

Matematica Corso Base a.a. 2019-2020

ALGEBRA LINEARE
LEZIONE X

Federica Ricca



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Sistemi omogenei

Sistemi omogenei

Definizione (sistema omogeneo)

Un sistema di equazioni lineari si dice **omogeneo** se **tutti i termini noti sono pari a 0**.
In altri termini, il vettore **b** è **nullo**.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Teorema (di Rouché-Capelli)

Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema

$$A_{mn} x_n = b_m$$

abbia soluzioni è: $r(A)=r(A|b)$.

NOTA

Ricordiamo che il vettore nullo è sempre **linearmente** dipendente da qualsiasi insieme di vettori.

Osservazione 1

Un sistema di equazioni lineari omogeneo è **sempre compatibile** perché il rango della matrice completa $(A|b)$ non può aumentare rispetto a quello della matrice A dato che la colonna b corrisponde al vettore nullo.

Non si avrà mai $r(A)=p$ e $r(A|b)=p+1$.

Sistemi omogenei

Definizione (sistema omogeneo)

Un sistema di equazioni lineari si dice **omogeneo** se **tutti i termini noti sono pari a 0**.
In altri termini, il vettore **b** è **nullo**.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Osservazione 2

Un sistema di equazioni lineari omogeneo ammette sempre come soluzione quella data dal **vettore nullo** (tale soluzione è detta **soluzione 'banale'**):

$$x_1=0, x_2=0, \dots, x_n=0$$

Le altre possibili soluzioni (se esistono) si dicono **'non banali'** o **'proprie'**.

Il teorema che segue fornisce una condizione **necessaria e sufficiente** affinché esista una **soluzione propria** del sistema omogeneo.

Sistemi omogenei

Teorema

Condizione **necessaria e sufficiente** affinché il sistema omogeneo (S) **abbia soluzioni diverse da quella banale** è che il rango della matrice dei coefficienti A sia minore del numero delle incognite, cioè $r(A) < n$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

(S) **sempre compatibile**

Formulazione equivalente del Teorema:

Dato il sistema omogeneo (S)

$$r(A) < n$$

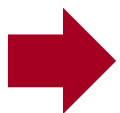


(S) ha soluzioni diverse da quella banale

Dobbiamo dimostrare due implicazioni:

Condizione sufficiente

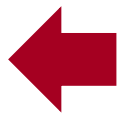
$$r(A) < n$$



(S) ha soluzioni diverse da quella banale

Condizione necessaria

$$r(A) < n$$



(S) ha soluzioni diverse da quella banale

Sistemi omogenei

Teorema

Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema omogeneo (S) **abbia soluzioni diverse da quella banale** è che il rango della matrice dei coefficienti A sia minore del numero delle incognite, cioè $r(A) < n$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

(S) **sempre compatibile**

Dimostrazione

(necessità)

HP: (S) ha soluzioni diverse da quella banale



TS: $r(A) < n$

Sia $r(A)=p$.

Il sistema è omogeneo è compatibile e allora sappiamo che, qualsiasi sia il caso, si deve risolvere un sistema di p equazioni e n incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p + a_{1,p+1}x_{p+1} + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p + a_{2,p+1}x_{p+1} + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pp}x_p + a_{p,p+1}x_{p+1} + \dots + a_{pn}x_n = 0 \end{cases}$$

Sistema quadrato ($p=n$) o rett. largo ($p<n$)

Si ha $p \leq n$:

- **non può essere $p = n$** , perché in questo caso il sistema sarebbe **quadrato** e ammetterebbe una **unica soluzione, per forza quella banale**.
- Invece, siccome per HP sappiamo che esso ha soluzioni diverse da quella banale



Allora deve necessariamente essere **$p = r(A) < n$** (TESI).

Sistemi omogenei

Teorema

Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema omogeneo (S) **abbia soluzioni diverse da quella banale** è che il rango della matrice dei coefficienti A sia minore del numero delle incognite, cioè $r(A) < n$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

(S) **sempre compatibile**

Dimostrazione

(sufficienza)

HP: $r(A) < n$



TS: (S) ha soluzioni diverse da quella banale

Sia $r(A)=p$.

Il sistema è omogeneo è compatibile e allora sappiamo che, qualsiasi sia il caso, si deve risolvere un sistema di p equazioni e n incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p + a_{1,p+1}x_{p+1} + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p + a_{2,p+1}x_{p+1} + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pp}x_p + a_{p,p+1}x_{p+1} + \dots + a_{pn}x_n = 0 \end{cases}$$

Sotto l'ipotesi $r(A) = p < n$ sappiamo che il sistema ha ∞^{n-p} soluzioni che si ottengono fissando arbitrariamente n-p variabili, ad esempio $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n$, a un **valore qualsiasi**.



Basta fissare almeno una di questa variabili a un valore non nullo per individuare una soluzione del sistema diversa da quella banale (TESI). ■

Sistemi omogenei

Teorema

Condizione **necessaria e sufficiente** affinché il sistema omogeneo (S) **abbia soluzioni diverse da quella banale** è che il rango della matrice dei coefficienti A sia minore del numero delle incognite, cioè $r(A) < n$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (S)$$


Riassumendo

Per un sistema **omogeneo** con matrice A_{mn} , si ha:

Il sistema è **sempre compatibile**.

