = (a_1+b_1 \ a_2+b_2 \ \dots \ a_i+b_i \ \dots \ a_m+b_m)$$

Vettori tra loro proporzionali

Consideriamo $a = (2 \ 1)$ e $b = (4 \ 2)$ e $c = (6 \ 3)$

Si ha:

$$b = (4 \ 2) = (2 \ 1) + (2 \ 1) = a + a$$

$$c = (6 \ 3) = (2 \ 1) + (2 \ 1) + (2 \ 1) = a + a + a$$

I vettori b e c hanno componenti **proporzionali** alle componenti di a con fattori di proporzionalità **2** e **3**, rispettivamente.

$$b = 2a$$

$$c = 3a$$

NOTA: I vettori b e c sono espressi come **moltiplicazione** tra il vettore a e uno scalare.



Introduciamo l'operazione di **prodotto di un vettore per uno scalare**.

Operazioni con vettori: prodotto per uno scalare

Prodotto di un vettore per uno scalare

Dato un vettore a con m componenti e uno scalare (numero reale) λ , si definisce il **prodotto dello scalare λ per il vettore a** il vettore seguente:

$$\lambda a = (\lambda a_1 \ \lambda a_2 \ \dots \ \lambda a_i \ \dots \ \lambda a_m)$$

ESEMPIO Consideriamo lo **scalare 2** e il vettore $a = (4 \ 1)$, si ha:

$$2a = (2 \cdot 4 \ 2 \cdot 1) = (8 \ 2)$$

OSSERVAZIONE 1: Per un qualsiasi vettore a_m si ha:

$$1 \cdot a_m = a_m$$

e

$$(-1) \cdot a_m = (-a_1 \ -a_2 \ \dots \ -a_i \ \dots \ -a_m) = -a_m \quad \text{opposto di } a$$

OSSERVAZIONE 2: Per un qualsiasi vettore a_m si ha:

$$0 \cdot a_m = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \dots \ 0) = \mathbf{0}_m$$

Operazioni con vettori: prodotto per uno scalare

Prodotto di un vettore per uno scalare

Dato un vettore a con m componenti e uno scalare (numero reale) λ , si definisce il **prodotto dello scalare λ per il vettore a** il vettore seguente:

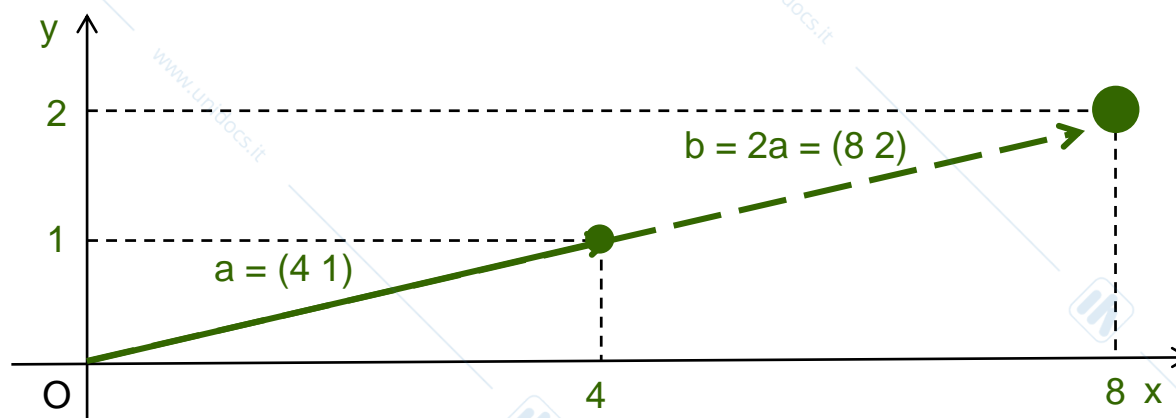
$$\lambda a = (\lambda a_1 \ \lambda a_2 \ \dots \ \lambda a_i \ \dots \ \lambda a_m)$$

ESEMPIO Consideriamo lo **scalare 2** e il vettore $a = (4 \ 1)$, si ha:

$$2a = (2 \cdot 4 \ 2 \cdot 1) = (8 \ 2)$$

Interpretazione geometrica $m=2$

NOTA: Un vettore risultante dal prodotto tra un vettore a e uno scalare λ ha sempre **componenti omologhe proporzionali a quelle di a** con fattore di proporzionalità λ .



Operazioni con vettori: prodotto per uno scalare

NOTA: Con $\lambda=2$ il vettore λa :

- ha la stessa direzione e lo stesso verso del vettore a ;
- rispetto ad a si è 'allungato', **raddoppiando** la lunghezza.

