

# Matematica Corso Base a.a. 2019-2020

ALGEBRA LINEARE  
LEZIONE IX

Federica Ricca



SAPIENZA  
UNIVERSITÀ DI ROMA

# Soluzione di un sistema di equazioni lineari: **Caso 1: $p=m$**

# Caso 1 (da Lez. VIII): schema riassuntivo

Caso 1:  $p = m$  ( $r(A)$  uguale al num. di equazioni) – **sistema sempre compatibile.**

Caso 1.a:  $p = m = n$

sistema **quadrato** e di rango pieno

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Caso 1.b:  $p = m < n$

Sistema **rettangolare** e di rango pieno

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p + a_{1p+1}x_{p+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p + a_{2p+1}x_{p+1} + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pp}x_p + a_{pp+1}x_{p+1} + \dots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

Caso 1.a

$$A_{nn} x_n = b_n$$

se  $p=n$

Sistema **quadrato**  
di rango pieno

**Regola di Cramer**  
Soluzione unica

$$A_{pn} x_n = b_p$$

se  $p < n$

Caso 1.b

Sistema **rettangolare largo**  
di rango pieno

**Sistema ridotto** → **Regola di Cramer**  
 $\infty^{n-p}$  soluzioni

una per ogni valore fissato per le  $n-p$  variabili  
'passate a termine noto' nel sistema ridotto

**Metodo risolutivo**

## Soluzione di un sistema di equazioni lineari: **Caso 2: $p < m$**



# Soluzione di un sistema di equazioni lineari

Caso 2:  $p < m$

Il rango  $p$  della matrice  $A$  è **più piccolo** del numero  $m$  di equazioni del sistema. Il sistema **non** è sempre compatibile.

$$A_{mn} x_n = b_m$$

$$p \leq \min\{m, n\}$$

Il problema è sempre trovare un minore di  $A$  di ordine  $p$ .

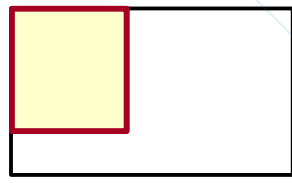
$$\begin{matrix}
 \left. \begin{matrix} a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & +\dots+ & a_{1,p}x_p & +a_{1,p+1}x_{p+1} & +\dots+ & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\
 a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & +\dots+ & a_{2,p}x_p & +a_{2,p+1}x_{p+1} & +\dots+ & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\
 \vdots & \vdots & +\dots+ & \vdots & \vdots & +\dots+ & \vdots & \vdots & \\
 a_{p,1}x_1 & +a_{p,2}x_2 & +\dots+ & a_{p,p}x_p & +a_{p,p+1}x_{p+1} & +\dots+ & a_{p,n}x_n & = & b_p \\
 a_{p+1,1}x_1 & +a_{p+1,2}x_2 & +\dots+ & a_{p+1,p}x_p & +a_{p+1,p+1}x_{p+1} & +\dots+ & a_{p+1,n}x_n & = & b_{p+1} \\
 \vdots & \vdots & +\dots+ & \vdots & \vdots & +\dots+ & \vdots & \vdots & \\
 a_{m,1}x_1 & +a_{m,2}x_2 & +\dots+ & a_{m,p}x_p & +a_{m,p+1}x_{p+1} & +\dots+ & a_{m,n}x_n & = & b_m
 \end{matrix} \right\} \\
 m & & & p & & & n & & 
 \end{matrix}$$

## Casi possibili

se  $m < n$

$$\rightarrow p < m < n$$

Sistema rettangolare largo  
(più colonne che righe)

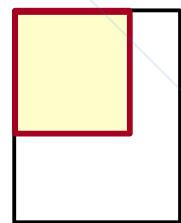


$$p < \min\{m, n\}$$

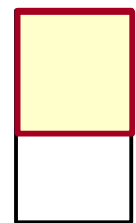
se  $m > n$

$$\rightarrow p \leq n < m$$

Sistema rettangolare lungo  
(più righe che colonne)



$$p < \min\{m, n\}$$



$$p = n$$

# Soluzione di un sistema di equazioni lineari

Caso 2:  $p < m$

Il rango  $p$  della matrice  $A$  è più piccolo del numero  $m$  di equazioni del sistema. Il sistema non è sempre compatibile.

$$A_{mn} x_n = b_m$$

$$p \leq \min\{m, n\}$$

Il problema è sempre trovare un minore di  $A$  di ordine  $p$ .

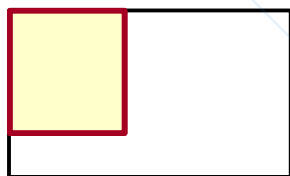
Ma ora la compatibilità del sistema dipende dal rango di  $(A|b)$  che non è necessariamente uguale a  $p$ .

