

Matematica Corso Base a.a. 2019-2020

ALGEBRA LINEARE
LEZIONE IV

Federica Ricca



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Spazio vettoriale

Spazio vettoriale

Definizione (spazio vettoriale o *lineare*)

Prende il nome di **spazio vettoriale di dimensione m** un insieme A (non vuoto) di vettori reali a m componenti **chiuso** rispetto alle operazioni di **somma di vettori** e **prodotto di un vettore per uno scalare** (e quindi anche rispetto all'operazione di combinazione lineare del tipo $\alpha a + \beta b$).

Un insieme è **chiuso rispetto a una operazione** se, applicando l'operazione a qualsiasi elemento dell'insieme, l'**elemento risultante appartiene ancora all'insieme**.

L'insieme \mathbf{R}^m di tutti i vettori reali a m componenti, che include il vettore nullo 0_m , è uno spazio vettoriale di dimensione m .

Spazio vettoriale

Definizione (spazio vettoriale o *lineare*)

Prende il nome di **spazio vettoriale di dimensione m** un insieme A (non vuoto) di vettori reali a m componenti **chiuso** rispetto alle operazioni di **somma di vettori** e **prodotto di un vettore per uno scalare** (e quindi anche rispetto all'operazione di **combinazione lineare del tipo $\alpha a + \beta b$**).

NOTA

Non è detto che un arbitrario sottoinsieme A di vettori in \mathbb{R}^m costituisca uno spazio vettoriale.

Infatti, dato un insieme A e due qualsiasi vettori a e b in A :

- l'operazione $\alpha a + \beta b$ con due scalari α e β è **sempre definita**;
- **non è detto però che il vettore $\alpha a + \beta b$ appartenga ancora ad A .**

Esempio

Consideriamo $A = \{(1 \ 1 \ 1), (2 \ 2 \ 2), (3 \ 3 \ 3)\}$.

Ovviamente A **non è uno spazio vettoriale**.

Ad esempio il vettore $(2 \ 2 \ 2) + (3 \ 3 \ 3) = (5 \ 5 \ 5)$ è ottenibile come combinazione lineare di due vettori di A , **ma non appartiene ad A .**

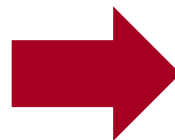
Spazio vettoriale

Definizione (spazio vettoriale o *lineare*)

Prende il nome di **spazio vettoriale di dimensione m** un insieme A (non vuoto) di vettori reali a m componenti **chiuso** rispetto alle operazioni di **somma di vettori** e **prodotto di un vettore per uno scalare** (e quindi anche rispetto all'operazione di combinazione lineare del tipo $\alpha a + \beta b$).

Proposizione Dato un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^m$,

se comunque presi due vettori a e b in A e due scalari α e β , accade che il vettore $\alpha a + \beta b$ appartiene ancora ad A



A è uno spazio vettoriale di dimensione m (**sottospazio vettoriale** di \mathbb{R}^m).

Esempio 1

Consideriamo l'insieme $A = \{x \text{ in } \mathbb{R}^m: x = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{k-1} \ 0 \ x_{k+1} \ \dots \ x_m)\}$ per un k fissato, $1 \leq k \leq m$, cioè il sottoinsieme dei vettori in \mathbb{R}^m che hanno la k -ma componente nulla.

L'insieme A è uno spazio vettoriale di dimensione m .

Verifichiamolo per $m=4$ e $k=3$ con i vettori $x = (x_1 \ x_2 \ 0 \ x_4)$ e $y = (y_1 \ y_2 \ 0 \ y_4)$

$$A = \{x \text{ in } \mathbb{R}^4: x = (x_1 \ x_2 \ 0 \ x_4)\}$$

Spazio vettoriale

Verifica Esempio 1

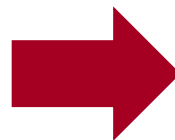
Consideriamo $x=(x_1 \ x_2 \ 0 \ x_4)$, $y=(y_1 \ y_2 \ 0 \ y_4) \in A$

Per α e β qualsiasi, si ha:

$$\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1 \quad \alpha x_2 + \beta y_2 \quad \overbrace{\alpha 0 + \beta 0}^0 \quad \alpha x_4 + \beta y_4) \in A$$

Proposizione Dato un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^m$,

se comunque presi due vettori a e b in A e due scalari α e β , accade che il vettore $\alpha a + \beta b$ appartiene ancora ad A



A è uno spazio vettoriale di dimensione m (**sottospazio vettoriale** di \mathbb{R}^m).