Quindi si hanno **due soli casi possibili**:

Se $r(A) = n$  L'**unica** soluzione è quella banale

Se $r(A) < n$  Il sistema ammette **infinite soluzioni**.
Una di queste è la **soluzione banale**.

Sistemi omogenei

Esempio (P. 51-52)

Consideriamo il sistema omogeneo seguente:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 0 \\ -4x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Calcoliamo il rango della matrice incompleta A_{33} .

Il sistema è quadrato di ordine 3 ($m=n=3$) e si ha $\det(A)=0$ (verificarlo per esercizio).

► $r(A) = p < 3$

Esiste un minore di ordine 2 diverso da 0:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 6 = -8$$

► $r(A) = p = 2$

Il sistema ammette $\infty^{n-p} = \infty^{3-2} = \infty^1$ **soluzioni**, tra cui, ovviamente, quella banale.

Riassumendo

Per un sistema omogeneo con matrice A_{mn} , si ha:

Il sistema è **sempre compatibile**.

Se $r(A) = n$ ► L'unica soluzione è quella banale

Se $r(A) < n$ ► Il sistema ammette infinite soluzioni.
Una di queste è la soluzione banale.

NOTA

I termini noti del 'sistema ridotto' **non sono nulli**, ma sono:

$$-x_3 \text{ e } -6x_3$$

→ il sistema ridotto non è un sistema omogeneo.

Sistemi omogenei

Esempio

Consideriamo il sistema omogeneo seguente:

$$r(A)=2 < 3=n \quad \begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 0 \\ -4x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 6 = -8$$

Il sistema ridotto da risolvere è:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = -x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 = -6x_3 \end{cases}$$

Riassumendo

Per un sistema omogeneo con matrice A_{mn} , si ha:

Il sistema è **sempre compatibile**.

Se $r(A) = n$ ► L'unica soluzione è quella banale

Se $r(A) < n$ ► Il sistema ammette infinite soluzioni.
Una di queste è la soluzione banale.

NOTA

I termini noti del 'sistema ridotto' **non sono nulli**, ma sono:

$$-x_3 \text{ e } -6x_3$$

→ il sistema ridotto non è un sistema omogeneo.

Sistemi omogenei

Esempio

Consideriamo il sistema omogeneo seguente:

$$r(A)=2 < 3=n \quad \begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 0 \\ -4x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 6 = -8$$

Il sistema ridotto da risolvere è:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = -x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 = -6x_3 \end{cases}$$

Applicando la **Regola di Cramer** al sistema ridotto si ottengono le soluzioni seguenti:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -x_3 & 3 \\ -6x_3 & 2 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{-2x_3 + 18x_3}{-8} = -2x_3$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -x_3 \\ 2 & -6x_3 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{6x_3 + 2x_3}{-8} = -x_3$$

$$x_3 = \bar{x}_3$$

Riassumendo

Per un sistema omogeneo con matrice A_{mn} , si ha:

Il sistema è **sempre compatibile**.

Se $r(A) = n$ ► L'unica soluzione è quella banale

Se $r(A) < n$ ► Il sistema ammette infinite soluzioni. Una di queste è la soluzione banale.

Se pongo $x_3 = 0$ ottengo la **soluzione banale**

Se pongo $x_3 = 1$?

ESERCIZI da Lez. IX

Caso 2: Esercizi (da Lez. IX)

Esercizio 1

Per il sistema:

$$x_1 + 3x_2 = 1$$

$$2x_1 + 4x_2 = 3$$

$$4x_1 + 8x_2 = 4$$

Calcolare $r(A)$ e $r(A|b)$ e stabilire se il sistema è compatibile oppure no.

[$r(A)=2$, $r(A|b)=3$ → Il sistema è **incompatibile**.]

Esercizio 2

Per il sistema:

$$x_1 + 2x_2 = 1$$

$$2x_1 + 4x_2 = 2$$

$$4x_1 + 8x_2 = 4$$

Calcolare $r(A)$ e $r(A|b)$ e stabilire se il sistema è compatibile oppure no, calcolando eventualmente il numero delle soluzioni.

[$r(A)=1$, $r(A|b)=1$ → Il sistema è **compatibile** con $\infty^{2-1} = \infty^1$ soluzioni]

Caso 2: Esercizi (da Lez. IX)

Esercizio 1

Per il sistema:

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 &= 1 \\2x_1 + 4x_2 &= 3 \\4x_1 + 8x_2 &= 4\end{aligned}$$

Calcolare $r(A)$ e $r(A|b)$ e stabilire se il sistema è compatibile oppure no.

[$r(A)=2$, $r(A|b)=3$ → Il sistema è **incompatibile**.]

$$A_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Si ha: $m=3$ e $n=2$.

$$(A|b)_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Per il rango della matrice A incompleta si ha $r(A) \leq 2$.

Per il rango della matrice $(A|b)$ completa si ha $r(A|b) \leq 3$.