Il rango di  $(A|b)$  dipenderà dal vettore  $b$

Potresti trovare un minore (di ordine  $p+1$ ) di  $(A|b)$  diverso da zero ottenuto orlando il minore di  $A$  di ordine  $p$  con il vettore colonna  $b$  e una riga di  $A$  (non inclusa in quel minore).

se  $m < n \rightarrow p < m < n$

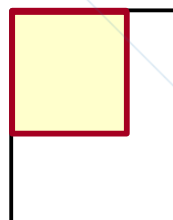
Sistema rettangolare largo  
(più colonne che righe)



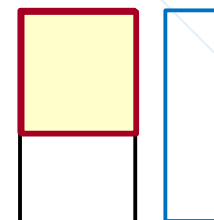
$$p < \min\{m, n\}$$

se  $m > n \rightarrow p \leq n < m$

Sistema rettangolare lungo  
(più righe che colonne)



$$p < \min\{m, n\}$$



$$p = n$$

# Soluzione di un sistema di equazioni lineari

Caso 2:  $p < m$

Il rango  $p$  della matrice  $A$  è **più piccolo** del numero  $m$  di equazioni del sistema. Il sistema **non** è sempre compatibile.

$$A_{mn} x_n = b_m$$

$$p \leq \min\{m, n\}$$

Per capire se il sistema è compatibile oppure no **bisogna** analizzare  $r(A|b)$  e capire **se vale** la condizione del Teorema di Rouché-Capelli ( $r(a)=r(A|b)$ ).

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p + a_{1,p+1}x_{p+1} + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p + a_{2,p+1}x_{p+1} + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \dots + a_{p,p}x_p + a_{p,p+1}x_{p+1} + \dots + a_{p,n}x_n = b_p \\ a_{p+1,1}x_1 + a_{p+1,2}x_2 + \dots + a_{p+1,p}x_p + a_{p+1,p+1}x_{p+1} + \dots + a_{p+1,n}x_n = b_{p+1} \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,p}x_p + a_{m,p+1}x_{p+1} + \dots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

# Soluzione di un sistema di equazioni lineari

Caso 2:  $p < m$

Il rango  $p$  della matrice  $A$  è più piccolo del numero  $m$  di equazioni del sistema. Il sistema non è sempre compatibile.

$$A_{mn} x_n = b_m$$

$$p \leq \min\{m, n\}$$

Per capire se il sistema è compatibile oppure no **bisogna** analizzare  $r(A|b)$  e capire **se vale** la condizione del Teorema di Rouché-Capelli ( $r(a)=r(A|b)$ ).

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p + a_{1,p+1}x_{p+1} + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p + a_{2,p+1}x_{p+1} + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \dots + a_{p,p}x_p + a_{p,p+1}x_{p+1} + \dots + a_{p,n}x_n = b_p \\ a_{p+1,1}x_1 + a_{p+1,2}x_2 + \dots + a_{p+1,p}x_p + a_{p+1,p+1}x_{p+1} + \dots + a_{p+1,n}x_n = b_{p+1} \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,p}x_p + a_{m,p+1}x_{p+1} + \dots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

Assumiamo **S.P.I.G.** che estraendo dalla matrice  $A$  del sistema le prime  $p$  righe e le prime  $p$  colonne si ottenga un minore non nullo.

# Soluzione di un sistema di equazioni lineari

Caso 2:  $p < m$

Il rango  $p$  della matrice  $A$  è **più piccolo** del numero  $m$  di equazioni del sistema. Il sistema **non** è sempre compatibile.

$$A_{mn} x_n = b_m$$

$$p \leq \min\{m, n\}$$

Per capire se il sistema è compatibile oppure no **bisogna analizzare**  $r(A|b)$  e capire **se vale** la condizione del Teorema di Rouché-Capelli ( $r(a)=r(A|b)$ ).

$$\begin{array}{cccccccc}
 a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & +\dots+ & a_{1,p}x_p & +a_{1,p+1}x_{p+1} & +\dots+ & a_{1,n}x_n & = b_1 \\
 a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & +\dots+ & a_{2,p}x_p & +a_{2,p+1}x_{p+1} & +\dots+ & a_{2,n}x_n & = b_2 \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 a_{p,1}x_1 & +a_{p,2}x_2 & +\dots+ & a_{p,p}x_p & +a_{p,p+1}x_{p+1} & +\dots+ & a_{p,n}x_n & = b_p \\
 a_{p+1,1}x_1 & +a_{p+1,2}x_2 & +\dots+ & a_{p+1,p}x_p & +a_{p+1,p+1}x_{p+1} & +\dots+ & a_{p+1,n}x_n & = b_{p+1} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 a_{m,1}x_1 & +a_{m,2}x_2 & +\dots+ & a_{m,p}x_p & +a_{m,p+1}x_{p+1} & +\dots+ & a_{m,n}x_n & = b_m
 \end{array}$$

Il fatto che nel sistema ci siano **più di  $p$  righe** fa sì che, anche se  $r(A)=p$ , accostando la colonna  $b$  **si potrebbe avere**  $r(A|b)=p+1$ .

**Se  $r(A|b)=p+1 \rightarrow p=r(A) \neq r(A|b)=p+1$**  che, per il teorema di Rouché-Capelli, significa **l'incompatibilità del sistema**.