Esempio 1

Consideriamo l'insieme $A = \{x \text{ in } \mathbb{R}^m : x = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{k-1} \ 0 \ x_{k+1} \ \dots \ x_m)\}$ per un k fissato, $1 \leq k \leq m$, cioè il sottoinsieme dei vettori in \mathbb{R}^m che hanno la k -ma componente nulla.

L'insieme A è uno spazio vettoriale di dimensione m .

Verifichiamolo per $m=4$ e $k=3$ con i vettori $x=(x_1 \ x_2 \ 0 \ x_4)$ e $y=(y_1 \ y_2 \ 0 \ y_4)$

$$A = \{x \text{ in } \mathbb{R}^4 : x = (x_1 \ x_2 \ 0 \ x_4)\}$$

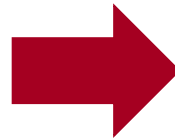
Spazio vettoriale

Definizione (spazio vettoriale o *lineare*)

Prende il nome di **spazio vettoriale di dimensione m** un insieme A (non vuoto) di vettori reali a m componenti **chiuso** rispetto alle operazioni di **somma di vettori** e **prodotto di un vettore per uno scalare** (e quindi anche rispetto all'operazione di combinazione lineare del tipo $\alpha a + \beta b$).

Proposizione Dato un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^m$,

se comunque presi due vettori a e b in A e due scalari α e β , accade che il vettore $\alpha a + \beta b$ appartiene ancora ad A



A è uno spazio vettoriale di dimensione m (**sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^m**).

Esercizio (svolto sulle dispense)

Consideriamo l'insieme:

$$A = \{x \text{ in } \mathbb{R}^m : x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_{m-1}, \sum_{i=1}^{m-1} x_i)\}$$

cioè il sottoinsieme dei vettori in \mathbb{R}^m che hanno l'ultima componente pari alla somma delle prime $m-1$.

Verificare che l'insieme A è uno spazio vettoriale di dimensione m (**sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^m**).

Combinazioni lineari di n vettori

Operazioni con vettori (da Lez. precedente)

Combinazione lineare di due vettori

Dati due vettori a e b con m componenti e due scalari α e β , la **combinazione lineare di a e b** è definita come segue:

$$\begin{aligned}\alpha a + \beta b &= \alpha(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_i \ \dots \ a_m) + \beta(b_1 \ b_2 \ \dots \ b_i \ \dots \ b_m) \\ &= (\alpha a_1 + \beta b_1 \ \alpha a_2 + \beta b_2 \ \dots \ \alpha a_i + \beta b_i \ \dots \ \alpha a_m + \beta b_m)\end{aligned}$$

Esempio

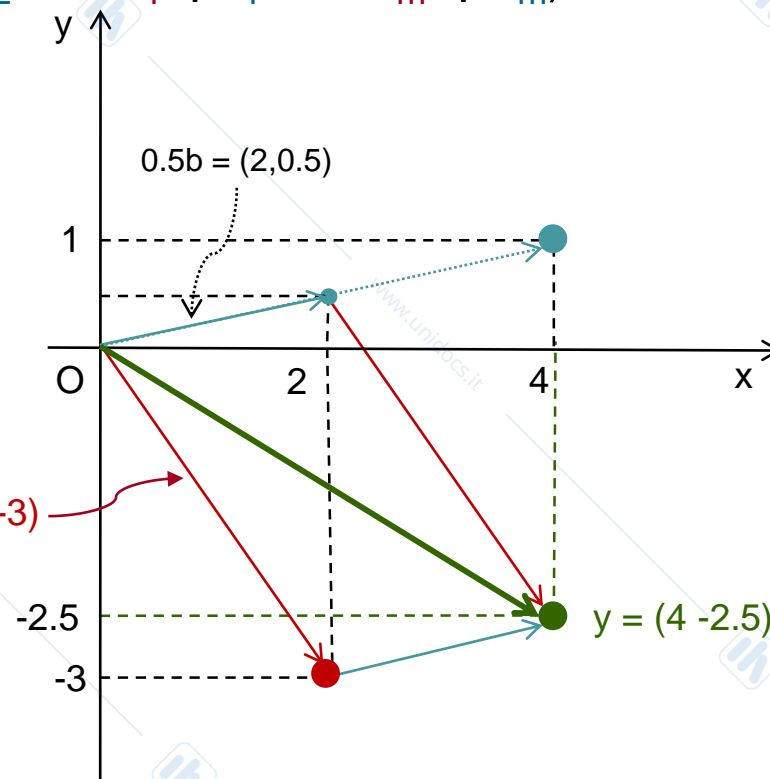
Consideriamo due vettori

$a = (2 \ -3)$ e $b = (4 \ 1)$, con $\alpha = 1$ e $\beta = 0.5$.