Minore non nullo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0$$

$$r(A)=2$$

Sistema incompatibile

Minore non nullo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 4 & 8 & 4 \end{vmatrix} \stackrel{\text{Sviluppo formula di Laplace 1 riga}}{=} (16 - 24) - 3(8 - 12) + (16 - 16) =$$

$$r((A|b))=3$$

$$= -8 + 12 = 4 \neq 0$$

Caso 2: Esercizi (da Lez. IX)

Esercizio 2

Per il sistema:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &= 1 \\2x_1 + 4x_2 &= 2 \\4x_1 + 8x_2 &= 4\end{aligned}$$

Calcolare $r(A)$ e $r(A|b)$ e stabilire se il sistema è compatibile oppure no, calcolando eventualmente il numero delle soluzioni.

[$r(A)=1$, $r(A|b)=1 \rightarrow$ Il **sistema è compatibile con $\infty^{2-1} = \infty^1$ soluzioni]**

$$A_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Si ha: $m=3$ e $n=2$.

Per il rango della matrice A incompleta si ha $r(A) \leq 2$.

Tutti i minori di A di ordine 2 sono nulli

NOTA: Il minore analogo a quello dell'esercizio precedente ora è nullo

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$$

Per calcolare $r(A)$ occorre **verificare se esiste un altro minore di ordine 2 non nullo:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 8 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 16 = 0$$

Caso 2: Esercizi (da Lez. IX)

Esercizio 2

Per il sistema:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &= 1 \\2x_1 + 4x_2 &= 2 \\4x_1 + 8x_2 &= 4\end{aligned}$$

Calcolare $r(A)$ e $r(A|b)$ e stabilire se il sistema è compatibile oppure no, calcolando eventualmente il numero delle soluzioni.

$[r(A)=1, r(A|b)=1 \rightarrow \text{Il sistema è compatibile con } \infty^{2-1} = \infty^1 \text{ soluzioni}]$

$$A_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Si ha: $m=3$ e $n=2$.

Si ha $r(A)=1$.

Tutti i minori di A di ordine 2 sono nulli

→ $r(A) < 2$

Siccome i minori di A di ordine 1 corrispondono agli elementi di A, è immediato verificare che **$r(A)=1$** .

Caso 2: Esercizi (da Lez. IX)

Esercizio 2

Per il sistema:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &= 1 \\2x_1 + 4x_2 &= 2 \\4x_1 + 8x_2 &= 4\end{aligned}$$

Calcolare $r(A)$ e $r(A|b)$ e stabilire se il sistema è compatibile oppure no, calcolando eventualmente il numero delle soluzioni.

$[r(A)=1, r(A|b)=1 \rightarrow$ Il **sistema è compatibile con $\infty^{2-1} = \infty^1$ soluzioni]**

$$(A|b)_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Si ha: $m=3$ e $n=2$.

Si ha $r(A)=1$.

Per il rango della matrice $(A|b)$ completa si ha $r[(A|b)] \leq 3$.

NOTA 1: Il determinante di $(A|b)$ ora risulta nullo dato che, ad esempio, la seconda e la terza riga sono linearmente dipendenti.

NOTA 2: Eliminando ad esempio la terza riga, si nota che anche le rimanenti (prima e seconda) sono linearmente dipendenti.

 $r[(A|b)] < 3$

 $r[(A|b)] < 2$

Siccome i minori di $(A|b)$ di ordine 1 corrispondono ai suoi elementi singoli, è immediato verificare che $r[(A|b)]=1$.

Caso 2: Esercizi (da Lez. IX)

Esercizio 2

Per il sistema:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &= 1 \\2x_1 + 4x_2 &= 2 \\4x_1 + 8x_2 &= 4\end{aligned}$$

Calcolare $r(A)$ e $r(A|b)$ e stabilire se il sistema è compatibile oppure no, calcolando eventualmente il numero delle soluzioni.

$[r(A)=1, r(A|b)=1 \rightarrow \text{Il sistema è compatibile con } \infty^{2-1} = \infty^1 \text{ soluzioni}]$

Si ha: $m=3$ e $n=2$.

Si ha $r(A)=1$.
Si ha $r((A|b))=1$



Il sistema è COMPATIBILE

Il sistema ha $\infty^{n-r(A)} = \infty^{2-1} = \infty^1$ soluzioni:

Siccome il rango comune a A e $(A|b)$ è 1, il sistema ridotto sarà ottenuto da **una qualsiasi equazione in una qualsiasi variabile**, ad esempio, scegliendo la **prima equazione**, si ha il seguente **sistema ridotto**:

$$x_1 = -2x_2 + 1$$

da cui si ottengono le ∞ soluzioni della forma: **$x_1 = -2x_2 + 1$** e **x_2 qualsiasi**

Sistemi parametrici

Soluzione di sistemi di equazioni lineari (da Lez- IX)

Caso 1.a: $p = m = n$

sistema **quadrato** e di rango pieno

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Regola di Cramer
Soluzione unica