**NOTA:** Siccome in  $(A|b)$  c'è solo una colonna in più di  $A$ , al massimo si può avere  $r(A|b)=p+1$ .

$$p \leq r(A|b) \leq p+1$$

# Soluzione di un sistema di equazioni lineari

Caso 2:  $p < m$

Il rango  $p$  della matrice  $A$  è **più piccolo** del numero  $m$  di equazioni del sistema. Il sistema **non** è sempre compatibile.

$$A_{mn} x_n = b_m$$

$$p \leq \min\{m, n\}$$

Per capire se il sistema è compatibile oppure no **bisogna analizzare**  $r(A|b)$  e capire **se vale** la condizione del Teorema di Rouché-Capelli ( $r(a)=r(A|b)$ ).

$$p \leq r(A|b) \leq p+1$$

$$\begin{array}{cccccccc}
 a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & +\dots+ & a_{1,p}x_p & +a_{1,p+1}x_{p+1} & +\dots+ & a_{1,n}x_n & = b_1 \\
 a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & +\dots+ & a_{2,p}x_p & +a_{2,p+1}x_{p+1} & +\dots+ & a_{2,n}x_n & = b_2 \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 a_{p,1}x_1 & +a_{p,2}x_2 & +\dots+ & a_{p,p}x_p & +a_{p,p+1}x_{p+1} & +\dots+ & a_{p,n}x_n & = b_p \\
 a_{p+1,1}x_1 & +a_{p+1,2}x_2 & +\dots+ & a_{p+1,p}x_p & +a_{p+1,p+1}x_{p+1} & +\dots+ & a_{p+1,n}x_n & = b_{p+1} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 a_{m,1}x_1 & +a_{m,2}x_2 & +\dots+ & a_{m,p}x_p & +a_{m,p+1}x_{p+1} & +\dots+ & a_{m,n}x_n & = b_m
 \end{array}$$

Il fatto che nel sistema ci siano **più di  $p$  righe** fa sì che, anche se  $r(A)=p$ , accostando la colonna  $b$  **si potrebbe avere  $r(A|b)=p+1$** .

**Se  $r(A|b)=p+1 \rightarrow p=r(A) \neq r(A|b)=p+1$**  che, per il teorema di Rouché-Capelli, significa **l'incompatibilità del sistema**.

Ciascuna delle righe in più rispetto a quelle del minore può dar luogo a un **minore di ordine  $p+1$** .

indichiamo con  $k$  la generica di queste righe

# Soluzione di un sistema di equazioni lineari

Caso 2:  $p < m$

Il rango  $p$  della matrice  $A$  è **più piccolo** del numero  $m$  di equazioni del sistema. Il sistema **non** è sempre compatibile.

$$A_{mn} x_n = b_m$$

$$p \leq \min\{m, n\}$$

Per capire se il sistema è compatibile oppure no **bisogna analizzare**  $r(A|b)$  e capire **se vale** la condizione del Teorema di Rouché-Capelli ( $r(a)=r(A|b)$ ).

Se anche uno solo di questi minori risulta **diverso da zero**, il rango della matrice orlata corrispondente è  $p+1$ .

$$\begin{array}{cccc|c} a_{1,1}x_1 & a_{1,2}x_2 & \dots & a_{1,p}x_p & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & a_{2,2}x_2 & \dots & a_{2,p}x_p & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{p,1}x_1 & a_{p,2}x_2 & \dots & a_{p,p}x_p & b_p \\ a_{k,1}x_1 & a_{k,2}x_2 & \dots & a_{k,p}x_p & b_k \end{array}$$

$$(k = p + 1, \dots, m)$$

Tale matrice orlata è una **matrice quadrata** estratta da  $(A|b)$  di ordine  $p+1 \rightarrow r(A|b)=p+1$

Si ha:  $r(A|b)=p+1 \neq r(A)$  e la condizione del Teorema di Rouché-Capelli **non è verificata**.

$$p \leq r(A|b) \leq p+1$$

**Se  $r(A|b)=p+1 \rightarrow p=r(A) \neq r(A|b)=p+1$**  che, per il teorema di Rouché-Capelli, significa **l'incompatibilità del sistema**.

Ciascuna delle righe in più rispetto a quelle del minore può dar luogo a un **minore di ordine  $p+1$** .

indichiamo con  $k$  la generica di queste righe

# Soluzione di un sistema di equazioni lineari

Caso 2:  $p < m$

Il rango  $p$  della matrice  $A$  è **più piccolo** del numero  $m$  di equazioni del sistema. Il sistema **non** è sempre compatibile.

$$A_{mn} x_n = b_m$$

$$p \leq \min\{m, n\}$$

Per capire se il sistema è compatibile oppure no **bisogna analizzare  $r(A|b)$  e capire se vale la condizione del Teorema di Rouché**

Se ci sono, **le colonne da  $p+1$  a  $n$  sono relative a variabili che si possono fissare.**

$$r(A|b) = p$$

Se  $r(A)=r(A|b)$  le **righe** da  $p+1$  a  $m$  sono **'superflue'**

$$\begin{array}{cccccccc} a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & +\dots+ & a_{1,p}x_p & +a_{1,p+1}x_{p+1} & +\dots+ & a_{1,n}x_n & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & +\dots+ & a_{2,p}x_p & +a_{2,p+1}x_{p+1} & +\dots+ & a_{2,n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & +\dots+ & \vdots & \vdots \\ a_{p,1}x_1 & +a_{p,2}x_2 & +\dots+ & a_{p,p}x_p & +a_{p,p+1}x_{p+1} & +\dots+ & a_{p,n}x_n & = b_p \\ a_{p+1,1}x_1 & +a_{p+1,2}x_2 & +\dots+ & a_{p+1,p}x_p & +a_{p+1,p+1}x_{p+1} & +\dots+ & a_{p+1,n}x_n & = b_{p+1} \\ \vdots & \vdots & +\dots+ & \vdots & \vdots & +\dots+ & \vdots & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & +a_{m,2}x_2 & +\dots+ & a_{m,p}x_p & +a_{m,p+1}x_{p+1} & +\dots+ & a_{m,n}x_n & = b_m \end{array}$$

Il fatto che nel sistema ci siano **più di  $p$  righe** fa sì che, anche se  $r(A)=p$ , accostando la colonna  $b$  **si potrebbe avere  $r(A|b)=p+1$ .**

Se invece si ha  $p=r(A)=r(A|b)=p$ , sempre per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema è compatibile e la parte **'rilevante'** del sistema è quella riquadrata.