Si ha:

$$\begin{aligned}a + 0.5b &= (2 + 0.5 \cdot 4 \quad -3 + 0.5 \cdot 1) \\ &= (4 \ -2.5)\end{aligned}$$

NOTA: Più in generale è possibile definire la combinazione lineare di $n > 2$ vettori a m componenti con n coefficienti reali $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.



Combinazione lineare di n vettori

Combinazione lineare di n ($n \geq 2$) vettori

Dati $n \geq 2$ vettori a m componenti a_1, a_2, \dots, a_n , e n coefficienti reali $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, la **combinazione lineare degli n vettori con i n coefficienti dati** è definita come segue:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_j a_j + \dots + \lambda_n a_n = \sum_{j=1}^n \lambda_j a_j$$

(ATTENZIONE: qui l'indice a pedice si riferisce ai diversi vettori, ciascuno a m componenti)

Esempio

Consideriamo 3 vettori in \mathbb{R}^4 :

$a_1 = (1 \ 2 \ 1 \ 2)$ $a_2 = (2 \ 1 \ 2 \ 1)$ e $a_3 = (3 \ 3 \ 3 \ 3)$ e i coefficienti $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = -1$.

La loro combinazione lineare è:

$$1 (1 \ 2 \ 1 \ 2) + 1 (2 \ 1 \ 2 \ 1) - 1 (3 \ 3 \ 3 \ 3) = (0 \ 0 \ 0 \ 0)$$

Combinazione lineare di n vettori

Combinazione lineare di n ($n \geq 2$) vettori

Dati $n \geq 2$ vettori a m componenti a_1, a_2, \dots, a_n , e n coefficienti reali $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, la **combinazione lineare degli n vettori con i n coefficienti dati** è definita come segue:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_j a_j + \dots + \lambda_n a_n = \sum_{j=1}^n \lambda_j a_j$$

(ATTENZIONE: qui l'indice a pedice si riferisce ai diversi vettori, ciascuno a m componenti)

Osservazione

Il **vettore nullo** di R^m può essere ottenuto come combinazione lineare di un qualsiasi numero di vettori in R^m utilizzando **coefficienti λ tutti nulli**.

NOTA

I **coefficienti** di una combinazione lineare di n vettori possono essere **numeri reali qualsiasi**, anche **nulli**, anche **negativi**.

Uguaglianza 'vettoriale' come insieme di uguaglianze 'scalari'

Uguaglianze vettoriali e scalari

Consideriamo la **combinazione lineare** di $n \geq 2$ vettori a m componenti, a_1, a_2, \dots, a_n , con n scalari $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$:

(n vettori in \mathbb{R}^m)

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_j a_j + \dots + \lambda_n a_n = \sum_{j=1}^n \lambda_j a_j$$

è un vettore
in \mathbb{R}^m

Analizziamola nel dettaglio, considerando i vettori a_1, a_2, \dots, a_n come vettori **colonna di ordine m** :

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} a_1 \\ a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} a_2 \\ a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{bmatrix} a_n \\ a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

Il **risultato** dell'operazione è un **vettore u a m componenti**.

Uguaglianze vettoriali e scalari

Consideriamo la **combinazione lineare** di $n \geq 2$ vettori a m componenti, a_1, a_2, \dots, a_n , con n scalari $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_j a_j + \dots + \lambda_n a_n = \sum_{j=1}^n \lambda_j a_j$$

Moltiplichiamo ciascun vettore per il corrispondente scalare e poi **sommiamo** i vettori risultanti:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \dots + \lambda_n a_{1n} \\ \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \dots + \lambda_n a_{2n} \\ \dots \\ \lambda_1 a_{m1} + \lambda_2 a_{m2} + \dots + \lambda_n a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_m \end{bmatrix}$$

Ogni componente del **vettore u** è la **combinazione lineare** delle **componenti omologhe** dei vettori a_1, a_2, \dots, a_n , con gli scalari $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_m \end{bmatrix}$$

Uguaglianze vettoriali e scalari

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \dots + \lambda_n a_{1n} \\ \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \dots + \lambda_n a_{2n} \\ \dots \\ \lambda_1 a_{m1} + \lambda_2 a_{m2} + \dots + \lambda_n a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_m \end{bmatrix}$$

