Matematica Corso Base
a.a. 2019-2020

ALGEBRA LINEARE
LEZIONE VI

Federica Ricca

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Operazioni con matrici

Operazioni con matrici: **moltiplicazione**

Moltiplicazione tra due matrici ‘conformi’

NOTA: Dalla definizione di c_{ij} è evidente l’importanza che A sia di ordine m x **n** e B di ordine **n** x q, cioè che il numero di colonne di A sia uguale al numero di righe di B (si dice anche che le matrici A e B sono **conformi**).

È questa condizione che permette di eseguire il prodotto scalare tra una riga di A (che ha n elementi) e una colonna di B (che ha n elementi).

$$c_{ij} = \langle a_{i\cdot}\, , b_{\cdot j} \rangle = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}$$

Esempio Consideriamo le matrici:

$$A_{32} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$C_{33} = A\,B = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 3 \\ 13 & 6 & -7 \\ 18 & 8 & -8 \end{pmatrix}$$

Operazioni con matrici

OSSERVAZIONE

Conoscendo l'ordine della matrice A e della matrice B, è possibile individuare subito l'ordine della matrice C.

Il numero di **righe di C** è uguale al numero di **righe di A**;
Il numero di **colonne di C** è uguale al numero di **colonne di B**.

Ciò deriva dal fatto che per calcolare gli elementi di C, per ogni riga di A (m righe) eseguiamo il prodotto scalare con ogni colonna di B (q colonne). Di conseguenza la matrice C ha **m·n elementi**.

Esempio Consideriamo le matrici:

$$A_{32} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C_{33}} = A\,B = \begin{pmatrix} \mathbf{-4} & -2 & 3 \\ 13 & 6 & -7 \\ 18 & 8 & -8 \end{pmatrix}$$

C ha 3 righe e 3 colonne
C ha 3·3=9 elementi

Operazioni con matrici

OSSERVAZIONE

Conoscendo l'ordine della matrice A e della matrice B, è possibile individuare subito l'ordine della matrice C.

Il numero di **righe di C** è uguale al numero di **righe di A**;
Il numero di **colonne di C** è uguale al numero di **colonne di B**.

Ciò deriva dal fatto che per calcolare gli elementi di C, per ogni riga di A (m righe) eseguiamo il prodotto scalare con ogni colonna di B (q colonne). Di conseguenza la matrice C ha m·n elementi.

In generale si ha:

Ordine di A e B	Ordine di C
A **m**xn B nx**q**	C mxq (matrice mxq)
A **1**xn B nx**q**	C 1xq (vettore riga a q componenti)
A **m**xn B nx**1**	C mx1 (vettore colonna a m componenti)
A **1**xn B nx**1**	C 1x1 (scalare)

Sistemi di equazioni lineari

Consideriamo:

$$A_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B_{n1} = x_{n1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$A_{mn}x_{n1}$ è un vettore colonna a m componenti

In generale si ha:

Ordine di A e B	Ordine di C
A **m**xn B nx**q**	C mxq (matrice mxq)
A **1**xn B nx**q**	C 1xq (vettore riga a q componenti)
A **m**xn B nx**1**	C mx1 (vettore colonna a m componenti)
A **1**xn B nx**1**	C 1x1 (scalare)

Sistemi di equazioni lineari

Consideriamo:

$$A_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B_{n1} = x_{n1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$A_{mn}x_{n1}$ è un vettore colonna a m componenti

Si ha:

$$\sum_{s=1}^{n} a_{1s}x_s$$

primo elemento di $A_{mn}x_{n1}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Il risultato del prodotto tra A e il vettore x è un vettore colonna a m componenti che possiamo indicare con b.

Sistemi di equazioni lineari

Consideriamo:

$$A_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B_{n1} = x_{n1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$A_{mn}x_{n1}$ è un vettore colonna a m componenti

Si ha:

$$\sum_{s=1}^{n} a_{1s} x_s$$

primo elemento di $A_{mn}x_{n1}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n} \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \\ \dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Il risultato del prodotto tra A e il vettore x è un vettore colonna a m componenti che possiamo indicare con b.