Caso 1.b: $p = m < n$

Sistema **rettangolare** e di rango pieno

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p + a_{1,p+1}x_{p+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p + a_{2,p+1}x_{p+1} + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pp}x_p + a_{p,p+1}x_{p+1} + \dots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

Sistema ridotto → **Regola di Cramer**
 ∞^{n-p} soluzioni

Caso 2: $p < m$

$$\begin{array}{cccc|c} a_{1,1}x_1 & a_{1,2}x_2 & \dots & a_{1,p}x_p & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & a_{2,2}x_2 & \dots & a_{2,p}x_p & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{p,1}x_1 & a_{p,2}x_2 & \dots & a_{p,p}x_p & b_p \\ a_{k,1}x_1 & a_{k,2}x_2 & \dots & a_{k,p}x_p & b_k \end{array}$$

$(k = p + 1, \dots, m)$

$$\begin{array}{cccc|cccc|c} a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & +\dots & +a_{1,p}x_p & +a_{1,p+1}x_{p+1} & +\dots & +a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & +\dots & +a_{2,p}x_p & +a_{2,p+1}x_{p+1} & +\dots & +a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & & \vdots \\ a_{p,1}x_1 & +a_{p,2}x_2 & +\dots & +a_{p,p}x_p & +a_{p,p+1}x_{p+1} & +\dots & +a_{p,n}x_n & = & b_p \\ a_{p+1,1}x_1 & +a_{p+1,2}x_2 & +\dots & +a_{p+1,p}x_p & +a_{p+1,p+1}x_{p+1} & +\dots & +a_{p+1,n}x_n & = & b_{p+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & +a_{m,2}x_2 & +\dots & +a_{m,p}x_p & +a_{m,p+1}x_{p+1} & +\dots & +a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}$$

Sistema incompatibile

Sistema compatibile

se $p=n$, sistema **quadrato**
 $A_{pp} x_p = b_p$
Regola di Cramer – Soluzione unica

se $p < n$, sistema **ridotto quadrato**
 $A_{pn} x_n = b_p$
Regola di Cramer, ∞^{n-p} soluzioni

Sistemi parametrici

Definizione (sistema parametrico)

Un sistema di equazioni lineari si dice **parametrico** se in almeno una delle sue equazioni appare un **parametro**.

Esempio

x, y, z sono
incognite

$$\begin{cases} 3kx - 2y + z = 1 \\ 2x + 3y - kz = 2 \\ x + 2y + 3z = 2k \end{cases}$$

NOTA In questo sistema le 3 variabili sono indicate con x, y e z .

k è un parametro

NOTA Il parametro k è un valore non noto ma considerato come un **numero** (qualsiasi).

► Risolvere un sistema parametrico significa determinare se esistono (e, in caso affermativo, quante e quali sono) le soluzioni del sistema **al variare del parametro** (o dei parametri).

Dunque l'analisi e il procedimento per la risoluzione di un sistema parametrico sono del tutto **analoghi a quelli di un sistema completamente numerico**, ma **le quantità calcolate** (come ad esempio i minori delle matrici) **sono funzioni dei parametri** del sistema.

Si può ancora utilizzare la **Regola di Cramer**.

Per stabilire le condizioni che assicurano la compatibilità del sistema occorre studiare delle **quantità che dipendono dal valore dei parametri**.

Sistemi parametrici

Esempio

$$\begin{cases} 3kx - 2y + z = 1 \\ 2x + 3y - kz = 2 \\ x + 2y + 3z = 2k \end{cases} \quad A_{33} = \begin{pmatrix} 3k & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -k \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Il sistema è quadrato di ordine 3.

Dobbiamo calcolare il rango della matrice A_{33} che è al massimo pari a 3.

Calcoliamo $\det(A)$:

$$\begin{vmatrix} 3k & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -k \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{\text{Sviluppo prima riga}}{=} 6k^2 + 29k + 13$$

$\det(A)$ è una **funzione del parametro k** (è un polinomio di secondo grado in k).

$\det(A)$ è nullo oppure no?

Occorre **discutere l'equazione di secondo grado $6k^2+29k+13=0$** e individuare per quali valori di k essa è verificata ($\det(A) = 0$) e per quali no ($\det(A) \neq 0$).

Successivamente:

Per i valori di k per cui **non è verificata** si ha $\det(A) = 6k^2+29k+13 \neq 0$ \blacktriangleright $r(A) = 3$

Per i valori di k per cui **è verificata** si ha $\det(A) = 6k^2+29k+13 = 0$ \blacktriangleright $r(A) < 3$

Sistemi parametrici

Esempio

$$\begin{cases} 3kx - 2y + z = 1 \\ 2x + 3y - kz = 2 \\ x + 2y + 3z = 2k \end{cases}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si ha: $6k^2 + 29k + 13 \neq 0 \Leftrightarrow k \neq -\frac{1}{2} \text{ e } k \neq -\frac{13}{3}$

Infatti: $6k^2 + 29k + 13 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{-29 \pm \sqrt{29^2 - 4 \cdot 6 \cdot 13}}{2 \cdot 6} = \frac{-29 \pm \sqrt{529}}{12} =$

$$= \frac{-29 \pm 23}{12} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ -\frac{13}{3} \end{cases}$$

$\det(A)$ è nullo oppure no?