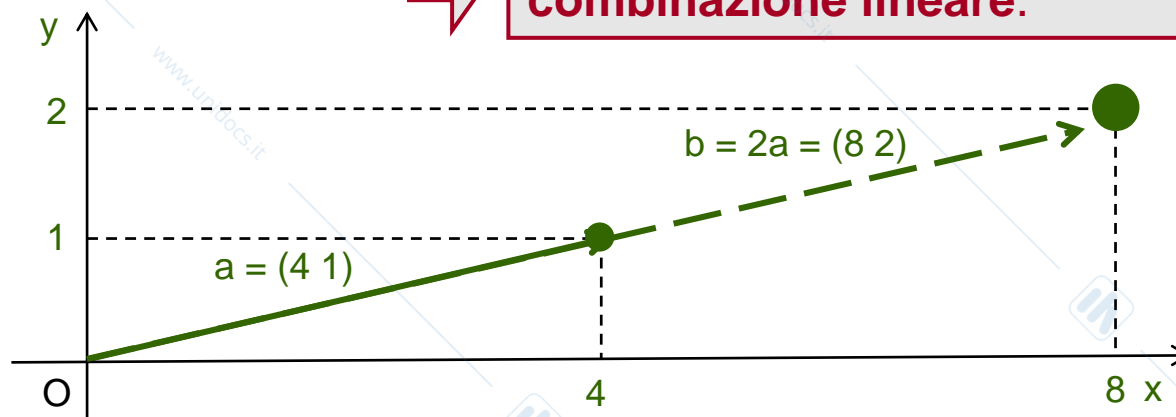
In generale il vettore λa ha :

- la stessa direzione di a ;
- lo **stesso verso** del vettore a **se $\lambda > 0$** e **verso opposto** rispetto ad a **se $\lambda < 0$** ;
- lunghezza pari a λ volte la lunghezza di a ($\lambda > 1$ oppure $\lambda < 1$).

NOTA

Combinando le operazioni di **moltiplicazione di un vettore per uno scalare** e di **somma**, si può introdurre l'operazione di **combinazione lineare di vettori**.

Introduciamo l'operazione di **combinazione lineare**.



Operazioni con vettori: combinazione lineare

Combinazione lineare di due vettori

Dati due vettori **a** e **b** con m componenti e due scalari α e β , la **combinazione lineare di a e b** è definita come segue:

$$\begin{aligned}\alpha a_m + \beta b_m &= \alpha(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_i \ \dots \ a_m) + \beta(b_1 \ b_2 \ \dots \ b_i \ \dots \ b_m) \\ &= (\alpha a_1 + \beta b_1 \quad \alpha a_2 + \beta b_2 \quad \dots \quad \alpha a_i + \beta b_i \quad \dots \quad \alpha a_m + \beta b_m)\end{aligned}$$

Esempio

Consideriamo due vettori

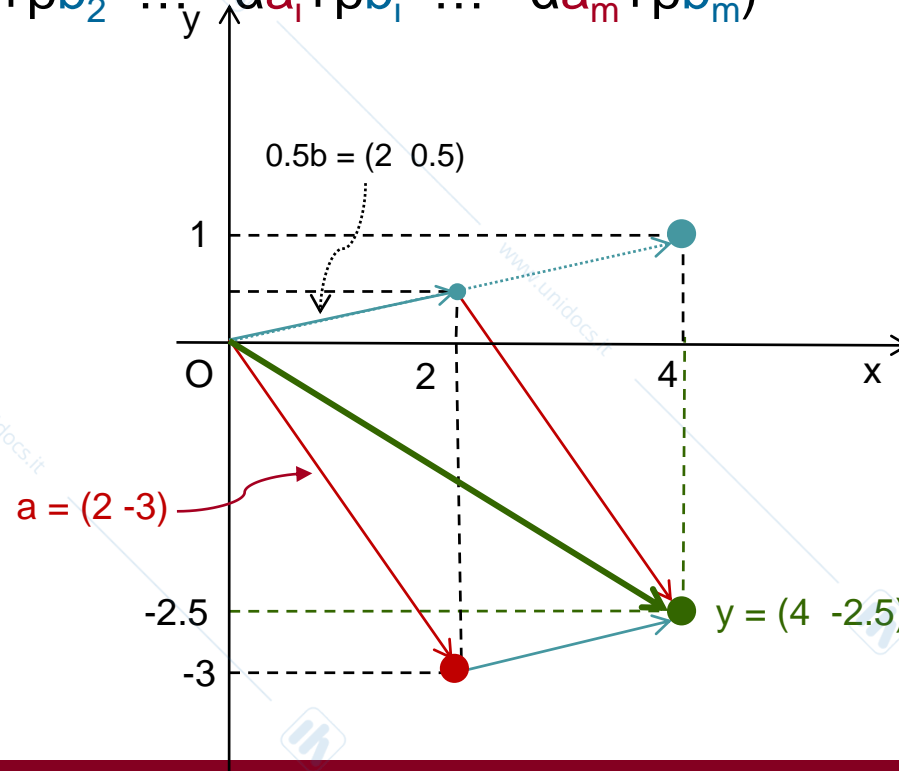
$$a = (2 \ -3) \text{ e } b = (4 \ 1),$$

con $\alpha=1$ e $\beta=0.5$.