Sistemi di equazioni lineari

$$\begin{pmatrix} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \dots + a_{1n}\,x_n \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \dots + a_{2n}\,x_n \\ \dots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \dots + a_{mn}\,x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Si tratta di dell'equazione vettoriale già vista in precedenza e che, come sappiamo, corrisponde al sistema di m equazioni scalari:

$$\begin{cases} x_1\,a_{11} + x_2\,a_{12} + \dots + x_n a_{1n} = b_1 \\ x_1\,a_{21} + x_2\,a_{22} + \dots + x_n a_{2n} = b_2 \\ \dots \\ x_1\,a_{m1} + x_2\,a_{m2} + \dots + x_n a_{mn} = b_m \end{cases}$$

Un sistema di m equazioni lineari (scalari) nelle m incognite $x_1, \dots, x_n$ corrisponde al **prodotto tra la matrice A** di ordine mxn dei coefficienti del sistema **e il vettore (colonna) x** a n componenti (*incognito*).

Sistemi di equazioni lineari

$$\begin{pmatrix} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots + a_{2n}\, x_n \\ \ldots \\ a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + \ldots + a_{mn}\, x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Si tratta di dell'equazione vettoriale già vista in precedenza e che, come sappiamo, corrisponde al sistema di m equazioni scalari:

$$\begin{cases} x_1\, a_{11} + x_2\, a_{12} + \ldots + x_n a_{1n} = b_1 \\ x_1\, a_{21} + x_2\, a_{22} + \ldots + x_n a_{2n} = b_2 \\ \ldots \\ x_1\, a_{m1} + x_2\, a_{m2} + \ldots + x_n a_{mn} = b_m \end{cases} \Longleftrightarrow \boxed{A_{mn}\, x_{n1} = b_{m1}}$$

Sistema di equazioni lineari in **forma matriciale**

Un sistema di m equazioni lineari (scalari) nelle m incognite $x_1, \ldots, x_n$ corrisponde al **prodotto tra la matrice A** di ordine mxn dei coefficienti del sistema **e il vettore (colonna) x** a n componenti (*incognito*).

Sistemi di equazioni lineari

$$\begin{cases} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \dots + x_n a_{1n} = b_1 \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \dots + x_n a_{2n} = b_2 \\ \dots \\ x_1 a_{m1} + x_2 a_{m2} + \dots + x_n a_{mn} = b_m \end{cases}$$

Sistema di equazioni lineari

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \\ \boxed{a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n} \\ \dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_m \end{bmatrix}$$

Equazione vettoriale

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n} \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \\ \dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Sistema in forma matriciale

$$A_{mn} \, x_{n1} = b_{m1}$$

Determinante di una matrice

Determinante di una matrice (QUADRATA)

Dato il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \ldots + x_n a_{1n} = b_1 \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \ldots + x_n a_{2n} = b_2 \\ \ldots \\ x_1 a_{m1} + x_2 a_{m2} + \ldots + x_n a_{mn} = b_m \end{cases}$$

$$\boxed{A_{mn}\, x_{n1} = b_{m1}}$$

Abbiamo visto come sia possibile stabilire l'esistenza o meno di sue soluzioni attraverso i teoremi di Rouché-Capelli e di Cramer.

Per poter applicare operativamente questi teoremi è necessario però saper calcolare il **rango** di un insieme di vettori (precisamente dell'insieme incompleto $\{a_1,\ldots, a_n\}$ e dell'insieme completo $\{a_1,\ldots, a_n, b\}$).

Determinante di una matrice (QUADRATA)

Dato il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \dots + x_n a_{1n} = b_1 \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \dots + x_n a_{2n} = b_2 \\ \dots \\ x_1 a_{m1} + x_2 a_{m2} + \dots + x_n a_{mn} = b_m \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \dots + x_n a_{1n} = b_1 \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \dots + x_n a_{2n} = b_2 \\ \dots \\ x_1 a_{n1} + x_2 a_{n2} + \dots + x_n a_{nn} = b_n \end{cases}$$

$$\boxed{A_{mn}\, x_{n1} = b_{m1}} \qquad \boxed{A_{nn}\, x_{n1} = b_{n1}}$$

Abbiamo visto come sia possibile stabilire l'esistenza o meno di sue soluzioni attraverso i teoremi di Rouché-Capelli e di Cramer.

Per poter applicare operativamente questi teoremi è necessario però saper calcolare il **rango** di un insieme di vettori (precisamente dell'insieme incompleto $\{a_1,..., a_n\}$ e dell'insieme completo $\{a_1,..., a_n,b\}$).