# Soluzione di un sistema di equazioni lineari

Caso 2:  $p < m$

Il rango  $p$  della matrice  $A$  è **più piccolo** del numero  $m$  di equazioni del sistema. Il sistema **non** è sempre compatibile.

$$A_{mn} x_n = b_m$$

$$p \leq \min\{m, n\}$$

Per capire se il sistema è compatibile oppure no **bisogna analizzare  $r(A|b)$  e capire se vale la condizione del Teorema di Rouché**

Se ci sono, **le colonne da  $p+1$  a  $n$  sono relative a variabili che si possono fissare.**

$$r(A|b) = p$$

$$\begin{array}{cccccccc} a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & +\dots+ & a_{1,p}x_p & +a_{1,p+1}x_{p+1} & +\dots+ & a_{1,n}x_n & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & +\dots+ & a_{2,p}x_p & +a_{2,p+1}x_{p+1} & +\dots+ & a_{2,n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots & +\dots+ & \vdots & \vdots & +\dots+ & \vdots & \vdots \\ a_{p,1}x_1 & +a_{p,2}x_2 & +\dots+ & a_{p,p}x_p & +a_{p,p+1}x_{p+1} & +\dots+ & a_{p,n}x_n & = b_p \end{array}$$

Se  $r(A)=r(A|b)$  le **righe** da  $p+1$  a  $m$  sono **'superflue'**

Il fatto che nel sistema ci siano **più di  $p$  righe** fa sì che, anche se  $r(A)=p$ , accostando la colonna  $b$  **si potrebbe avere  $r(A|b)=p+1$ .**

**Se invece si ha  $p=r(A)=r(A|b)=p$** , sempre per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema è compatibile e la parte **'rilevante'** del sistema è quella riquadrata.

# Soluzione di un sistema di equazioni lineari

**Caso 2:  $p < m$**

Il rango  $p$  della matrice  $A$  è **più piccolo** del numero  $m$  di equazioni del sistema. Il sistema **non** è sempre compatibile.

$$A_{mn} x_n = b_m$$

$$p \leq \min\{m, n\}$$

Per capire se il sistema è compatibile oppure no **bisogna analizzare  $r(A|b)$  e capire se vale la condizione del Teorema di Rouché-Capelli ( $r(a)=r(A|b)$ ).**

$$r(A|b) = p$$


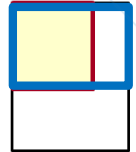
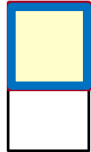
$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p + a_{1,p+1}x_{p+1} + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p + a_{2,p+1}x_{p+1} + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \dots + a_{p,p}x_p + a_{p,p+1}x_{p+1} + \dots + a_{p,n}x_n = b_p \end{cases}$$

Dopo aver eliminato le righe 'superflue', il sistema diventa di rango pieno e perciò è compatibile (si ritorna al **Caso 1**).



Ci si riconduce comunque alle tecniche di risoluzione dei due **casi 1.a e 1.b**.

### Casi possibili

|   |   |
|---|---|
| <p><b>se <math>m &lt; n</math></b> → <math>p &lt; m &lt; n</math></p> <p>Sistema rettangolare largo (più colonne che righe)</p>  <p><math>p &lt; \min\{m, n\}</math><br/><b>Caso 1.b</b></p> | <p><b>se <math>m &gt; n</math></b> → <math>p \leq n &lt; m</math></p> <p>Sistema rettangolare lungo (più righe che colonne)</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">  <p><math>p &lt; \min\{m, n\}</math><br/><b>Caso 1.b</b></p> </div> <div style="text-align: center;">  <p><math>p = n</math><br/><b>Caso 1.a</b></p> </div> </div> |
|---|---|

# Soluzione di un sistema di equazioni lineari

Caso 2:  $p < m$

Il rango  $p$  della matrice  $A$  è **più piccolo** del numero  $m$  di equazioni del sistema. Il sistema **non** è sempre compatibile.

$$A_{mn} x_n = b_m$$

$$p \leq \min\{m, n\}$$

Per capire se il sistema è compatibile oppure no **bisogna** analizzare  $r(A|b)$  e capire **se vale** la condizione del Teorema di Rouché-Capelli ( $r(a)=r(A|b)$ ).