Si ha:

$$\begin{aligned}1 \cdot a + 0.5b &= 1 \cdot (2 \ -3) + 0.5 \cdot (4 \ 1) \\ &= (2 \ -3) + (2 \ 0.5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= (2+2 \quad -3+0.5) \\ &= (4 \quad -2.5)\end{aligned}$$



Operazioni con vettori: proprietà

Per le operazioni tra vettori di **somma** e **prodotto per uno scalare** valgono alcune proprietà già viste per le operazioni di somma e prodotto tra numeri reali.

Consideriamo tre vettori a m componenti a , b e c e due scalari α e β .

Proprietà 1 (commutativa della somma)

$$a+b = b+a$$

Proprietà 2 (associativa della somma)

$$a + (b+c) = (a+b) + c$$

Operazioni con vettori: proprietà

Per le operazioni tra vettori di **somma** e **prodotto per uno scalare** valgono alcune proprietà già viste per le operazioni di somma e prodotto tra numeri reali.

Consideriamo tre vettori a m componenti a , b e c e due scalari α e β .

Proprietà 3 (distributiva del prodotto per uno scalare rispetto alla somma)

$$\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b$$

Proprietà 4

$$(\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a$$

Proprietà 5

$$(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a)$$

Operazioni con vettori: prodotto scalare

Prodotto scalare di due vettori

Dati due vettori a m componenti a e b, il **prodotto scalare di a e b** è la somma dei **prodotti delle componenti omologhe** di a e b, cioè:

$$\langle a, b \rangle = a_1 b_1 + \dots + a_i b_i + \dots + a_m b_m = \sum_{i=1}^m a_i b_i$$

ESEMPIO Consideriamo $a = (1/3 \ -1 \ 2)$ e $b = (3 \ -1 \ 1/2)$ si ha:

$$\langle a, b \rangle = 1/3 \cdot 3 + -1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1/2 = 1 + 1 + 1 = 3 \quad \leftarrow \text{NOTA: è un numero}$$

ESEMPIO Sia $q = (q_1 \ q_2 \ \dots \ q_i \ \dots \ q_m)$ il vettore delle **quantità** di m prodotti acquistati da un soggetto economico e $p = (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_i \ \dots \ p_m)$ il vettore dei **prezzi** unitari degli m prodotti. Il prodotto scalare $\langle p, q \rangle$ esprime il **valore complessivo dei beni acquistati**:

$$\langle p, q \rangle = q_1 p_1 + q_2 p_2 + \dots + q_i p_i + \dots + q_m p_m$$

↑
prezzo unitario del prodotto i moltiplicato
per la quantità acquistata del prodotto i

Operazioni con vettori: prodotto scalare

Prodotto scalare di due vettori

Dati due vettori a m componenti a e b, il **prodotto scalare di a e b** è la somma dei prodotti delle componenti omologhe di a e b, cioè:

$$\langle a, b \rangle = a_1 b_1 + \dots + a_i b_i + \dots + a_m b_m = \sum_{i=1}^m a_i b_i$$

Proprietà del prodotto scalare

In generale

- per un qualsiasi a si ha: $\langle a, a \rangle \geq 0$ (in particolare se $a=0$: $\langle a, a \rangle = 0$)
- per due qualsiasi vettori a e b con lo stesso numero di componenti si ha: $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$
- si ha: $\langle \alpha a + \beta b, c \rangle = \alpha \langle a, c \rangle + \beta \langle b, c \rangle$

ESERCIZIO

Verificare le tre proprietà applicando l'operazione di prodotto scalare a vettori arbitrari.

Norma euclidea

Modulo o Norma euclidea di un vettore

Modulo o norma euclidea di un vettore

Dato il vettore a m componenti a, si definisce **modulo o norma (euclidea) di a** il numero reale:

$$\|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$$

← Radice quadrata del **prodotto scalare** (sempre ≥ 0 per la proprietà appena vista)

ESEMPIO Per il vettore $a=(2 \ 5 \ 4 \ 6)$ si ha:

