www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Matematica Corso Base
a.a. 2019-2020

ALGEBRA LINEARE
LEZIONE V

Federica Ricca

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Spazio vettoriale

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Spazio vettoriale (da Lez. precedente)

Definizione (spazio vettoriale o *lineare*)

Prende il nome di **spazio vettoriale di dimensione m** un insieme A (non vuoto) di vettori reali a m componenti **chiuso** rispetto alle operazioni di **somma di vettori** e **prodotto di un vettore per uno scalare** (e quindi anche rispetto all'operazione di combinazione lineare del tipo αa+βb).

Equivalentemente

un insieme A (non vuoto) di vettori reali a m componenti costituisce uno **spazio vettoriale di dimensione m** se:

- $\forall x, y \in A \rightarrow x + y \in A$
- $\forall x \in A, \forall \alpha \in R \rightarrow \alpha x \in A$

Proposizione Dato un sottoinsieme $A \subseteq R^m$,

se $\forall x, y \in A, \forall \alpha, \beta \in R \rightarrow \alpha x + \beta y \in A$ ⇒ A è uno spazio vettoriale di dimensione m (**sottospazio** vettoriale di R^m).

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Spazio vettoriale (da Lez. precedente)

NOTA
A partire da due vettori a e b in A, l'operazione di combinazione lineare permette di **generare** un nuovo vettore c= αa+βb che appartiene ancora a A.

In uno spazio vettoriale A è possibile individuare degli insiemi di vettori che **da soli sono in grado di generare qualsiasi altro vettore di A come loro combinazione lineare**.

Introduciamo la nozione di **base** di uno spazio vettoriale.

Proposizione Dato un sottoinsieme A $\subseteq$ R^m,

se $\forall x, y \in A, \forall \alpha, \beta \in R$

$\rightarrow \alpha x + \beta y \in A$

A è uno spazio vettoriale di dimensione m (**sottospazio** vettoriale di R^m).

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Base di uno spazio vettoriale

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Base di uno spazio vettoriale

Base di uno spazio vettoriale

Dati m≥2 vettori a m componenti $b_1, b_2, \dots, b_m$, essi costituiscono una **base** dello spazio vettoriale R^m, se **ogni** vettore x in R^m può essere espresso come loro combinazione lineare:

$$\forall x \in R^m \qquad x = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_m b_m$$

Si dice che lo spazio vettoriale R^m **è generato** dai vettori della base $b_1, b_2, \dots, b_m$.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Base di uno spazio vettoriale

Base di uno spazio vettoriale

Dati m≥2 vettori a m componenti $b_1, b_2, \ldots, b_m$, essi costituiscono una **base** dello spazio vettoriale R^m, se **ogni** vettore x in R^m può essere espresso come loro combinazione lineare:

$$\forall x \in R^m \qquad x = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_m b_m$$

NOTA I vettori *fondamentali* (1 0 0), (0 1 0) e (0 0 1) costituiscono una base dello spazio vettoriale R^3. Infatti, preso un qualsiasi vettore $x = (x_1\ x_2\ x_3)$ in R^3 si può sempre scrivere:

$$(x_1\ x_2\ x_3) = x_1\,(\mathbf{1}\ 0\ 0) + x_2\,(0\ \mathbf{1}\ 0) + x_3\,(0\ 0\ \mathbf{1})$$

i numeri x_1 x_2 e x_3 sono i coefficienti della combinazione lineare

Esempio Il vettore **(10 20 30)** si può scrivere come combinazione lineare dei vettori fondamentali (1 0 0), (0 1 0) e (0 0 1) con coefficienti 10, 20 e 30:

$$\mathbf{(10\ 20\ 30)} = \mathbf{10}\,(\mathbf{1}\ 0\ 0) + \mathbf{20}\,(0\ \mathbf{1}\ 0) + \mathbf{30}\,(0\ 0\ \mathbf{1})$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Base di uno spazio vettoriale