Per ottenere uno strumento operativo per il **calcolo del rango di un insieme di vettori**, consideriamo il caso di un sistema **quadrato** (n colonne in R^n) e introduciamo ora la nozione di **determinante** di una matrice **quadrata**.

Determinante di una matrice (QUADRATA)

Determinante di una matrice quadrata A

Ad ogni matrice **quadrata** è possibile associare un numero reale che prende il nome di **determinante della matrice**.

Tale numero è fondamentale per stabilire se gli n vettori colonna dell'insieme $\{a_1,..., a_n\}$ sono linearmente dipendenti o indipendenti.

Si **dimostra** infatti che:

n vettori di R^n sono **linearmente dipendenti**	⟺	il **determinante** della matrice ottenuta per accostamento degli n vettori $a_1,..., a_n$ è **nullo**.
n vettori di R^n sono **linearmente indipendenti**	⟺	il determinante della matrice ottenuta per accostamento degli n vettori $a_1,..., a_n$ è **diverso da zero**.

NOTA: Il determinante è definito **SOLO PER MATRICI QUADRATE**.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Determinante di una matrice (QUADRATA)

Determinante di una matrice quadrata A

Ad ogni matrice **quadrata** è possibile associare un numero reale che prende il nome di **determinante della matrice**.

Tale numero è fondamentale per stabilire se gli n vettori colonna dell'insieme $\{a_1,\dots, a_n\}$ sono linearmente dipendenti o indipendenti.

Il **determinante** di una matrice è dunque un **numero caratteristico** ad essa associato

- La formula generale per calcolarlo è abbastanza complicata.
- Nel caso particolare di una matrice di ordine **2 x 2** è possibile calcolare agevolmente il determinante come segue:

$$A_{22} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \blacktriangleright \quad \mathbf{det(A)} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Determinante di una matrice (QUADRATA)

Esempio 1 Consideriamo la matrice di ordine **2 x 2** :

$$A_{22} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \blacktriangleright \quad \mathbf{det(A) = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 6 - 2 = 4}$$

Esempio 2 Consideriamo la matrice di ordine **1 x 1** :

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 10 \end{bmatrix} \quad \blacktriangleright \quad \mathbf{det(A) = 10}$$

- La formula generale per calcolarlo è abbastanza complicata.
- Nel caso particolare di una matrice di ordine **2 x 2** è possibile calcolare agevolmente il determinante come segue:

$$A_{22} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \blacktriangleright \quad \mathbf{det(A)} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

- Nel caso particolare di una matrice di ordine **1 x 1** (scalare) il determinante corrisponde all'unico elemento della matrice.

Determinante di una matrice (QUADRATA)

Vale il seguente risultato:

Dati 2 vettori di ordine 2, diversi dal vettore nullo,

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

sono linearmente dipendenti **se e solo se** risulta:

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0$$

- La formula generale per calcolarlo è abbastanza complicata.
- Nel caso particolare di una matrice di ordine **2 x 2** è possibile calcolare agevolmente il determinante come segue:

$$A_{22} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \blacktriangleright \quad \mathbf{det(A) =} a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

- Nel caso particolare di una matrice di ordine **1 x 1** (scalare) il determinante corrisponde all'unico elemento della matrice.

Determinante di una matrice (QUADRATA)

Per calcolare agevolmente il determinante di una matrice A di ordine n qualsiasi si ricorre al risultato fondamentale stabilito dal **Primo Teorema di Laplace**.

Per poter enunciare questo teorema occorre introdurre le nozioni di **minore complementare** e **complemento algebrico** di un elemento a_{ij} della matrice A.

- La formula generale per calcolarlo è abbastanza complicata.
- Nel caso particolare di una matrice di ordine **2 x 2** è possibile calcolare agevolmente il determinante come segue:

$$A_{22} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \blacktriangleright \boxed{\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

- Nel caso particolare di una matrice di ordine **1 x 1** (scalare) il determinante corrisponde all'unico elemento della matrice.

Calcolo del determinante di una matrice (QUADRATA)

Minore complementare di a_{ij}

Definizione (Minore complementare di a_{ij})
Data la matrice quadrata A di ordine n prende il nome di **minore complementare di a_{ij}**, e lo si indica con **M_{ij}**, il **determinante** della matrice di ordine n−1 ottenuta sopprimendo dalla matrice A la i-esima riga e la j-esima colonna.