Occorre **discutere l'equazione di secondo grado $6k^2+29k+13=0$** e individuare per quali valori di k essa è verificata ($\det(A) = 0$) e per quali no ($\det(A) \neq 0$).

Successivamente:

Per i valori di k per cui **non è verificata** si ha $\det(A) = 6k^2+29k+13 \neq 0 \quad \blacktriangleright \quad r(A) = 3$

Per i valori di k per cui **è verificata** si ha $\det(A) = 6k^2+29k+13 = 0 \quad \blacktriangleright \quad r(A) < 3$

Sistemi parametrici

Esempio

$$\begin{cases} 3kx - 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + kz = 2 \\ x + 2y + 3z = 2k \end{cases}$$

Si ha: $6k^2 + 29k + 13 \neq 0 \Leftrightarrow k \neq -\frac{1}{2} \text{ e } k \neq -\frac{13}{3}$

Infatti: $6k^2 + 29k + 13 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{-29 \pm \sqrt{29^2 - 4 \cdot 6 \cdot 13}}{2 \cdot 6} = \frac{-29 \pm \sqrt{529}}{12} =$

$$= \frac{-29 \pm 23}{12} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ -\frac{13}{3} \end{cases}$$

Dunque nell'esempio si ha:

Per $k \neq -\frac{1}{2}$ e $k \neq -\frac{13}{3}$ \blacktriangleright $r(A) = 3$

Per $k = -\frac{1}{2}$ e $k = -\frac{13}{3}$ \blacktriangleright $r(A) = 2 < 3$

Infatti: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 1 \neq 0$

Sistemi parametrici

Esempio

$$\begin{cases} 3kx - 2y + z = 1 \\ 2x + 3y - kz = 2 \\ x + 2y + 3z = 2k \end{cases}$$

NOTA Il parametro k appare nelle espressioni dei valori della soluzione del sistema.

Se $k \neq -\frac{1}{2}$ e $k \neq -\frac{13}{3}$:

$$r(A)=3 \rightarrow r((A|b))=3 \rightarrow r(A)=r((A|b))=3=n$$

Il sistema è:

quadrato e di rango pieno

Il sistema compatibile e ammette una

unica soluzione che possiamo individuare applicando la **Regola di Cramer**:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -k \\ 2k & 2 & 3 \end{vmatrix}}{6k^2 + 29k + 13} = \frac{4k^2 - 4k + 25}{6k^2 + 29k + 13}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3k & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -k \\ 1 & 2k & 3 \end{vmatrix}}{6k^2 + 29k + 13} = \frac{6k^3 + 21k - 8}{6k^2 + 29k + 13}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3k & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2k \end{vmatrix}}{6k^2 + 29k + 13} = \frac{18k^2 - 4k - 3}{6k^2 + 29k + 13}$$

Dunque:

$$\text{Per } k \neq -\frac{1}{2} \text{ e } k \neq -\frac{13}{3}$$

$$\blacktriangleright r(A) = 3$$

Il sistema ha **soluzione unica**

(per un fissato valore di k diverso da $-\frac{1}{2}$ e $-\frac{13}{3}$)

$$\text{Per } k = -\frac{1}{2} \text{ e } k = -\frac{13}{3}$$

$$\blacktriangleright r(A) = 2 < 3$$

Sistemi parametrici

Esempio

$$\begin{cases} 3kx - 2y + z = 1 \\ 2x + 3y - kz = 2 \\ x + 2y + 3z = 2k \end{cases}$$

Per i valori $k = -\frac{1}{2}$ e $k = -\frac{13}{3}$ si ha $r(A) = 2$.

Per ciascuno di questi valori **sostituiamo** e otteniamo un **sistema numerico**.

Calcoliamo i sistemi di equazioni lineari numerici che si ottengono nei due casi.

Se $k = -\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}x - 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + \frac{1}{2}z = 2 \\ x + 2y + 3z = -1 \end{cases}$$

Se $k = -\frac{13}{3}$

$$\begin{cases} -13x - 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + \frac{13}{3}z = 2 \\ x + 2y + 3z = -\frac{26}{3} \end{cases}$$

Dunque:

Per $k \neq -\frac{1}{2}$ e $k \neq -\frac{13}{3}$ \blacktriangleright $r(A) = 3$

Per $k = -\frac{1}{2}$ e $k = -\frac{13}{3}$ \blacktriangleright $r(A) = 2 < 3$

Abbiamo dunque due distinti **sistemi numerici** da studiare nella maniera tradizionale.

Sistemi parametrici

Esempio

$$\begin{cases} 3kx - 2y + z = 1 \\ 2x + 3y - kz = 2 \\ x + 2y + 3z = 2k \end{cases}$$

Per i valori $k = -\frac{1}{2}$ e $k = -\frac{13}{3}$ si ha $r(A) = 2$.

Per ciascuno di questi valori **sostituiamo** e otteniamo un **sistema numerico**.