Osservazione

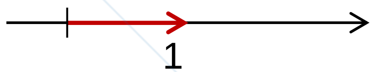
In generale l'insieme degli m vettori fondamentali $e^1, e^2, \ldots, e^m$ forma una base per lo spazio vettoriale R^m :

$$\mathbf{e^1} = (1\ 0\ \ldots\ 0),\ \mathbf{e^2} = (0\ 1\ \ldots\ 0),\ \ldots\ ,\ \mathbf{e^i} = (0\ 0\ \ldots\ \underset{\textbf{i-esimo posto}}{1}\ \ldots\ 0),\ \ldots\ ,\ \mathbf{e^m} = (0\ 0\ \ldots\ 1)$$

Questa base è detta **base canonica** ed è formata da m vettori.

Esempio: base canonica di R^1:

$e^1 = 1$



$$e^1 = (1\ 0\ \ldots\ 0\ \ldots\ 0)$$
$$e^2 = (0\ 1\ \ldots\ 0\ \ldots\ 0)$$
$$\ldots$$
$$e^j = (0\ 0\ \ldots\ 1\ \ldots\ 0)$$
$$\ldots$$
$$e^m = (0\ 0\ \ldots\ 0\ \ldots\ 1)$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Base di uno spazio vettoriale

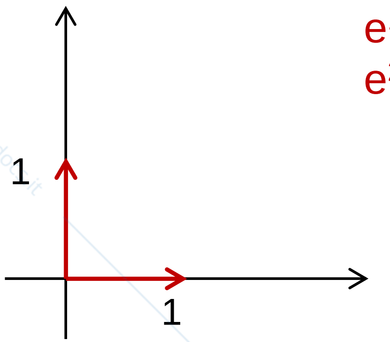
Osservazione

In generale l'insieme degli m vettori fondamentali $e^1, e^2, \dots, e^m$ forma una base per lo spazio vettoriale R^m :

$$\mathbf{e^1} = (1\ 0\ \dots\ 0),\ \mathbf{e^2} = (0\ 1\ \dots\ 0),\ \dots,\ \mathbf{e^i} = (0\ 0\ \dots\ \underset{\text{i-esimo posto}}{1}\ \dots\ 0),\ \dots,\ \mathbf{e^m} = (0\ 0\ \dots\ 1)$$

Questa base è detta **base canonica** ed è formata da m vettori.

Esempio: base canonica di R^2:



$e^1 = (1\ 0)$
$e^2 = (0\ 1)$

$$e^1 = (1\ 0\ \dots\ 0\ \dots\ 0)$$
$$e^2 = (0\ 1\ \dots\ 0\ \dots\ 0)$$
$$\dots$$
$$e^j = (0\ 0\ \dots\ 1\ \dots\ 0)$$
$$\dots$$
$$e^m = (0\ 0\ \dots\ 0\ \dots\ 1)$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Base di uno spazio vettoriale

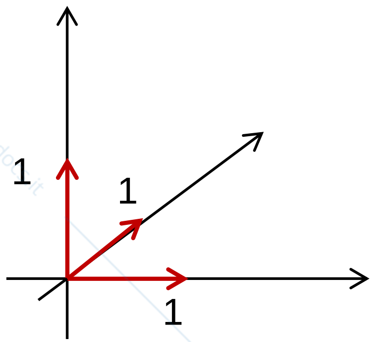
Osservazione

In generale l'insieme degli m vettori fondamentali $e^1, e^2, \ldots, e^m$ forma una base per lo spazio vettoriale R^m :

$$\mathbf{e^1} = (1\ 0\ \ldots\ 0),\ \mathbf{e^2} = (0\ 1\ \ldots\ 0),\ \ldots,\ \mathbf{e^i} = (0\ 0\ \ldots\ \underset{\substack{\textbf{i-esimo}\\ \textbf{posto}}}{1}\ \ldots\ 0),\ \ldots,\ \mathbf{e^m} = (0\ 0\ \ldots\ 1)$$

Questa base è detta **base canonica** ed è formata da m vettori.