$$p \leq r(A|b) \leq p+1$$

$$\begin{array}{cccccccc}
 a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & +\dots+ & a_{1,p}x_p & +a_{1,p+1}x_{p+1} & +\dots+ & a_{1,n}x_n & = b_1 \\
 a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & +\dots+ & a_{2,p}x_p & +a_{2,p+1}x_{p+1} & +\dots+ & a_{2,n}x_n & = b_2 \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 a_{p,1}x_1 & +a_{p,2}x_2 & +\dots+ & a_{p,p}x_p & +a_{p,p+1}x_{p+1} & +\dots+ & a_{p,n}x_n & = b_p \\
 a_{p+1,1}x_1 & +a_{p+1,2}x_2 & +\dots+ & a_{p+1,p}x_p & +a_{p+1,p+1}x_{p+1} & +\dots+ & a_{p+1,n}x_n & = b_{p+1} \\
 \vdots & \vdots & +\dots+ & \vdots & \vdots & +\dots+ & \vdots & \vdots \\
 a_{m,1}x_1 & +a_{m,2}x_2 & +\dots+ & a_{m,p}x_p & +a_{m,p+1}x_{p+1} & +\dots+ & a_{m,n}x_n & = b_m
 \end{array}$$

Siccome in  $A$  le righe in più rispetto al minore di ordine  $p$  non nullo sono  $m-p$

al massimo bisognerà **calcolare**  $m-p$  minori di **ordine  $p+1$**

# Soluzione di un sistema di equazioni lineari

Caso 2:  $p < m$

Il rango  $p$  della matrice  $A$  è **più piccolo** del numero  $m$  di equazioni del sistema. Il sistema **non** è sempre compatibile.

$$A_{mn} x_n = b_m$$

$$p \leq \min\{m, n\}$$

## PROCEDURA per il Caso 2

1. Calcolare  $p=r(A)$  (verificando che  $p < m$ ).
2. Individuare  $p$  righe di  $A$  linearmente indipendenti **scegliendo** uno dei minori di  $A$  di ordine  $p$  non nulli identificati al punto 1.
3. Considerare la matrice  $(A|b)$  per la quale si ha certamente:

$$p \leq r(A|b) \leq p+1$$

e **calcolare il rango di ogni matrice orlata** ottenibile da  $A$  accostando la colonna  $b$  e una delle  $m-p$  righe non considerate nel minore scelto in 2.

$$\left| \begin{array}{cccc|c} a_{1,1}x_1 & a_{1,2}x_2 & \dots & a_{1,p}x_p & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & a_{2,2}x_2 & \dots & a_{2,p}x_p & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{p,1}x_1 & a_{p,2}x_2 & \dots & a_{p,p}x_p & b_p \\ a_{k,1}x_1 & a_{k,2}x_2 & \dots & a_{k,p}x_p & b_k \end{array} \right| \quad (k = p + 1, \dots, m)$$

**Se in tutti i casi** tale rango risulta pari a  $p$ , allora  $r(A)=r(A|b)$  e il sistema è **compatibile**. Altrimenti (se almeno uno di questi ranghi è pari a  $p+1$ ) il sistema è **non compatibile**.

4. Se il sistema è compatibile, si risolve:  
 $\begin{cases} A_{pn} x_n = b_p & \text{se } p < n \\ A_{pp} x_p = b_p & \text{se } p = n \end{cases}$

# Soluzione di un sistema di equazioni lineari

**Esempio** Risolviamo il sistema:

$$\begin{aligned} m &= 3 \\ n &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 - 5x_4 = -7 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 11 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 = -3 \end{cases}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & -3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

## PROCEDURA per il Caso 2

1. Calcolare  $p=r(A)$  (verificando che  $p < m$ ).

2. Individuare  $p$  righe di  $A$  linearmente indipendenti **scegliendo** uno dei minori di  $A$  di ordine  $p$  non nulli identificati al punto 1.

3. Considerare la matrice  $(A|b)$  per la quale si ha certamente:

$$p \leq r(A|b) \leq p+1$$

e calcolare il rango di **ogni matrice orlata** ottenibile da  $A$  accostando la colonna  $b$  e una delle  $m-p$  righe non considerate nel minore scelto in 2.

$$\left| \begin{array}{cccc|c} a_{1,1}x_1 & a_{1,2}x_2 & \dots & a_{1,p}x_p & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & a_{2,2}x_2 & \dots & a_{2,p}x_p & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{p,1}x_1 & a_{p,2}x_2 & \dots & a_{p,p}x_p & b_p \\ a_{k,1}x_1 & a_{k,2}x_2 & \dots & a_{k,p}x_p & b_k \end{array} \right| \quad (k = p+1, \dots, m)$$

Se **in tutti i casi** tale rango risulta pari a  $p$ , allora  $r(A)=r(A|b)$  e il sistema è compatibile. Altrimenti (se almeno uno di questi ranghi è pari a  $p+1$ ) il sistema è non compatibile.

4. Se il sistema è compatibile, si risolve:  $\rightarrow A_{pn} x_n = b_p$  se  $p < n$   
 $\rightarrow A_{pp} x_p = b_p$  se  $p = n$

# Soluzione di un sistema di equazioni lineari

**Esempio** Risolviamo il sistema:

$$\begin{array}{l} m=3 \\ n=4 \end{array} \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 - 5x_4 = -7 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 11 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 = -3 \end{cases} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & -3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo calcolare il rango di A. Dato che  $\min\{3,4\}=3$ , il primo valore da provare è  $p=3$ .