Esempio 1 Per una matrice A di ordine 2: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ▶ $M_{11} = a_{22}$

Minore complementare di a_{ij}

Definizione (Minore complementare di a_{ij})
Data la matrice quadrata A di ordine n prende il nome di **minore complementare di a_{ij}**, e lo si indica con M_{ij}, il **determinante** della matrice di ordine n−1 ottenuta sopprimendo dalla matrice A la i-esima riga e la j-esima colonna.

Esempio 1 Per una matrice A di ordine 2: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$M_{11} = a_{22}$ $M_{12} = a_{21}$

$M_{21} = a_{12}$ $M_{22} = a_{11}$

Minore complementare di a_{ij}

Definizione (Minore complementare di a_{ij})
Data la matrice quadrata A di ordine n prende il nome di **minore complementare di a_{ij}**, e lo si indica con M_{ij}, il **determinante** della matrice di ordine n−1 ottenuta sopprimendo dalla matrice A la i-esima riga e la j-esima colonna.

Esempio 1 Per una matrice A di ordine 2: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ▶ $M_{11} = a_{22}$ $M_{12} = a_{21}$ $M_{21} = a_{12}$ $M_{22} = a_{11}$

Esempio 2 Consideriamo la matrice A di ordine 3 e calcoliamo il minore complementare dell'elemento $\mathbf{a_{32}}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad \blacktriangleright \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & 5 \\ 4 & & 8 \\ & & \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

a_{32} a_{32}

minore complementare di a_{32} : $M_{32} = \det\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = 1 \cdot 8 - 4 \cdot 5 = 8 - 20 = -12$

Complemento algebrico di a_{ij}

Definizione (Complemento algebrico di a_{ij})
Prende il nome di **complemento algebrico dell'elemento a_{ij}** il numero

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Osservazione
Si osservi che il complemento algebrico A_{ij}:
- coincide con il minore complementare di a_{ij} se la somma degli indici i+j è pari
- è l'opposto del minore complementare di a_{ij} se la somma degli indici i+j è dispari.

Esempio 2 Consideriamo la matrice A di ordine 3 e calcoliamo il complemento algebrico dell'elemento $\mathbf{a_{32}}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

a_{32}

Per l'elemento a_{32} si ha i=3 e j=2,
perciò → i+j = 3 +2 = **5 dispari**

Il complemento algebrico di a_{32} è:
$A_{ij} = \mathbf{-\,M_{ij}} = \mathbf{12}$

minore complementare di a_{32} : $M_{32} = \det\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = 1\cdot 8 - 4\cdot 5 = 8 - 20 = -12$

Determinante di una matrice (QUADRATA)

Teorema (Primo teorema di Laplace)

Il **determinante** di una **matrice quadrata A di ordine n ≥ 1** è uguale alla somma dei prodotti degli elementi di una linea (riga o colonna) per i rispettivi complementi algebrici, cioè:

$$\det(A) = \begin{cases} a & \text{se A è di ordine 1 (scalare)} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} & \text{se A è di ordine n>1} \end{cases}$$

$$A_{nn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ & & & \dots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ & & & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

sviluppo secondo la riga i

oppure, equivalentemente:

$$\det(A) = \begin{cases} a & \text{se A è di ordine 1 (scalare)} \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} & \text{se A è di ordine n>1} \end{cases}$$

$$A_{nn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ & & & \dots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ & & & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

sviluppo secondo la colonna j

Caratterizzazione costruttiva del determinante di A

Determinante di una matrice (QUADRATA)

Esempio 1 Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il determinante di A utilizzando la seconda formula e sviluppando secondo la colonna 1:

$$\mathbf{det}(A) = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} = \underbrace{\underbrace{1}_{a_{11}} \cdot \underbrace{(-1)^{1+1}1}_{\mathbf{a_{22}}} + \underbrace{2}_{a_{21}} \cdot \underbrace{(-1)^{2+1}3}_{\mathbf{-\,a_{12}}}}_{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} = 1 - 6 = \mathbf{-5}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_{11} = a_{22} = 1 \qquad \mathbf{A_{11}} = (-1)^{1+1}\, 1 = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_{21} = a_{12} = 3 \qquad \mathbf{A_{21}} = (-1)^{2+1}\, 3 = -3$$