Esempio: base canonica di R^3:



$e^1 = (1\ 0\ 0)$
$e^2 = (0\ 1\ 0)$
$e^3 = (0\ 0\ 1)$

$$\begin{gathered} e^1 = (1\ 0\ \ldots\ 0\ \ldots\ 0) \\ e^2 = (0\ 1\ \ldots\ 0\ \ldots\ 0) \\ \ldots \\ e^j = (0\ 0\ \ldots\ 1\ \ldots\ 0) \\ \ldots \\ e^m = (0\ 0\ \ldots\ 0\ \ldots\ 1) \end{gathered}$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Base di uno spazio vettoriale

Osservazione

In generale l'insieme degli m vettori fondamentali $e^1, e^2, \ldots, e^m$ forma una base per lo spazio vettoriale R^m :

$$\mathbf{e^1} = (1\ 0\ \ldots\ 0),\ \mathbf{e^2} = (0\ 1\ \ldots\ 0),\ \ldots\ ,\ \mathbf{e^i} = (0\ 0\ \ldots\ \underset{\text{i-esimo posto}}{1}\ \ldots\ 0),\ \ldots\ ,\ \mathbf{e^m} = (0\ 0\ \ldots\ 1)$$

Questa base è detta **base canonica** ed è formata da m vettori.

NOTA Oltre la base canonica (anche detta *base fondamentale*) esistono **altre** basi per lo spazio vettoriale R^m, ma qui trascuriamo di vedere come esse possano essere ottenute.

NOTA Data una base per lo spazio vettoriale R^m, la rappresentazione di un vettore di R^m come combinazione lineare dei vettori della base **è unica**.

Dunque la rappresentazione di x attraverso la base b, $x = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_n b_m$, è possibile per **una sola scelta** di coefficienti $\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m}$.

Esempio $\quad \mathbf{(10\ 20\ 30)} = \mathbf{10}\,(\mathbf{1}\ 0\ 0) + \mathbf{20}\,(0\ \mathbf{1}\ 0) + \mathbf{30}\,(0\ 0\ \mathbf{1})$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

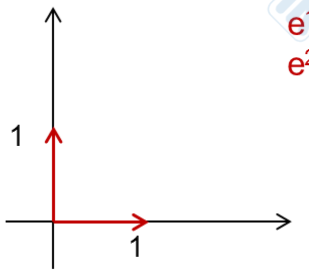
Base di uno spazio vettoriale

RICORDARE

- In tutti gli esempi visti il **numero degli elementi** della base dello spazio vettoriale R^m è pari a **m**.
- I vettori di una base sono **linearmente indipendenti**.

Esempio: base canonica di R^2:

$e^1 = (1\ 0)$
$e^2 = (0\ 1)$

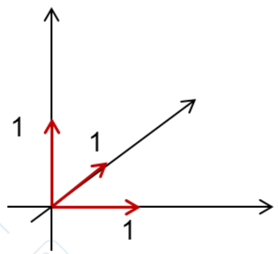


Esempio: base canonica di R^1:

$e^1 = 1$

Esempio: base canonica di R^3:

$e^1 = (1\ 0\ 0)$
$e^2 = (0\ 1\ 0)$
$e^3 = (0\ 0\ 1)$



Vediamo come questa caratteristica si formalizza nella nozione di **rango di uno spazio vettoriale**.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Base di uno spazio vettoriale

RICORDARE

- In tutti gli esempi visti il **numero degli elementi** della base dello spazio vettoriale R^m è pari a **m**.
- I vettori di una base sono **linearmente indipendenti**.

ESEMPIO Consideriamo l'insieme S = $\{e^1, e^2, e^3, (1\ 2\ 3), (2\ 4\ 6)\}$ formato da 5 vettori di ordine 3, tra cui i tre vettori fondamentali di R^3.