Dalla matrice A possono essere estratte 4 diverse matrici quadrate di ordine 3 alle quali corrispondono i seguenti 4 minori:

$$\begin{array}{l} D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \\ D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 0 \\ D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 0, \\ D_4 = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -5 \\ 1 & 3 & 5 \\ -3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 0 \end{array}$$

Tutti i minori di ordine 3 di A sono **nulli**

► sicuramente  $r(\mathbf{A}) < 3$

# Soluzione di un sistema di equazioni lineari

**Esempio** Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} m=3 \\ n=4 \\ p=r(A)=2 \end{cases} \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 - 5x_4 = -7 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 11 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 = -3 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & -3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo calcolare il rango di A. Sapendo che  $r(A) < 3$ , proviamo il valore  $p=2$ .

È immediato verificare che **esiste almeno un minore di A di ordine 2 diverso da 0**.

Ad esempio si ha:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 = 5$$

  $r(A)=2$

## PROCEDURA per il Caso 2

1. Calcolare  $p=r(A)$  (verificando che  $p < m$ ).
2. Individuare  $p$  righe di A linearmente indipendenti **scegliendo** uno dei minori di A di ordine  $p$  non nulli identificati al punto 1.
3. Considerare la matrice  $(A|b)$  per la quale si ha certamente:

$$p \leq r(A|b) \leq p+1$$

e calcolare il rango di **ogni matrice orlata** ottenibile da A accostando la colonna b e una delle  $m-p$  righe non considerate nel minore scelto in 2.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}x_1 & a_{1,2}x_2 & \dots & a_{1,p}x_p & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & a_{2,2}x_2 & \dots & a_{2,p}x_p & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{p,1}x_1 & a_{p,2}x_2 & \dots & a_{p,p}x_p & b_p \\ a_{k,1}x_1 & a_{k,2}x_2 & \dots & a_{k,p}x_p & b_k \end{vmatrix} \quad (k = p+1, \dots, m)$$

Se in **tutti i casi** tale rango risulta pari a  $p$ , allora  $r(A)=r(A|b)$  e il sistema è compatibile. Altrimenti (se almeno uno di questi ranghi è pari a  $p+1$ ) il sistema è non compatibile.

4. Se il sistema è compatibile, si risolve:  $\rightarrow A_{pn} x_n = b_p$  se  $p < n$   
 $\rightarrow A_{pp} x_p = b_p$  se  $p = n$

Siamo nel **Caso 2**:

$$\begin{aligned} p < m & (2 < 3) \\ p < n & (2 < 4). \end{aligned}$$

# Soluzione di un sistema di equazioni lineari

**Esempio** Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} m=3 \\ n=4 \\ p=r(A)=2 \end{cases} \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 - 5x_4 = -7 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 11 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 = -3 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & -3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo calcolare il rango di A. Proviamo il valore  $p=2$ .

È immediato verificare che **esiste almeno un minore di A di ordine 2 diverso da 0**.

Ad esempio si ha:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 = 5$$

**r(A)=2**

## PROCEDURA per il Caso 2

1. Calcolare  $p=r(A)$  (verificando che  $p < m$ ).
2. Individuare  $p$  righe di A linearmente indipendenti **scegliendo** uno dei minori di A di ordine  $p$  non nulli identificati al punto 1.
3. Considerare la matrice  $(A|b)$  per la quale si ha certamente:

$$p \leq r(A|b) \leq p+1$$

e **calcolare il rango di ogni matrice orlata** ottenibile da A accostando la colonna b e una delle  $m-p$  righe non considerate nel minore scelto in 2.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}x_1 & a_{1,2}x_2 & \dots & a_{1,p}x_p & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & a_{2,2}x_2 & \dots & a_{2,p}x_p & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{p,1}x_1 & a_{p,2}x_2 & \dots & a_{p,p}x_p & b_p \\ a_{k,1}x_1 & a_{k,2}x_2 & \dots & a_{k,p}x_p & b_k \end{vmatrix} \quad (k = p+1, \dots, m)$$

**Se in tutti i casi** tale rango risulta pari a  $p$ , allora  $r(A)=r(A|b)$  e il sistema è **compatibile**.  
Altrimenti (se almeno uno di questi ranghi è pari a  $p+1$ ) il sistema è **non compatibile**.

4. Se il sistema è compatibile, si risolve:  
 $\rightarrow A_{pn} x_n = b_p$  se  $p < n$   
 $\rightarrow A_{pp} x_p = b_p$  se  $p = n$

Siamo nel **Caso 2**:  
 $p < m < n$

# Soluzione di un sistema di equazioni lineari

**Esempio** Risolviamo il sistema:

$$\begin{array}{l} m=3 \\ n=4 \\ p=r(A)=2 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 - x_3 - 5x_4 = -7 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 11 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 = -3 \end{array} \right. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & -3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo calcolare il rango di A. Proviamo il valore  $p=2$ .

È immediato verificare che esiste almeno un minore di A di ordine 2 diverso da 0.

Ad esempio si ha:

Scegliamo  $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 - x_3 - 5x_4 = -7 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 11 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 = -3 \end{array} \right.$$

Siccome le righe del sistema sono in totale 3, in questo esempio c'è solo una matrice orlata da considerare (quella ottenuta accostando la colonna b e la terza riga di A):

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 2 & 1 & 11 \\ 4 & -3 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 88 + 42 + 28 + 33 - 12 = 0$$

**REGOLA DI SARRUS**

Il rango della matrice orlata è ancora pari a 2.

$r(A|b)=2=r(A)$  e il sistema è **compatibile**.