1 uguaglianza vettoriale (dim. m)

‘Smembriamo’ l’uguaglianza vettoriale:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \dots + \lambda_n a_{1n} = u_1 \\ \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \dots + \lambda_n a_{2n} = u_2 \\ \dots \\ \lambda_1 a_{m1} + \lambda_2 a_{m2} + \dots + \lambda_n a_{mn} = u_m \end{array} \right.$$

sistema di m uguaglianze scalari

L’uguaglianza tra i due vettori a m componenti (**uguaglianza vettoriale**) equivale alle m uguaglianze delle m componenti omologhe dei due vettori (**sistema di m uguaglianze scalari**).

Uguaglianze vettoriali e scalari

Nel caso in cui gli elementi \mathbf{a}_{ij} che definiscono i nostri vettori sono **noti**, ma i coefficienti λ_j con i quali si ottiene la combinazione lineare sono **incogniti**



sistema di m equazioni lineari

Risolvere un sistema di equazioni lineari nelle **incognite** $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ significa **individuare n valori reali** da assegnare ai coefficienti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tali che, sostituendo questi valori nel sistema, tutte le equazioni del sistema risultano verificate.

‘Smembriamo’ l’uguaglianza vettoriale:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \mathbf{a}_{11} + \lambda_2 \mathbf{a}_{12} + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_{1n} = \mathbf{u}_1 \\ \lambda_1 \mathbf{a}_{21} + \lambda_2 \mathbf{a}_{22} + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_{2n} = \mathbf{u}_2 \\ \dots \\ \lambda_1 \mathbf{a}_{m1} + \lambda_2 \mathbf{a}_{m2} + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_{mn} = \mathbf{u}_m \end{array} \right.$$

sistema di m uguaglianze scalari

L’uguaglianza tra i due vettori a m componenti (**uguaglianza vettoriale**) equivale alle m uguaglianze delle m componenti omologhe dei due vettori (**sistema di m uguaglianze scalari**).

Uguaglianze vettoriali e scalari

Nel caso in cui gli elementi \mathbf{a}_{ij} che definiscono i nostri vettori sono **noti**, ma i coefficienti λ_j con i quali si ottiene la combinazione lineare sono **incogniti**



sistema di m equazioni lineari

Risolvere un sistema di equazioni lineari nelle **incognite** $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ significa **individuare n valori reali** da assegnare ai coefficienti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tali che, sostituendo questi valori nel sistema, tutte le equazioni del sistema risultano verificate.

Osservazione: Quando un sistema di uguaglianze dipende da coefficienti incogniti, per questi si usa la notazione x_1, x_2, \dots, x_n che solitamente si adotta in matematica per quantità non note (dette anche **variabili del sistema**).

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \dots + \lambda_n a_{1n} = u_1 \\ \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \dots + \lambda_n a_{2n} = u_2 \\ \dots \\ \lambda_1 a_{m1} + \lambda_2 a_{m2} + \dots + \lambda_n a_{mn} = u_m \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \dots + x_n a_{1n} = u_1 \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \dots + x_n a_{2n} = u_2 \\ \dots \\ x_1 a_{m1} + x_2 a_{m2} + \dots + x_n a_{mn} = u_m \end{array} \right.$$

Dipendenza e indipendenza lineare

Dipendenza e indipendenza lineare

Definizione: Vettori linearmente dipendenti

Dati $n \geq 2$ vettori a m componenti $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$, dello spazio vettoriale \mathbb{R}^m , essi si dicono **linearmente dipendenti** se esistono n coefficienti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, non tutti nulli, tali che:

$$\lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 + \dots + \lambda_n \underline{a}_n = \underline{0}_m$$

cioè la combinazione lineare è uguale al **vettore nullo**.

Esempio 1

I **due** vettori $(1 \ 2 \ 3)$ e $(2 \ 4 \ 6)$ (di ordine 3) sono linearmente dipendenti, infatti scegliendo $\lambda_1=2$ e $\lambda_2=-1$ (non nulli) si ha:

$$2 \ (1 \ 2 \ 3) + (-1) \ (2 \ 4 \ 6) = (2 \ 4 \ 6) + (-2 \ -4 \ -6) = \mathbf{(0 \ 0 \ 0)}$$

È possibile ottenere il vettore nullo di ordine 3 come combinazione lineare dei due vettori dati, con scalari non tutti nulli.