Si ha:

S è un insieme di vettori linearmente **dipendenti**
(ad esempio $(2\ 4\ 6) = 2\cdot(1\ 2\ 3)$);

$S_1 = S \setminus \{(2\ 4\ 6)\}$ è un insieme di vettori linearmente **dipendenti**
(infatti $(1\ 2\ 3) = \mathbf{1}\cdot(1\ 0\ 0) + \mathbf{2}\cdot(0\ 1\ 0) + \mathbf{3}\cdot(0\ 0\ 1)$);

$S_2 = S \setminus \{(2\ 4\ 6),(1\ 2\ 3)\} = \{e^1, e^2, e^3\}$ è un insieme di vettori linearmente **indipendenti**.

NOTA Si ha $S_2 = \{e^1, e^2, e^3\}$ e, siccome questi 3 vettori sono linearmente indipendenti, continuando a eliminare vettori dall'insieme, i sottoinsiemi successivamente generati manterranno la proprietà di indipendenza lineare.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Rango di uno spazio vettoriale

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Rango di uno spazio vettoriale

Rango di uno spazio vettoriale

Dato uno **spazio vettoriale S**, il rango p di S è il **massimo** numero di vettori linearmente indipendenti che possono essere estratti da S.

Nel caso particolare dello spazio vettoriale R^m il rango **è pari a m.**
Vediamo perché.

Abbiamo visto che è sempre possibile estrarre da R^m la base canonica formata dagli m vettori linearmente indipendenti $e^1, e^2, \ldots, e^m$.

Sicuramente in R^m esistono (questi) m vettori linearmente indipendenti.

Bisogna verificare che **in R^m non esistono più di m** vettori linearmente indipendenti.

Non lo dimostriamo, ma è garantito dal teorema seguente.

Teorema (fondamentale degli spazi lineari)
Dato lo spazio vettoriale R^m :
- esistono infinite m-uple di vettori linearmente indipendenti di R^m;
- **più di m vettori in R^m sono sempre linearmente dipendenti**.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Rango di uno spazio vettoriale

Rango di uno spazio vettoriale

Dato uno **spazio vettoriale S**, il rango di S è il **massimo** numero di vettori linearmente indipendenti che possono essere estratti da S.

NOTA La nozione di **rango** si estende anche a un insieme qualsiasi di n vettori $a_1, \dots, a_n$ in R^m (anche se essi non costituiscono uno spazio vettoriale).

Rango di un insieme di n vettori in R^m

Dato un **insieme A** di n vettori $a_1, \dots, a_n$ in R^m, il rango di A è il **massimo** numero di vettori linearmente indipendenti che possono essere estratti da A.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Base di uno spazio vettoriale

RICORDARE

- In tutti gli esempi visti il **numero degli elementi** della base dello spazio vettoriale R^m è pari a **m**.
- I vettori di una base sono **linearmente indipendenti**.

ESEMPIO Consideriamo l'insieme $S = \{e^1, e^2, e^3, (1\ 2\ 3), (2\ 4\ 6)\}$ formato da 5 vettori di ordine 3, tra cui i tre vettori fondamentali di R^3.

Si ha:

S è un insieme di vettori linearmente **dipendenti** (ad esempio $(2\ 4\ 6) = 2\cdot(1\ 2\ 3)$);

|S|=5
rango di S è 3

$S_1 = S\setminus\{(2\ 4\ 6)\}$ è un insieme di vettori linearmente **dipendenti** (infatti $(1\ 2\ 3) = \mathbf{1}\cdot(1\ 0\ 0) + \mathbf{2}\cdot(0\ 1\ 0) + \mathbf{3}\cdot(0\ 0\ 1)$);

$|S_1|=4$
rango di S_1 è 3

$S_2 = S\setminus\{(2\ 4\ 6),(1\ 2\ 3)\} = \{e^1, e^2, e^3\}$ è un insieme di vettori linearmente **indipendenti**.