Determinante di una matrice (QUADRATA)

Esempio 1 Consideriamo la matrice

$$A_2 = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il determinante di A utilizzando la seconda formula e sviluppando secondo la colonna 1:

$$\mathbf{det}(A_2) = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} = \underbrace{\underbrace{1}_{a_{11}} \cdot \underbrace{(-1)^{1+1}1}_{a_{22}} + \underbrace{2}_{a_{21}} \cdot \underbrace{(-1)^{2+1}3}_{-\ a_{12}}}_{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} = 1 - 6 = \mathbf{-5}$$

NOTA

Abbiamo così verificato attraverso l'applicazione del Primo Teorema di Laplace la regola 'immediata' già vista prima per il calcolo del determinante di una matrice quadrata di ordine 2.

→ Il determinante di A_2 è la differenza tra il prodotto degli elementi sulla diagonale principale di A_2 e il prodotto degli elementi della sua diagonale secondaria.

- Nel caso particolare di una matrice di ordine **2 x 2** è possibile calcolare agevolmente il determinante come segue:

$$A_{22} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \blacktriangleright \mathbf{det(A)} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Determinante di una matrice (QUADRATA)

Esempio 1 Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il determinante di A utilizzando la seconda formula e sviluppando secondo la colonna 1:

$$\det(A) = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} = 1 \cdot (-1)^{1+1} 1 + 2 \cdot (-1)^{2+1} 3 = 1 - 6 = \mathbf{-5}$$

ESERCIZIO 1

Calcolare il determinante di A applicando

- la prima formula, con lo sviluppo secondo la prima e la seconda riga
- la seconda formula con lo sviluppo secondo la seconda colonna

Verificare che in tutti i casi si ottiene sempre lo stesso valore det(A)=-5.

ESERCIZIO 2

Calcolare il determinante della matrice A utilizzando il Teorema di Laplace.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Regola di Sarrus per $\det(A_3)$

Determinante di una matrice (QUADRATA)

Consideriamo ora una matrice A quadrata di ordine 3:

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & \boxed{a_{23}} \\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & \boxed{a_{33}} \end{pmatrix}$$

Siccome i minori complementari di ogni elemento di una matrice di ordine 3 sono **determinanti di matrici di ordine 2**, le formule del Primo Teorema di Laplace sono abbastanza semplici anche per A_3.

Sviluppando secondo la **prima riga** si ha:

$$\det(A) = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$$

Esempio 1 Consideriamo la matrice A e sviluppiamo secondo la prima riga:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \cdot A_{11} + 2 \cdot A_{12} + 5 \cdot A_{13}$$
$$= 1(0-8) - 2(24-24) + 5(4-0) = -8 + 20 = 12$$

Determinante di una matrice (QUADRATA)

Consideriamo c
quadrata di ordi

$$\det(A) = \begin{cases} a & \text{se A è di ordine 1 (scalare)} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} & \text{se A è di ordine n>1} \end{cases}$$

$$A_{nn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ & & & \dots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ & & & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

sviluppo secondo la riga i

Siccome i mino
ordine 3 sono **determinanti di matrici di ordine 2**, le formule del Primo Teorema di Laplace sono abbastanza semplici anche per A_3.

Sviluppando secondo la **prima riga** si ha:

$$\det(A) = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$$

Esempio 1 Consideriamo la matrice A e sviluppiamo secondo la prima riga:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \cdot A_{11} + 2 \cdot A_{12} + 5 \cdot A_{13}$$
$$= 1(0-8) - 2(24-24) + 5(4-0) = -8 + 20 = 12$$

Regola di Sarrus

Consideriamo ora una matrice A quadrata di ordine 3:

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Siccome i minori complementari di ogni elemento di una matrice di ordine 3 sono **determinanti di matrici di ordine 2**, le formule del Primo Teorema di Laplace sono abbastanza semplici anche per A_3.

Sviluppando secondo la **prima riga** si ha:

$$\mathbf{det}(A) = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$$

$$= a_{11} \cdot \underbrace{(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23})} - a_{12} \cdot \underbrace{(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23})} + a_{13} \cdot \underbrace{(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})}$$

Formula per determinante di matrici di ordine 2

Eseguendo i calcoli si ottiene l'espressione seguente:

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}$$

Regola di Sarrus

Regola di Sarrus (per le matrici di ordine 3)
Come per le matrici di ordine 2, anche per le matrici di ordine 3 esiste una regola pratica (meccanica) per il calcolo del determinante.