Se $k = -\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}x - 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + \frac{1}{2}z = 2 \\ x + 2y - 3z = -1 \end{cases}$$

NOTA: secondo quanto illustrato nella lezione IX, si doveva procedere orlando il minore di A di ordine 2 non nullo. Ciononostante, si può anche verificare se $r(A|b)=3$ calcolando un altro minore di ordine 3 di $(A|b)$.

Il minore di $(A|b)$ ottenuto accostando le colonne 2 e 3 di A e il vettore b è diverso da 0

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & \frac{1}{2} & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 28 \neq 0$$

► $r(A|b) = 3$

$2 = r(A) \neq r(A|b) = 3$

Il sistema è **incompatibile**

Dunque:

Per $k \neq -\frac{1}{2}$ e $k \neq -\frac{13}{3}$ ► $r(A) = 3$

Per $k = -\frac{1}{2}$ e $k = -\frac{13}{3}$ ► $r(A) = 2 < 3$

Infatti: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 1 \neq 0$

Sistemi parametrici

Esempio

$$\begin{cases} 3kx - 2y + z = 1 \\ 2x + 3y - kz = 2 \\ x + 2y + 3z = 2k \end{cases}$$

Per i valori $k = -\frac{1}{2}$ e $k = -\frac{13}{3}$ si ha $r(A) = 2$.

Per ciascuno di questi valori **sostituiamo** e otteniamo un **sistema numerico**.

Se $k = -\frac{13}{3}$

$$\begin{cases} -13x - 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + \frac{13}{3}z = 2 \\ x + 2y + 3z = -\frac{26}{3} \end{cases}$$

Il **minore di (A|b)** ottenuto con le prime due colonne di A e il vettore b è **diverso da 0**

$$\begin{vmatrix} -13 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -\frac{26}{3} \end{vmatrix} = \frac{1057}{3} \neq 0$$

Dunque:

Per $k \neq -\frac{1}{2}$ e $k \neq -\frac{13}{3}$ \blacktriangleright $r(A) = 3$

Per $k = -\frac{1}{2}$ e $k = -\frac{13}{3}$ \blacktriangleright $r(A) = 2 < 3$

\blacktriangleright $r(A|b) = 3$

$2 = r(A) \neq r(A|b) = 3$

Il sistema è **incompatibile**

Infatti: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 1 \neq 0$

Sistemi parametrici

Esempio

$$\begin{cases} 3kx - 2y + z = 1 \\ 2x + 3y - kz = 2 \\ x + 2y + 3z = 2k \end{cases}$$

Per i valori $k = -\frac{1}{2}$ e $k = -\frac{13}{3}$ si ha $r(A) = 2$.

Per ciascuno di questi valori **sostuiamo** e otteniamo un **sistema numerico**.

Se $k = -\frac{13}{3}$

$$\begin{cases} -13x - 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + \frac{13}{3}z = 2 \\ x + 2y + 3z = -\frac{26}{3} \end{cases}$$

Il **minore di (A|b)** ottenuto con le prime due colonne di A e il vettore b è **diverso da 0**

$$\begin{vmatrix} -13 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -\frac{26}{3} \end{vmatrix} = \frac{1057}{3} \neq 0$$

Dunque:

Per $k \neq -\frac{1}{2}$ e $k \neq -\frac{13}{3}$ \blacktriangleright $r(A) = 3$

Per $k = -\frac{1}{2}$ e $k = -\frac{13}{3}$ \blacktriangleright $r(A) = 2 < 3$

$\blacktriangleright r(A|b) = 3$

$2 = r(A) \neq r(A|b) = 3$

Il sistema è **incompatibile**

\blacktriangleright Il sistema è **incompatibile**

Sistemi parametrici

Esempio

$$\begin{cases} 3kx - 2y + z = 1 \\ 2x + 3y - kz = 2 \\ x + 2y + 3z = 2k \end{cases}$$

SOLUZIONE

Per $k \neq -\frac{1}{2}$ e $k \neq -\frac{13}{3}$



$r(A) = 3$



Il sistema ha **soluzione unica**

NOTA

Questo sistema è quadrato.

In generale si possono formulare sistemi parametrici di dimensioni qualsiasi, anche rettangolari larghi o rettangolari lunghi.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -k \\ 2k & 2 & 3 \end{vmatrix}}{6k^2 + 29k + 13} = \frac{4k^2 - 4k + 25}{6k^2 + 29k + 13}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3k & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -k \\ 1 & 2k & 3 \end{vmatrix}}{6k^2 + 29k + 13} = \frac{6k^3 + 21k - 8}{6k^2 + 29k + 13}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3k & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2k \end{vmatrix}}{6k^2 + 29k + 13} = \frac{18k^2 - 4k - 3}{6k^2 + 29k + 13}$$

Per $k = -\frac{1}{2}$ e $k = -\frac{13}{3}$



$r(A) = 2 < 3$



Il sistema è **incompatibile**

ESERCIZIO

Caso 2: Esercizi (da Lez. IX)

Esercizio 1

Per il sistema:

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 &= 1 \\2x_1 + 4x_2 &= 3 \\4x_1 + 8x_2 &= 4\end{aligned}$$

Calcolare $r(A)$ e $r[(A|b)]$ e stabilire se il sistema è compatibile oppure no.