$|S_2|=3$
rango di S_1 è 3

NOTA $S_2= \{e^1, e^2, e^3\}$ e, siccome questi 3 vettori sono linearmente indipendenti, continuando a eliminare vettori dall'insieme, i sottoinsiemi successivamente generati manterranno la proprietà di indipendenza lineare.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Rango di uno spazio vettoriale

Proprietà

Comunque scelti n vettori $a_1,\dots, a_n$ in R^m per il rango p dell'insieme $A=\{a_1,\dots, a_n\}$ vale la seguente proprietà:

$$p \le \min\{m,n\}$$

(dove m è la dimensione dei vettori e n è il numero di vettori).

$p \le \min\{m,n\}$

- deve essere $\le n$
  perchè i vettori da estrarre dall'insieme $\{a_1,\dots, a_n\}$ sono <u>al massimo n</u>
- deve essere $\le m$
  perchè in R^m i vettori <u>linearmente indipendenti</u> sono <u>al massimo m</u>

Teorema (fondamentale degli spazi lineari)
Dato lo spazio vettoriale R^m :
- esistono infinite m-uple di vettori linearmente indipendenti di R^m;
- **più di m vettori in R^m sono <u>sempre linearmente dipendenti</u>**.

Per il Teorema fondamentale degli spazi lineari

Esempio 1

$a_1 = (1\ 0\ 0)$
$a_2 = (0\ 1\ 0)$

m=3, n=2

$\rightarrow p \le 2$

p=2

Esempio 2

$a_1 = (1\ 2\ 3)$
$a_2 = (2\ 4\ 6)$

m=3, n=2

$\rightarrow p \le 2$

p=1

Rango di un insieme di n vettori in R^m

Dato un insieme A di n vettori $a_1,\dots, a_n$ in R^m, il rango di A è il **<u>massimo</u>** numero di vettori linearmente <u>indipendenti</u> che possono essere estratti da A.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Soluzione di una equazione vettoriale/sistema di equazioni lineari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Soluzione di un sistema di equazioni lineari

La nozione di rango e la proprietà vista possono essere sfruttate per la risoluzione della equazione vettoriale

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ \dots \ + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_m \end{bmatrix}$$

o, equivalentemente del sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \dots + x_n a_{1n} = b_1 \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \dots + x_n a_{2n} = b_2 \\ \dots \\ x_1 a_{m1} + x_2 a_{m2} + \dots + x_n a_{mn} = b_m \end{cases}$$

Si tratta di considerare l'insieme $\{a_1, \dots, a_n\}$ degli **n vettori colonna di R^m** e il **rango** di tale insieme di vettori.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Soluzione di un sistema di equazioni lineari

La nozione di rango e la proprietà vista possono essere sfruttate per la risoluzione della equazione vettoriale

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

L'insieme $\{a_1, \dots, a_n\}$ si dice incompleto

L'insieme $\{a_1, \dots, a_n, \mathbf{b}\}$ si dice **completo**

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Soluzione di un sistema di equazioni lineari

Teorema (di Rouché-Capelli)

Condizione necessaria e sufficiente affinché l'equazione vettoriale

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

abbia soluzioni è che il rango p dell'insieme incompleto dei vettori (colonna) $\{a_1,\dots, a_n\}$ sia **uguale** al rango dell'insieme **completo** dei vettori $\{a_1,\dots, a_n,\mathbf{b}\}$.

MATRICE INCOMPLETA

Nota: Se accostiamo tutti i vettori colonna dell'insieme $\{a_1,\dots, a_n\}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

MATRICE COMPLETA

Nota: Se accostiamo tutti i vettori colonna dell'insieme $\{a_1,\dots, a_n,b\}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Soluzione di un sistema di equazioni lineari

Teorema (di Cramer)

Se **n=m**, condizione necessaria e sufficiente affinché l'equazione vettoriale

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \\ a_{n1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \\ a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_n \end{bmatrix}$$

abbia **una ed una sola** soluzione è che sia p=n, cioè che il rango p dell'insieme $\{a_1,...,a_n\}$ (con $a_i \in R^n$ $\forall i=1,2,..,n$) sia uguale a n ('rango pieno').