Data la matrice A_3

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

1. Accostare una copia delle prime due colonne dopo la terza

Regola di Sarrus

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Regola di Sarrus (per le matrici di ordine 3)

Come per le matrici di ordine 2, anche per le matrici di ordine 3 esiste una regola pratica (meccanica) per il calcolo del determinante.

Data la matrice A_3

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ccc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right|$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

1. Accostare una copia delle prime due colonne dopo la terza

2. Sommare i prodotti degli elementi che giacciono su ciascuna delle **frecce continue**.

Regola di Sarrus

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Regola di Sarrus (per le matrici di ordine 3)

Come per le matrici di ordine 2, anche per le matrici di ordine 3 esiste una regola pratica (meccanica) per il calcolo del determinante.

Data la matrice A_3

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ccc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right|$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31}$$

1. Accostare una copia delle prime due colonne dopo la terza
2. Sommare i prodotti degli elementi che giacciono su ciascuna delle **frecce continue**.
3. Sommare i prodotti degli elementi che giacciono su ciascuna delle **frecce tratteggiate** e …

Regola di Sarrus

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Regola di Sarrus (per le matrici di ordine 3)

Come per le matrici di ordine 2, anche per le matrici di ordine 3 esiste una regola pratica (<u>meccanica</u>) per il calcolo del determinante.

Data la matrice A_3

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\left| \begin{array}{ccc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right|$$

1. Accostare una copia delle prime due colonne dopo la terza

2. Sommare i prodotti degli elementi che giacciono su ciascuna delle **frecce continue**.

3. Sommare i prodotti degli elementi che giacciono su ciascuna delle **frecce tratteggiate** e sottrarre tale somma a quella calcolata in **2.**

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= \boldsymbol{a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}}$$

Regola di Sarrus

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Regola di Sarrus (per le matrici di ordine 3)

Come per le matrici di ordine 2, anche per le matrici di ordine 3 esiste una regola pratica (<u>meccanica</u>) per il calcolo del determinante.

Data la matrice A_3

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

1. Accostare una copia delle prime due colonne dopo la terza

2. Sommare i prodotti degli

$$\mathbf{det}(A) = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$$

$$= \boldsymbol{a_{11}} \cdot \underbrace{(\boldsymbol{a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}})} - \boldsymbol{a_{12}} \cdot \underbrace{(\boldsymbol{a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}})} + \boldsymbol{a_{13}} \cdot \underbrace{(\boldsymbol{a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}})}$$

Formula per determinante di matrici di ordine 2

somma a quella calcolata in 2.

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= \boldsymbol{a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}}$$

Proprietà del determinante

Principali proprietà del determinante

(ricordiamo che con il termine ***linea*** si indica genericamente una **riga** o una **colonna** della matrice)

Calcolare det(A) con la Regola di Laplace sviluppando secondo la prima riga

P1. Se sono nulli tutti gli elementi di una linea il determinante è nullo.

Si verifica facilmente tenendo conto che si può applicare la formula del primo Teorema di Laplace sviluppando secondo la linea nulla.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

P2. Se due linee **parallele** sono **uguali** il determinante è nullo.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

P3. Se una riga (colonna) è **combinazione lineare** di altre righe (colonne) il determinante è nullo.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

NOTA P1 e P2 sono casi particolari di P3.

Argomenti della lezione

Definizione generale di:

- Sistema di equazioni lineari in forma matriciale
- Determinante di una matrice (quadrata)
- Minore complementare di a_{ij}
- Complemento algebrico di a_{ij}
- Primo teorema di Laplace
- Regola di Sarrus per il calcolo del determinante di una matrice 3x3
- Proprietà del determinante.

Enunciato di:

Proposizione

n vettori di R^n sono **linearmente dipendenti** ⟺ il determinante della matrice ottenuta per accostamento degli n vettori $a_1,\ldots, a_n$ è **nullo**.

n vettori di R^n sono **linearmente indipendenti** ⟺ il determinante della matrice ottenuta per accostamento degli n vettori $a_1,\ldots, a_n$ è **diverso da zero**.

Primo Teorema di Laplace.