Dipendenza e indipendenza lineare

Definizione: Vettori linearmente dipendenti

Dati $n \geq 2$ vettori a m componenti $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$, dello spazio vettoriale \mathbb{R}^m , essi si dicono **linearmente dipendenti** se esistono n coefficienti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, non tutti nulli, tali che:

$$\lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 + \dots + \lambda_n \underline{a}_n = \underline{0}_m$$

cioè la combinazione lineare è uguale al **vettore nullo**.

Esempio 2

I due vettori $(-2 \ -1)$ e $(-4 \ -2)$ sono linearmente dipendenti, infatti la condizione:

$$\lambda_1 (-2 \ -1) + \lambda_2 (-4 \ -2) = (0 \ 0)$$

si ottiene facilmente **per ogni scelta di λ_1 e λ_2 tali che $\lambda_1 = -2 \lambda_2$** .

Per verificarlo basta impostare e risolvere il sistema:

$$\begin{cases} -2\lambda_1 - 4\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Dipendenza e indipendenza lineare

Definizione: Vettori linearmente dipendenti

Dati $n \geq 2$ vettori a m componenti $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$, dello spazio vettoriale \mathbb{R}^m , essi si dicono **linearmente dipendenti** se esistono n coefficienti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, non tutti nulli, tali che:

$$\lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 + \dots + \lambda_n \underline{a}_n = \underline{0}_m$$

cioè la combinazione lineare è uguale al **vettore nullo**.

Proprietà

Un insieme di n vettori tra i quali è **incluso il vettore tutto nullo** è necessariamente un insieme di vettori **linearmente dipendenti**.

Infatti scegliendo **non nullo** lo scalare che nella combinazione lineare che **moltiplica il vettore nullo** e nulli tutti gli altri, si ottiene sempre il vettore nullo:

$$0 \cdot \underline{a}_1 + 0 \cdot \underline{a}_2 + \dots + 0 \cdot \underline{a}_{n-1} + \lambda_n \cdot \underline{0} = \underline{0}$$

con $\lambda_n \neq 0$.

Dipendenza e indipendenza lineare

Teorema

I vettori $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ in \mathbb{R}^m sono **linearmente dipendenti (A1)** se e solo se **almeno uno** di essi è **esprimibile come combinazione lineare degli altri n-1 (A2)** (e si dice che tale vettore è linearmente dipendente dagli altri).

Dimostrazione: HP (A2) \rightarrow TS (A1)

Consideriamo i vettori $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ in \mathbb{R}^m e assumiamo che ce ne sia uno, SPIG il vettore \underline{a}_n , che è **esprimibile come combinazione lineare degli altri n-1**, cioè esistono n-1 coefficienti λ_j tali che:

$$\underline{a}_n = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \underline{a}_j$$

Equivalentemente:

$$\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \underline{a}_j - 1 \underline{a}_n = \underline{0}$$

che è una combinazione lineare di $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ con coefficienti non tutti nulli (dato che $\lambda_n = -1 \neq 0$) che corrisponde al vettore nullo $\underline{0}$.



Per definizione i vettori $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ sono **linearmente dipendenti (A1)**.

Dipendenza e indipendenza lineare

Teorema

I vettori $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ in \mathbb{R}^m sono **linearmente dipendenti (A1)** se e solo se **almeno uno** di essi è **esprimibile come combinazione lineare degli altri n-1 (A2)** (e si dice che tale vettore è linearmente dipendente dagli altri).

Dimostrazione: HP (A1) \rightarrow TS (A2)

Consideriamo i vettori $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ in \mathbb{R}^m e assumiamo che siano **linearmente dipendenti**. Allora, per definizione, si ha:

$$\lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 + \dots + \lambda_h \underline{a}_h + \dots + \lambda_n \underline{a}_n = \underline{0}$$

e almeno uno tra i coefficienti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ è diverso da zero, SPIG $\lambda_h \neq 0$.

Allora, dividendo per $\lambda_h \neq 0$ a destra e a sinistra dell'uguaglianza si ottiene:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_h} \underline{a}_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_h} \underline{a}_2 + \dots + \underline{a}_h + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda_h} \underline{a}_n = \underline{0}$$

$$\Leftrightarrow \underline{a}_h = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_h}\right) \underline{a}_1 + \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_h}\right) \underline{a}_2 + \dots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_h}\right) \underline{a}_n$$

che stabilisce che il vettore \underline{a}_h è **esprimibile come combinazione lineare degli altri n-1**, con coefficienti $-\lambda_j/\lambda_h$ **(A2)**. 