La terza riga può essere ignorata

# Soluzione di un sistema di equazioni lineari

**Esempio** Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} m=3 \\ n=4 \\ p=r(A)=2 \end{cases} \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 - 5x_4 = -7 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 11 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 = -3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & -3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

compatibile

Trascurando la terza riga il sistema diventa di rango pieno rettangolare largo (Caso 1.b)

$$A_{pn} x_n = b_p$$

## PROCEDURA per il Caso 2

1. Calcolare  $p=r(A)$  (verificando che  $p < m$ ).
2. Individuare  $p$  righe di  $A$  linearmente indipendenti **scegliendo** uno dei minori di  $A$  di ordine  $p$  non nulli identificati al punto 1.
3. Considerare la matrice  $(A|b)$  per la quale si ha certamente:

$$p \leq r(A|b) \leq p+1$$

e calcolare il rango di **ogni matrice orlata** ottenibile da  $A$  accostando la colonna  $b$  e una delle  $m-p$  righe non considerate nel minore scelto in 2.

$$\begin{array}{cccc|c} a_{1,1}x_1 & a_{1,2}x_2 & \dots & a_{1,p}x_p & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & a_{2,2}x_2 & \dots & a_{2,p}x_p & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{p,1}x_1 & a_{p,2}x_2 & \dots & a_{p,p}x_p & b_p \\ a_{k,1}x_1 & a_{k,2}x_2 & \dots & a_{k,p}x_p & b_k \end{array} \quad (k = p+1, \dots, m)$$

**Se in tutti i casi** tale rango risulta pari a  $p$ , allora  $r(A)=r(A|b)$  e il sistema è **compatibile**.  
Altrimenti (se almeno uno di questi ranghi è pari a  $p+1$ ) il sistema è **non compatibile**.

4. Se il sistema è compatibile, si risolve:  $\rightarrow A_{pn} x_n = b_p$  se  $p < n$   
 $\rightarrow A_{pp} x_p = b_p$  se  $p = n$

# Soluzione di un sistema di equazioni lineari

**Esempio** Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 - 5x_4 = -7 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 11 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 = -3 \end{cases}$$

$$m=3$$

$$n=4$$

$$p=r(\mathbf{A})=2$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & -3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

compatibile **largo** ( $p < n$ )

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 = 5$$

**SISTEMA RIDOTTO**

Mantenendo il minore di  $\mathbf{A}$  non nullo di ordine 2 trovato prima, fissiamo a valori qualsiasi **due** variabili  $x_3$  e  $x_4$ .

$$A_{pn} x_n = b_p$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -7 + x_3 + 5x_4 \\ 2x_1 + x_2 = 11 - 3x_3 - 5x_4 \end{cases}$$

Applichiamo la **regola di Cramer** come nel **Caso 1.b**:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -7 + x_3 + 5x_4 & -2 \\ 11 - 3x_3 - 5x_4 & 1 \end{vmatrix}}{5} = -x_3 - x_4 + 3$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -7 + x_3 + 5x_4 \\ 2 & 11 - 3x_3 - 5x_4 \end{vmatrix}}{5} = -x_3 - 3x_4 + 5$$

$$x_3 = \bar{x}_3$$

$$x_4 = \bar{x}_4$$

$p=2$  e  $n=4$  implica che il sistema ha  $\infty^{n-p} = \infty^{4-2} = \infty^2$  **soluzioni**.

Altri esempi sulle dispense a pag. 48.

# Soluzione di un sistema di equazioni lineari

**Esempio** Risolviamo il sistema:

$$\begin{array}{l} m=3 \\ n=4 \\ p=r(\mathbf{A})=2 \\ \text{compatibile largo } (p < n) \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 - x_3 - 5x_4 = -7 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 11 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 = -3 \end{array} \right. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & -3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

**NOTA:** eq3 = eq2 + 2 · eq1

## NOTA

Una volta stabilito il valore  $p$  del rango di  $A$  e verificata la compatibilità del sistema, per procedere alla soluzione del sistema si può scegliere **un qualsiasi minore non nullo di  $A$  di ordine  $p$** .

Ad esempio quello ottenuto estraendo **seconda e terza riga e seconda e terza colonna** di  $A$  (per esercizio).

## NOTA

La **scelta del minore di  $A$  di ordine  $p$**  'stabilisce' quali sono le  $p$  righe linearmente indipendenti di  $A$  su cui basare la soluzione del sistema.

Essendo  $r(\mathbf{A})=r(\mathbf{A}|\mathbf{b})=p$ , **tutte le altre** righe sono linearmente dipendenti da quelle scelte e dunque sono ottenibili come loro combinazione lineare.

Per questo motivo la equazione lineare corrispondente a ciascuna di queste righe è da considerarsi '**superflua**' (e, infatti, non viene considerata) perché nel sistema essa non aggiunge informazione in più rispetto a quella già fornita dalle altre equazioni.

# Caso 2: schema riassuntivo

Caso 2:  $p < m$  ( $r(A)$  minore del num. di equazioni) – sistema non sempre compatibile.