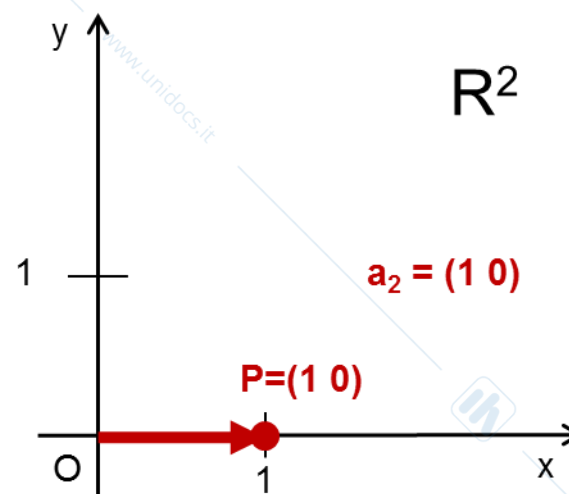
$$\|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle} = \sqrt{2^2 + 5^2 + 4^2 + 6^2} = \sqrt{81} = 9$$

ESEMPIO Per il vettore $a=(1 \ 1 \ 1)$ si ha:

$$\|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

ESEMPIO Per il vettore *fondamentale* $a=(1 \ 0)$ si ha:

$$\|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle} = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$$



Modulo o Norma euclidea di un vettore

Modulo o norma euclidea di un vettore

Dato il vettore a m componenti a, si definisce **modulo o norma (euclidea) di a** il numero reale:

$$\|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$$

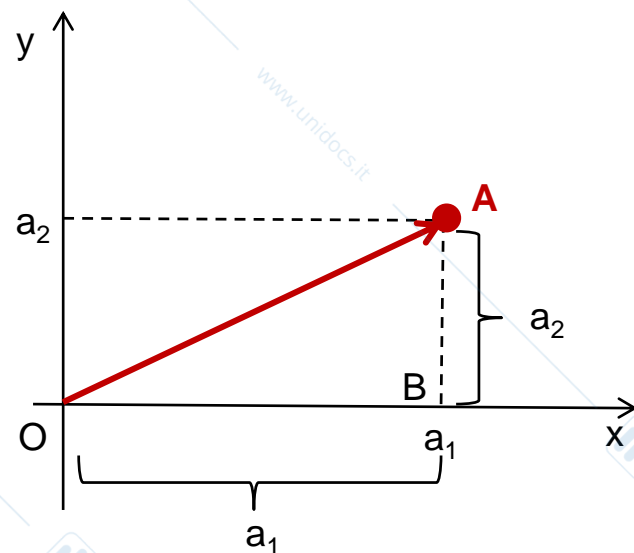
Interpretazione geometrica m=2

Si ha:

$$\|a\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{(a_1 - 0)^2 + (a_2 - 0)^2}$$

Che corrisponde alla lunghezza dell'**ipotenusa del triangolo OBA**.

Dunque la **norma** corrisponde alla '**distanza**' tra l'**origine egli assi O** e il **punto A** le cui coordinate sono date dalle componenti del vettore a (**lunghezza** della freccia che collega O a A).



Distanza euclidea

Distanza euclidea

Consideriamo due vettori a m componenti a e b, e i due punti A e B con coordinate date rispettivamente dalle componenti dei vettori a e b.

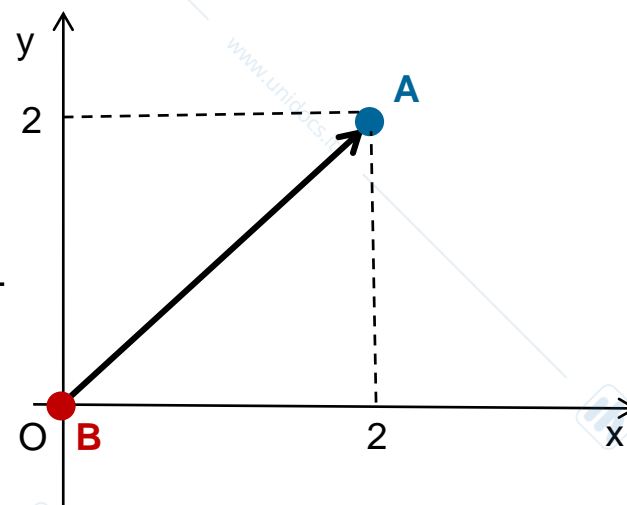
La **distanza euclidea tra i punti A e B** corrisponde alla **norma euclidea del vettore (a-b)**:

$$\|(a - b)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m (a_i - b_i)^2}$$

ESEMPIO 1

Consideriamo $a=(2 \ 2)$ e $b=(0 \ 0)$

$$\|(a - b)\| = \sqrt{(2 - 0)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$



Distanza euclidea

Distanza euclidea

Consideriamo due vettori a m componenti a e b, e i due punti A e B con coordinate date rispettivamente dalle componenti dei vettori a e b.

La **distanza euclidea tra i punti A e B** corrisponde alla **norma euclidea del vettore (a-b)**:

$$\|(a - b)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m (a_i - b_i)^2}$$

ESEMPIO 2

Consideriamo $a=(2 \ 2)$ e $b=(1 \ 1)$

$$\|(a - b)\| = \sqrt{(2 - 1)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{2}$$