[$r(A)=2$, $r[(A|b)]=3 \rightarrow$ Il sistema è incompatibile.]

Esercizio 2

Per il sistema:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &= 1 \\2x_1 + 4x_2 &= 2 \\4x_1 + 8x_2 &= 4\end{aligned}$$

Calcolare $r(A)$ e $r[(A|b)]$ e stabilire se il sistema è compatibile oppure no, calcolando eventualmente il numero delle soluzioni.

[$r(A)=1$, $r[(A|b)]=1 \rightarrow$ Il sistema è compatibile con $\infty^{2-1} = \infty^1$ soluzioni]

Caso 2: Esercizi (da Lez. IX)

Esercizio 1

k=3

Per il sistema:

$$\begin{aligned}x_1 + kx_2 &= 1 \\2x_1 + 4x_2 &= k \\4x_1 + 8x_2 &= 4\end{aligned}$$

Calcolare $r(A)$ e $r[(A|b)]$ e stabilire se il sistema è compatibile oppure no.

[$r(A)=2$, $r[(A|b)]=3 \rightarrow$ Il sistema è incompatibile.]

Esercizio 2

k=2

Per il sistema:

$$\begin{aligned}x_1 + kx_2 &= 1 \\2x_1 + 4x_2 &= k \\4x_1 + 8x_2 &= 4\end{aligned}$$

Calcolare $r(A)$ e $r[(A|b)]$ e stabilire se il sistema è compatibile oppure no, calcolando eventualmente il numero delle soluzioni.

[$r(A)=1$, $r[(A|b)]=1 \rightarrow$ Il sistema è compatibile con $\infty^{2-1} = \infty^1$ soluzioni]

Caso 2: Esercizi (da Lez. IX)

Esercizio 3

Risolvere il seguente **sistema parametrico** nel **parametro k**:

$$\begin{aligned}x_1 + kx_2 &= 1 \\2x_1 + 4x_2 &= k \\4x_1 + 8x_2 &= 4\end{aligned}$$

specificando **per quali valori di k** esso è compatibile e per quali non lo è.

Per i valori di k per cui il sistema risulta compatibile, scrivere le **soluzioni esplicite** e calcolarne il **numero**.

$$A_{32} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$r(A) \leq 2$$

Prima di calcolare $r(A)$, si osserva che $r(A)$ sarà sempre inferiore a 3, mentre $r[(A|b)]$ potrebbe essere 3.

Si ha: $m=3$ e $n=2$.

$$(A|b)_{33} = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 2 & 4 & k \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$r[(A|b)] \leq 3$$

Se fosse $r[(A|b)]=3$

→ avremmo sicuramente
 $r(A) \neq r[(A|b)]$

**SISTEMA
INCOMPATIBILE**

DUNQUE conviene calcolare prima il rango di $(A|b)$ e verificare per quali valori di k esso è pieno.

Caso 2: Esercizi (da Lez. IX)

Esercizio 3

Risolvere il seguente sistema parametrico nel parametro k :

$$\begin{aligned}x_1 + kx_2 &= 1 \\2x_1 + 4x_2 &= k \\4x_1 + 8x_2 &= 4\end{aligned}$$

specificando per quali valori di k esso è compatibile e per quali non lo è.

Per i valori di k per cui il sistema risulta compatibile, scrivere le **soluzioni esplicite** e calcolarne il **numero**.

Si ha: $m=3$ e $n=2$.

Sviluppo formula di Laplace 1 colonna

$$\begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 2 & 4 & k \\ 4 & 8 & 4 \end{vmatrix} = (16 - 8k) - 2(4k - 8) + 4(k^2 - 4) =$$
$$= 16 - 8k - 8k + 16 + 4k^2 - 16 =$$
$$= 4k^2 - 16k + 16$$

$$\det[(A|b)] = 0$$

$$\Leftrightarrow k^2 - 4k + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = 2$$

$$(A|b)_{33} = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 2 & 4 & k \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$r[(A|b)] \leq 3$$

Dobbiamo verificare per quali valori di k questo determinante è $\neq 0$

Risolviamo l'equazione di secondo grado in k

Si ha $\det[(A|b)] \neq 0$ se e solo se $k \neq 2$ e quindi per $k \neq 2$ si ha $r[(A|b)]=3$

$$\begin{aligned}ax^2 + bx + c &= 0 \\x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\end{aligned}$$

Caso 2: Esercizi (da Lez. IX)

Esercizio 3

Risolvere il seguente sistema parametrico nel parametro k :

$$\begin{aligned}x_1 + kx_2 &= 1 \\2x_1 + 4x_2 &= k \\4x_1 + 8x_2 &= 4\end{aligned}$$

specificando per quali valori di k esso è compatibile e per quali non lo è.

Per i valori di k per cui il sistema risulta compatibile, scrivere le **soluzioni esplicite** e calcolarne il **numero**.

$$A_{32} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$r(A) \leq 2$$

Prima di calcolare $r(A)$, si osserva che $r(A)$ sarà sempre inferiore a 3, mentre $r[(A|b)]$ potrebbe essere 3.