$p \leq r(A|b) \leq p+1$

$$\begin{array}{cccccccc}
 a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & +\dots+ & a_{1,p}x_p & +a_{1,p+1}x_{p+1} & +\dots+ & a_{1,n}x_n & = b_1 \\
 a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & +\dots+ & a_{2,p}x_p & +a_{2,p+1}x_{p+1} & +\dots+ & a_{2,n}x_n & = b_2 \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 a_{p,1}x_1 & +a_{p,2}x_2 & +\dots+ & a_{p,p}x_p & +a_{p,p+1}x_{p+1} & +\dots+ & a_{p,n}x_n & = b_p \\
 a_{p+1,1}x_1 & +a_{p+1,2}x_2 & +\dots+ & a_{p+1,p}x_p & +a_{p+1,p+1}x_{p+1} & +\dots+ & a_{p+1,n}x_n & = b_{p+1} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 a_{m,1}x_1 & +a_{m,2}x_2 & +\dots+ & a_{m,p}x_p & +a_{m,p+1}x_{p+1} & +\dots+ & a_{m,n}x_n & = b_m
 \end{array}$$

Caso 2:  $p < m$

$$\begin{array}{cccc|c}
 a_{1,1}x_1 & a_{1,2}x_2 & \dots & a_{1,p}x_p & b_1 \\
 a_{2,1}x_1 & a_{2,2}x_2 & \dots & a_{2,p}x_p & b_2 \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 a_{p,1}x_1 & a_{p,2}x_2 & \dots & a_{p,p}x_p & b_p \\
 a_{k,1}x_1 & a_{k,2}x_2 & \dots & a_{k,p}x_p & b_k
 \end{array}$$

( $k = p + 1, \dots, m$ )

$$\begin{array}{cccccccc}
 a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & +\dots+ & a_{1,p}x_p & +a_{1,p+1}x_{p+1} & +\dots+ & a_{1,n}x_n & = b_1 \\
 a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & +\dots+ & a_{2,p}x_p & +a_{2,p+1}x_{p+1} & +\dots+ & a_{2,n}x_n & = b_2 \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 a_{p,1}x_1 & +a_{p,2}x_2 & +\dots+ & a_{p,p}x_p & +a_{p,p+1}x_{p+1} & +\dots+ & a_{p,n}x_n & = b_p \\
 a_{p+1,1}x_1 & +a_{p+1,2}x_2 & +\dots+ & a_{p+1,p}x_p & +a_{p+1,p+1}x_{p+1} & +\dots+ & a_{p+1,n}x_n & = b_{p+1} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 a_{m,1}x_1 & +a_{m,2}x_2 & +\dots+ & a_{m,p}x_p & +a_{m,p+1}x_{p+1} & +\dots+ & a_{m,n}x_n & = b_m
 \end{array}$$

**Sistema incompatibile**

**Metodo risolutivo**

**Sistema compatibile**

se  $p=n$ , sistema quadrato  
 $A_{pp} x_p = b_p$   
**Regola di Cramer – Soluzione unica**

se  $p<n$ , sistema ridotto quadrato  
 $A_{pn} x_n = b_p$   
**Regola di Cramer,  $\infty^{n-p}$  soluzioni**

## Caso 2: Esercizi

### Esercizio 1

Per il sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 = 3 \\ 4x_1 + 8x_2 = 4 \end{cases}$$

Calcolare  $r(A)$  e  $r(A|b)$  e stabilire se il sistema è compatibile oppure no.

[ $r(A)=2$ ,  $r(A|b)=3$  → Il sistema è **incompatibile**.]

### Esercizio 2

Per il sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 = 2 \\ 4x_1 + 8x_2 = 4 \end{cases}$$

Calcolare  $r(A)$  e  $r(A|b)$  e stabilire se il sistema è compatibile oppure no, calcolando eventualmente il numero delle soluzioni.

[ $r(A)=1$ ,  $r(A|b)=1$  → Il sistema è **compatibile** con  $\infty^{2-1} = \infty^1$  soluzioni]

# Argomenti della Lezione IX

Impostazione della risoluzione di un sistema di equazioni lineari con matrice dei coefficienti di rango pieno: Casi 2.a e 2.b

## PROCEDURA per il Caso 2

1. Calcolare  $p=r(A)$  (verificando che  $p < m$ ).
2. Individuare  $p$  righe di  $A$  linearmente indipendenti **scegliendo** uno dei minori di  $A$  di ordine  $p$  non nulli identificati al punto 1.

3. Considerare la matrice  $(A|b)$  per la quale si ha certamente:

$$p \leq r(A|b) \leq p+1$$

e **calcolare il rango di ogni matrice orlata** ottenibile da  $A$  accostando la colonna  $b$  e una delle  $m-p$  righe non considerate nel minore scelto in 2.

$$\begin{array}{cccc|c} a_{1,1}x_1 & a_{1,2}x_2 & \dots & a_{1,p}x_p & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & a_{2,2}x_2 & \dots & a_{2,p}x_p & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{p,1}x_1 & a_{p,2}x_2 & \dots & a_{p,p}x_p & b_p \\ a_{k,1}x_1 & a_{k,2}x_2 & \dots & a_{k,p}x_p & b_k \end{array} \quad (k = p + 1, \dots, m)$$

**Se in tutti i casi** tale rango risulta pari a  $p$ , allora  $r(A)=r(A|b)$  e il sistema è **compatibile**.  
**Altrimenti** (se almeno uno di questi ranghi è pari a  $p+1$ ) il sistema è **non compatibile**.

4. Se il sistema è compatibile, si risolve:  
 $\rightarrow A_{pn} x_n = b_p$  se  $p < n$   
 $\rightarrow A_{pp} x_p = b_p$  se  $p = n$