NOTA

Se n=m ho n vettori colonna di ordine n (a n componenti).

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Soluzione di un sistema di equazioni lineari

In generale l'equazione vettoriale o (sistema di m equazioni lineari)

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_m \end{bmatrix}$$

si dice

- **compatibile** se ammette soluzioni
- **incompatibile** se non ammette soluzioni.

NOTA: I teoremi di Rouché-Capelli e di Cramer forniscono **condizioni di esistenza** (e, eventualmente, unicità) delle soluzioni del sistema, ma **non** danno indicazioni operative su **come individuare** una soluzione.

Per arrivare a una regola pratica di risoluzione di un sistema di m equazioni lineari in n incognite introduciamo la nozione di **matrice** e riformuliamo il sistema in **forma matriciale**.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Matrici

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Matrici

Matrice

Prende il nome di **matrice** (bidimensionale) **di ordine m x n** una tabella di numeri (reali) disposti in maniera **ordinata** su m righe e n colonne.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A pedice:
I posto → indice di riga
II posto → indice di colonna

Consideriamo i 4 seguenti vettori riga a 2 componenti:

(2 1) (3 1) (1 0) (2 4)

Se li mettiamo '**uno sotto l'altro**' possiamo ottenere una 'tabella' di numeri:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

MATRICE
4 x 2

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Matrici

Matrice

Prende il nome di **matrice** (bidimensionale) **di ordine m x n** una tabella di numeri (reali) disposti in maniera ordinata su m righe e n colonne.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A pedice:
I posto → indice di riga
II posto → indice di colonna

Consideriamo i 2 seguenti vettori colonna a 4 componenti:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Se li mettiamo '**uno di seguito all'altro**' possiamo ottenere la stessa tabella di numeri:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

MATRICE
4 x 2

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Matrici

Matrice

Prende il nome di **matrice (bidimensionale) di ordine m x n** una tabella di numeri (reali) disposti in maniera ordinata su m righe e n colonne.

è un vettore riga

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11} \; a_{12} \; \dots \; a_{1n}} \\ a_{21} \; a_{22} \; \dots \; a_{2n} \\ \dots \\ a_{m1} \; a_{m2} \; \dots \; a_{mn} \end{pmatrix}$$

è un vettore colonna

A pedice:
I posto → indice di riga
II posto → indice di colonna

Consideriamo i 4 seguenti vettori riga a 2 componenti:

(2 1) (3 1) (1 0) (2 4)

Se li mettiamo 'uno sotto l'altro' possiamo ottenere una 'tabella' di numeri:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

MATRICE 4 x 2

Consideriamo i 2 seguenti vettori colonna a 4 componenti:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Se li mettiamo ' uno di seguito all'altro' possiamo ottenere la stessa tabella di numeri:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

MATRICE 4 x 2

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Matrici

Matrice

Prende il nome di **matrice** (bidimensionale) **di ordine m x n** una tabella di numeri (reali) disposti in maniera ordinata su m righe e n colonne.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A pedice:
I posto → indice di riga
II posto → indice di colonna

Se **m ≠ n** si ha una matrice **rettangolare**.

Matrice **rettangolare** 2 x 4

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Se **m = n** si ha una matrice **quadrata**.
In questo caso gli elementi con indici a pedice uguali costituiscono la diagonale principale della matrice.

Diagonale principale

Matrice **quadrata** 4 x 4 (o di ordine 4)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Matrici

Matrice

Prende il nome di **matrice (bidimensionale) di ordine m x n** una tabella di numeri (reali) disposti in maniera ordinata su m righe e n colonne.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A pedice:
I posto → indice di riga
II posto → indice di colonna

Un vettore riga a n componenti è una matrice di ordine **1** x n.

Un vettore colonna a m componenti è una matrice di ordine m x **1**.