Dipendenza e indipendenza lineare

Definizione: Vettori linearmente indipendenti

Dati $n \geq 2$ vettori a m componenti a_1, a_2, \dots, a_n , dello spazio vettoriale \mathbb{R}^m , si dicono **linearmente indipendenti** se non sono linearmente dipendenti.

Equivalentemente:

Dati $n \geq 2$ vettori a m componenti a_1, a_2, \dots, a_n , dello spazio vettoriale \mathbb{R}^m , si dicono **linearmente indipendenti** se l'unica loro combinazione lineare uguale al vettore nullo è quella con gli n coefficienti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, **tutti nulli**.

Esempio 1

I vettori $(2 \ 0 \ 0)$ e $(0 \ 1 \ 1)$ sono linearmente indipendenti, infatti per avere

$$\lambda_1 (2 \ 0 \ 0) + \lambda_2 (0 \ 1 \ 1) = (0 \ 0 \ 0)$$

occorre necessariamente porre $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 0$ (per verificarlo, impostare il sistema di equazioni scalari).

Dipendenza e indipendenza lineare

Definizione: Vettori linearmente indipendenti

Dati $n \geq 2$ vettori a m componenti a_1, a_2, \dots, a_n , dello spazio vettoriale \mathbb{R}^m , si dicono **linearmente indipendenti** se non sono linearmente dipendenti.

Equivalentemente:

Dati $n \geq 2$ vettori a m componenti a_1, a_2, \dots, a_n , dello spazio vettoriale \mathbb{R}^m , si dicono **linearmente indipendenti** se l'unica loro combinazione lineare uguale al vettore nullo è quella con gli n coefficienti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, **tutti nulli**.

Esempio 2

I vettori *fondamentali* dello spazio vettoriale \mathbb{R}^3 $(1 \ 0 \ 0)$, $(0 \ 1 \ 0)$ e $(0 \ 0 \ 1)$ sono linearmente indipendenti, infatti:

$$\lambda_1 (1 \ 0 \ 0) + \lambda_2 (0 \ 1 \ 0) + \lambda_3 (0 \ 0 \ 1) = (0 \ 0 \ 0)$$

equivale a $(\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3) = (0 \ 0 \ 0)$, cioè $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

NOTA Il risultato vale per gli m vettori fondamentali di qualsiasi ordine m .

Dipendenza e indipendenza lineare

Vediamo ora (senza dimostrazione) due teoremi che formalizzano due importanti proprietà degli insiemi di vettori lin. dip e lin. indep.

Teorema

Sia $S = \{a_1, \dots, a_n\}$ un insieme di n vettori in \mathbb{R}^m **linearmente indipendenti**, allora ogni sottoinsieme di S è ancora un insieme di vettori linearmente indipendenti.

Eliminando da S alcuni vettori, i vettori rimanenti sono ancora linearmente indipendenti.

La proprietà di **indipendenza lineare** di un insieme di vettori si mantiene in qualsiasi sottoinsieme di S .

Dipendenza e indipendenza lineare

Vediamo ora (senza dimostrazione) due teoremi che formalizzano due importanti proprietà degli insiemi di vettori lin. dip e lin. indep.

Teorema

Sia $S = \{a_1, \dots, a_n\}$ un insieme di n vettori in \mathbb{R}^m **linearmente dipendenti**. Allora ogni insieme di vettori contenente l'insieme S è ancora un insieme di vettori linearmente dipendenti.

Aggiungendo vettori in S l'insieme di vettori è ancora un insieme di vettori linearmente dipendenti.

La proprietà di **dipendenza lineare** di un insieme di vettori S si mantiene in qualsiasi insieme che contiene S .

Argomenti della lezione

Definizione generale di:

- combinazione lineare di n vettori
- spazio vettoriale (o *lineare*)
- uguaglianza vettoriale e insieme di uguaglianze scalari
- sistema di equazioni lineari
- vettori linearmente dipendenti
- vettori linearmente indipendenti
- vettori fondamentali dello spazio vettoriale \mathbb{R}^m

Enunciato e dimostrazione dei seguenti risultati:

Proprietà

Un insieme di n vettori tra i quali è incluso il vettore tutto nullo è necessariamente un insieme di vettori linearmente dipendenti.

Teorema

I vettori a_1, \dots, a_n in \mathbb{R}^m sono linearmente dipendenti **(A1)** se e solo se **almeno uno** di essi è esprimibile come combinazione lineare degli altri $n-1$ **(A2)** (e si dice che tale vettore è linearmente dipendente dagli altri).