Si ha: $m=3$ e $n=2$.

Per $k \neq 2$ **SISTEMA INCOMPATIBILE**

$$(A|b)_{33} = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 2 & 4 & k \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$r[(A|b)] \leq 3$$

Se fosse $r[(A|b)]=3$
→ avremmo sicuramente
 $r(A) \neq r[(A|b)]$

SISTEMA INCOMPATIBILE

Per $k \neq 2$ si ha $r(A) \neq r[(A|b)]$

Per $k \neq 2$ **SISTEMA INCOMPATIBILE**

Caso 2: Esercizi (da Lez. IX)

Esercizio 3

Risolvere il seguente sistema parametrico nel parametro k

$$\begin{aligned}x_1 + kx_2 &= 1 \\2x_1 + 4x_2 &= k \\4x_1 + 8x_2 &= 4\end{aligned}$$

specificando per quali valori di k esso è compatibile e

Per i valori di k per cui il sistema risulta compatibile, stabilirne il numero.

$$A_{32} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$r(A) \leq 2$$

Si ha: $m=3$ e $n=2$.

Per $k \neq 2$ SISTEMA INCOMPATIBILE

$$(A|b)_{33} = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 2 & 4 & k \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$r[(A|b)] \leq 3$$

Caso 2: Esercizi (da Lez. IX)

Esercizio 1

Per il sistema:

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 &= 1 \\2x_1 + 4x_2 &= 3 \\4x_1 + 8x_2 &= 4\end{aligned}$$

$$k \neq 2$$

Calcolare $r(A)$ e $r(A|b)$ e stabilire se il sistema è compatibile oppure no.

[$r(A)=2$, $r(A|b)=3 \rightarrow$ Il sistema è incompatibile.]

Esercizio 2

Per il sistema:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &= 1 \\2x_1 + 4x_2 &= 2 \\4x_1 + 8x_2 &= 4\end{aligned}$$

Calcolare $r(A)$ e $r(A|b)$ e stabilire se il sistema è compatibile oppure no, calcolando eventualmente il numero delle soluzioni.

[$r(A)=1$, $r(A|b)=1 \rightarrow$ Il sistema è compatibile con $\infty^{2-1} = \infty^1$ soluzioni]

Caso 2: Esercizi (da Lez. IX)

Esercizio 3

Risolvere il seguente sistema parametrico nel parametro k

$$\begin{aligned} x_1 + kx_2 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 &= k \\ 4x_1 + 8x_2 &= 4 \end{aligned}$$

specificando per quali valori di k esso è compatibile e

Per i valori di k per cui il sistema risulta compatibile, stabilirne il numero.

$$A_{32} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$r(A) \leq 2$$

$$\det((A|b)) = 0$$

$$\Leftrightarrow k^2 - 4k + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = 2$$

Si ha: $m=3$ e $n=2$.

Per $k \neq 2$ **SISTEMA INCOMPATIBILE**

Per $k = 2$?

Per $k=2$ si ha $\det((A|b)) = 0$ e quindi $r[(A|b)] < 3$

Occorre analizzare questo specifico caso singolarmente come sistema numerico:

Caso 2: Esercizi (da Lez. IX)

Esercizio 1

Per il sistema:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 3 \\ 4x_1 + 8x_2 &= 4 \end{aligned}$$

$$k \neq 2$$

Calcolare $r(A)$ e $r(A|b)$ e stabilire se il sistema è compatibile oppure no.

[$r(A)=2$, $r(A|b)=3 \rightarrow$ Il sistema è incompatibile.]

Esercizio 2

Per il sistema:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 2 \\ 4x_1 + 8x_2 &= 4 \end{aligned}$$

$$k = 2$$

Calcolare $r(A)$ e $r(A|b)$ e stabilire se il sistema è compatibile oppure no, calcolando eventualmente il numero delle soluzioni.

[$r(A)=1$, $r(A|b)=1 \rightarrow$ Il sistema è compatibile con $\infty^{2-1} = \infty^1$ soluzioni]

$$(A|b)_{33} = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 2 & 4 & k \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$r[(A|b)] \leq 3$$

Esercizio 2

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 2 \\ 4x_1 + 8x_2 &= 4 \end{aligned}$$

Argomenti della Lezione X

Definizione generale di:

- Sistema (di equazioni lineari) omogeneo
- Sistema (di equazioni lineari) parametrico

Proprietà

Un sistema di equazioni lineari omogeneo è **sempre compatibile**.

Una **soluzione** di un sistema di equazioni lineari omogeneo è sempre data dal **vettore nullo** (tale soluzione è detta **soluzione 'banale'**):

$$x_1=0, x_2=0, \dots, x_n=0$$

Le altre possibili soluzioni (se esistono) si dicono **'non banali'** o **'proprie'**.

Enunciato e dimostrazione dei seguenti risultati:

Teorema

Condizione **necessaria e sufficiente** affinché il sistema omogeneo (S) **abbia soluzioni diverse da quella banale** è che il rango della matrice dei coefficienti

A sia minore del numero delle incognite, cioè $r(A) < n$.