è un vettore riga

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

è un vettore colonna

A pedice:
I posto → indice di riga
II posto → indice di colonna

Uno scalare è una matrice di ordine **1** x **1**.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Matrici particolari

Matrice trasposta

Prende il nome di **trasposizione** l'operazione che da una matrice A di ordine **m × n** permette di ottenere la matrice A^T (matrice trasposta di A) di ordine **n × m** **scambiando le righe e le colonne della matrice A**.

Esempio

Data la matrice **A** con 2 righe e 4 colonne:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice $\mathbf{A^T}$ (con 4 righe e 2 colonne) è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Osservazione è facile verificare che vale la seguente proprietà:

$$(A^T)^T = A.$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Matrici particolari

Matrice orlata

Data la matrice A di ordine $m \times n$, prende il nome di **matrice orlata di A** la matrice ottenuta 'accostando' alla matrice A una riga, oppure una colonna, oppure entrambe.

Esempio

Data la matrice A con 2 righe e 3 colonne:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice B (con 3 righe e 4 colonne) è una matrice orlata di A (per accostamento di una riga e di una colonna):

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Sono matrici orlate di A anche le matrici C e D, rispettivamente solo per accostamento di una di una colonna e solo per accostamento di una riga:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Matrici particolari

Matrice nulla

Prende il nome di **matrice nulla** la matrice i cui elementi sono tutti 0.

Esempio 1

Matrice nulla rettangolare 3 x 4:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esempio 2

Matrice nulla di ordine 3:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice diagonale

Prende il nome di **matrice diagonale** la matrice quadrata i cui elementi sono tutti nulli, ad eccezione di quelli posti sulla diagonale principale.

Esempio

Matrice diagonale di ordine 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Matrici particolari

Matrice identica

Prende il nome di **matrice identica** (o matrice identità), e la si indica con la lettera I la matrice diagonale (quadrata) i cui elementi non nulli sono tutti uguali a 1.

Esempio

Matrice identità di ordine 3: $I_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e^1 & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$

A cosa corrispondono le singole righe/colonne di I_3?

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Matrici particolari

Matrice identica

Prende il nome di **matrice identica** (o matrice identità), e la si indica con la lettera I la matrice diagonale (quadrata) i cui elementi non nulli sono tutti uguali a 1.

Esempio

Matrice identità di ordine 3: $I_3 = \begin{array}{c} \begin{matrix} e^1 & e^2 & e^3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$

A cosa corrispondono le singole righe/colonne di I_3?

A cosa corrisponde l'insieme delle righe/colonne di I_3?

Matrice simmetrica

Una matrice A quadrata si dice **simmetrica** se $A^T = A$.

Esempio

Matrice simmetrica: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

NOTA

I_3 (e, più in generale, I_n) è una matrice simmetrica.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Operazioni con matrici

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Operazioni con matrici: **confronto e somma**

Confronto tra due matrici

Due matrici A e B di ordine m x n sono **uguali** (A=B) se

$a_{ij}=b_{ij}$ **per ogni** ij, i=1,2,…m e j=1,2,…n

Somma di due matrici

Date due matrici A e B di ordine m x n, la **somma di A e B** è data dalla matrice C che ha nella posizione ij la somma degli elementi a_{ij} e b_{ij} :

$c_{ij}= a_{ij} + b_{ij}$ **per ogni** ij, i=1,2,…m e j=1,2,…n

Esempio Consideriamo le matrici 2x3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Operazioni con matrici: **prodotto per uno scalare**

Prodotto di una matrice per uno scalare

Data una matrice A di ordine m x n e uno scalare λ, si definisce il prodotto dello scalare λ per la matrice A la matrice C che ha gli elementi definiti come segue:

$$c_{ij} = \lambda\, a_{ij} \quad \textbf{per ogni } ij,\ i=1,2,\dots m \text{ e } j=1,2,\dots n$$

Esempio Consideriamo la matrice A di ordine 2x3 e lo scalare λ = 3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \blacktriangleright \quad \mathbf{C} = \lambda A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Operazioni con matrici: **moltiplicazione**

Moltiplicazione tra due matrici 'conformi'

Consideriamo:
- una matrice A di ordine m x **n**
- una matrice B di ordine **n** x q.

Le matrici A e B si dicono **conformi** rispetto all'operazione A·B.

Si definisce **prodotto di A e B** la matrice C di ordine **m x q** il cui generico elemento c_{ij} è uguale al prodotto scalare della **i-ma riga** di A e la **j-ma colonna di B**:

$$c_{ij} = \langle a_{i.}, b_{.j} \rangle \quad \textbf{per ogni } ij,\ i=1,2,\ldots m \text{ e } j=1,2,\ldots q$$

Si ha dunque:

$$c_{ij} = \langle a_{i.}, b_{.j} \rangle = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}$$

La **riga** $a_{i.}$ di A_{mn} ha n elementi $a_{i.} = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$

La **colonna** $b_{.j}$ di B_{nq} ha n elementi

$$b_{.j} = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \ldots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

Prodotto scalare di due vettori

Dati due vettori a m componenti a e b, il prodotto scalare di a e b è la somma dei prodotti delle componenti omologhe di a e b, cioè:

$$\langle a, b \rangle = a_1b_1 + \ldots + a_ib_i + \ldots + a_mb_m = \sum_{i=1}^{m} a_ib_i$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Operazioni con matrici: **moltiplicazione**

Moltiplicazione tra due matrici ‘conformi’

Consideriamo:

- una matrice A di ordine m x **n**
- una matrice B di ordine **n** x q.

Si definisce **prodotto di A e B** la matrice C di ordine **m x q** il cui generico elemento c_{ij} è uguale al prodotto scalare della **i-ma riga** di A e la **j-ma colonna di B**:

$$c_{ij} = \langle a_{i.}, b_{.j} \rangle \quad \textbf{per ogni } ij,\ i=1,2,\ldots m \text{ e } j=1,2,\ldots q$$

Si ha dunque:

$$c_{ij} = \langle a_{i.}, b_{.j} \rangle = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}$$

Esempio Consideriamo le matrici:

$$A_{32} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$C_{33} = A\,B = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 3 \\ 13 & 6 & -7 \\ 18 & 8 & -8 \end{pmatrix}$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Operazioni con matrici: **moltiplicazione**

Moltiplicazione tra due matrici 'conformi'

Consideriamo:

- una matrice A di ordine m x **n**
- una matrice B di ordine **n** x q.

Si definisce **prodotto di A e B** la matrice C di ordine **m x q** il cui generico elemento c_{ij} è uguale al prodotto scalare della **i-ma riga** di A e la **j-ma colonna di B**:

$$c_{ij} = < a_{i.} , b_{.j} > \quad \textbf{per ogni } ij,\ i=1,2,\ldots m \text{ e } j=1,2,\ldots q$$

Si ha dunque:

$$c_{ij} = < a_{i.} , b_{.j} > = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}$$

Esempio Consideriamo le matrici:

$$A_{32} = \begin{pmatrix} \boxed{0 \quad -1} \\ 1 \quad 3 \\ 2 \quad 4 \end{pmatrix} \qquad B_{23} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\4\end{matrix}} & \begin{matrix}0 & 2\\2 & -3\end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$\blacktriangleright \quad C_{33} = A\,B = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 3 \\ 13 & 6 & -7 \\ 18 & 8 & -8 \end{pmatrix}$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Argomenti della lezione

Definizione generale di:

- Base di uno spazio vettoriale
- **Rango di un insieme di vettori in R^m**
- Equazione vettoriale
- Sistema di equazioni scalari
- Matrice
- Matrici particolari
- Matrici conformi
- Moltiplicazione tra matrici

Enunciato e dimostrazione dei seguenti risultati:

Proprietà

Comunque scelti n vettori $a_1,..., a_n$ in R^m per il rango p dell'insieme $\{a_1,..., a_n\}$ vale la seguente proprietà:

$$p \leq \min \{m,n\}.$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari