Matematica Corso Base
a.a. 2019-2020

ALGEBRA LINEARE
LEZIONE VII

Federica Ricca

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Determinante di una matrice A e indipendenza lineare delle sue colonne

Determinante di una matrice (QUADRATA)

Determinante di una matrice quadrata A

Ad ogni matrice **quadrata** è possibile associare un numero reale che prende il nome di **determinante della matrice**.

Tale numero è fondamentale per stabilire se gli n vettori colonna dell'insieme $\{a_1,..., a_n\}$ sono linearmente dipendenti o indipendenti.

Si dimostra infatti che:

n vettori di R^n sono **linearmente dipendenti** $\Leftrightarrow$ il determinante della matrice ottenuta per accostamento degli n vettori $a_1,..., a_n$ è **nullo**.

n vettori di R^n sono **linearmente indipendenti** $\Leftrightarrow$ il determinante della matrice ottenuta per accostamento degli n vettori $a_1,..., a_n$ è **diverso da zero**.

NOTA: Per poter calcolare il determinante la matrice deve essere **quadrata**. Per questo motivo qui ci riferiamo al caso particolare di **n vettori di** R^n.

Determinante di A e indip. lineare delle sue colonne

Esempio

Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

n vettori di R^n sono **linearmente dipendenti** $\Leftrightarrow$ il determinante della matrice ottenuta per accostamento degli n vettori $a_1, \ldots, a_n$ è **nullo**.

n vettori di R^n sono **linearmente indipendenti** $\Leftrightarrow$ il determinante della matrice ottenuta per accostamento degli n vettori $a_1, \ldots, a_n$ è **diverso da zero**.

Essa può essere vista come l'accostamento dei tre vettori colonna in R^3:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I 3 vettori sono linearmente indipendenti $\leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$

Evidentemente **det(A)=0** dato che si può applicare il Teorema di Laplace con sviluppo secondo l'**ultima riga tutta nulla**. ▶ I 3 vettori sono linearmente **dipendenti**

QUALI COLONNE SONO LINEARMENTE DIPENDENTI DALLE ALTRE?

COSA ACCADE SE ELIMINIAMO UNA DI QUESTE DALL'INSIEME?

Determinante di A e indip. lineare delle sue colonne

Esempio
Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

n vettori di R^n sono **linearmente dipendenti** ⟺ il determinante della matrice ottenuta per accostamento degli n vettori $a_1, \dots, a_n$ è **nullo**.

n vettori di R^n sono **linearmente indipendenti** ⟺ il determinante della matrice ottenuta per accostamento degli n vettori $a_1, \dots, a_n$ è **diverso da zero**.

Essa può essere vista come l'accostamento dei tre vettori colonna in R^3:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I 3 vettori sono linearmente indipendenti ↔ det(A)≠0

Evidentemente **det(A)=0** dato che si può applicare il Teorema di Laplace con sviluppo secondo l'**ultima riga tutta nulla**.

▶ I 3 vettori sono linearmente **dipendenti**

QUALI COLONNE SONO LINEARMENTE DIPENDENTI DALLE ALTRE?

COSA ACCADE SE ELIMINIAMO UNA DI QUESTE DALL'INSIEME?

▶ Eliminando una delle due colonne blu rimangono

2 vettori linearmente indipendenti

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Determinante di A e indip. lineare delle sue colonne

Esempio

Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

n vettori di R^n sono **linearmente dipendenti**	⟺	il determinante della matrice ottenuta per accostamento degli n vettori $a_1,\dots, a_n$ è **nullo**.
n vettori di R^n sono **linearmente indipendenti**	⟺	il determinante della matrice ottenuta per accostamento degli n vettori $a_1,\dots, a_n$ è **diverso da zero**.

Essa può essere vista come l'accostamento dei tre vettori colonna in R^3:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il rango dell'insieme delle 3 colonne di A è p=2

Ri-accostando i vettori linearmente indipendenti rimasti si ottiene la matrice $A^{(2,3)}$ (rettangolare) con due colonne linearmente indipendenti:

- le **2 colonne** di $A^{(2,3)}$ sono **LIN. INDIP.**
- le **3 righe** di $A^{(2,3)}$ sono **LIN. DIP.**

$$A^{(2,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

È impossibile ottenere una colonna come scalatura dell'altra

Evidentemente la terza riga dipende dalle altre due.

Determinante di A e indip. lineare delle sue colonne

Esempio

Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

n vettori di R^n sono **linearmente dipendenti** ⟺ il determinante della matrice ottenuta per accostamento degli n vettori $a_1, \ldots, a_n$ è **nullo**.

n vettori di R^n sono **linearmente indipendenti** ⟺ il determinante della matrice ottenuta per accostamento degli n vettori $a_1, \ldots, a_n$ è **diverso da zero**.

Essa può essere vista come l'accostamento dei tre vettori colonna in R^3:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il rango dell'insieme delle 3 colonne di A è p=2

Ri-accostando i vettori linearmente indipendenti rimasti si ottiene la matrice $A^{(2,3)}$ (rettangolare) con due colonne linearmente indipendenti:

$$A^{(2,3)} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

LA **INDIPENDENZA** DEI DUE VETTORI COLONNA DERIVA DA **QUESTA PARTE DEI VETTORI.**

- le **2 colonne** di $A^{(2,3)}$ sono **LIN. INDIP.**
- le **3 righe** di $A^{(2,3)}$ sono **LIN. DIP.**

- le **2 colonne** della matrice quadrata estratta da $A^{(2,3)}$ sono **LIN. INDIP.**
- le **2 righe** della matrice quadrata estratta da $A^{(2,3)}$ sono **LIN. INDIP.**

Determinante di A e indip. lineare delle sue colonne

Esempio
Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

n vettori di R^n sono **linearmente dipendenti** $\Leftrightarrow$ il determinante della matrice ottenuta per accostamento degli n vettori $a_1, \dots, a_n$ è **nullo**.

n vettori di R^n sono **linearmente indipendenti** $\Leftrightarrow$ il determinante della matrice ottenuta per accostamento degli n vettori $a_1, \dots, a_n$ è **diverso da zero**.

IN GENERALE:
Dati n vettori $\{a_1, \dots, a_n\}$ in R^m, per capire se sono linearmente indipendenti o no possiamo **accostarli e studiare la matrice risultante**:

Se **n=m** ▶ La matrice risultante **<u>A è quadrata</u>** e si calcola il **determinante di A**. — SI APPLICA IL TEOREMA DI SOPRA

Se **n≠m** ▶ La matrice risultante **A è rettangolare**, ma si può ricorrere al calcolo del **determinante delle** <u>matrici **quadrate** estratte da A</u>. — Si ragiona come sopra ma sulle **matrici quadrate estratte da A**.

Studiare quante colonne (o righe) sono linearmente indipendenti in A_{mn} corrisponde a calcolare il **rango (o *caratteristica*) della matrice A_{mn}**.

Matrice estratta e minore di A

Definizione (matrice estratta)

Data una matrice (rettangolare) A_{mxn}, e fissato **$k \leq \min\{m,n\}$**, si dice **matrice estratta** da A di **ordine k** la matrice (<u>quadrata</u>) composta dagli elementi (nel loro ordine) di k righe e k colonne *scelte* da A.

B_3 matrice estratta da A_{34} (di ordine 3)

$$A_{34} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 4 & 0 & 8 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

C_2 matrice estratta da A_{34} (di ordine 2)

Matrice estratta e minore di A

Definizione (matrice estratta)

Data una matrice (rettangolare) A_{mxn}, e fissato **$k \leq \min\{m,n\}$**, si dice **matrice estratta** da A di **ordine k** la matrice (quadrata) composta dagli elementi (**nel loro ordine**) di k righe e k colonne *scelte* da A.

$$A_{34} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 4 & 0 & 8 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

D_2 matrice estratta da A_{34} (di ordine 2) scegliendo la riga 1 e la riga 3, insieme alle colonne 2 e 3

$$D_2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A_{34} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 4 & 0 & 8 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

E_2 matrice estratta da A_{34} (di ordine 2) scegliendo la riga 1 e la riga 3, insieme alle colonne 1 e 4

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice estratta e minore di A

Definizione (matrice estratta)

Data una matrice (rettangolare) A_{mxn}, e fissato **k ≤ min {m,n}**, si dice **matrice estratta** da A di **ordine k** la matrice (quadrata) composta dagli elementi (nel loro ordine) di k righe e k colonne *scelte* da A.

B_3 matrice estratta da A_{34} (di ordine 3)

$$A_{34} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 4 & 0 & 8 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

C_2 matrice estratta da A_{34} (di ordine 2)

Definizione (minore di ordine k)

Data una matrice A_{mxn}, si definisce **minore** di A di **ordine k** il **determinante** di una matrice quadrata di ordine k estratta da A.

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad C_2 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(B_3) = 1(0-8) - 2(24-24) + 5(4-0) = -8 + 20 = 12$$

$$\det(C_2) = 8 \cdot 1 - 6 \cdot 0 = 8$$

Matrice estratta e minore di A

Perché estraiamo matrici quadrate da una matrice rettangolare data e calcoliamo i rispettivi determinanti?

B_3 matrice estratta da A_{34} (di ordine 3)

C_2 matrice estratta da A_{34} (di ordine 2)

$$A_{34} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 4 & 0 & 8 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Estrarre matrici serve per 'individuare parti' di righe o colonne da cui può derivare l'indipendenza dei vettori.

$$A^{(2,3)} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

LA **INDIPENDENZA** DEI DUE VETTORI COLONNA DERIVA DA **QUESTA PARTE DEI VETTORI.**

Calcolare il relativo determinante serve per capire se quelle parti sono tra loro indipendenti.

Caratteristica o Rango di una matrice A_{mn}

Caratteristica o Rango di una matrice

Vedendo la matrice A_{mxn} come insieme di righe/colonne si può estendere la nozione di **rango di un insieme di vettori** a quella di **rango della matrice A**.

Definizione 1 (caratteristica o rango di A)
Il rango di A, r(A) (o caratteristica di A, Car(A)) è il **massimo numero di vettori (riga o colonna) linearmente indipendenti che si possono estrarre da A**.

Sfruttando la possibilità di individuare minori non nulli della matrice A, si può dare una definizione alternativa di rango di A (più operativa).

Definizione 2 (caratteristica o rango di A)
Data una matrice A_{mxn}, il **rango di A, r(A)** (o caratteristica di A, Car(A)) è l'**ordine massimo di un minore di A <u>non nullo</u>**.
(minore di ordine k = determinante di matrice estratta da A <u>quadrata di ordine k</u>)

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Caratteristica o Rango di una matrice

Definizione 2 (caratteristica o rango di A)
Data una matrice A_{mxn}, il **rango di A, r(A)** (o caratteristica di A, Car(A)) è l'**ordine massimo di un minore di A non nullo**.
(minore di ordine k = determinante di matrice estratta da A quadrata di ordine k)

Si tratta di un numero ('caratteristico') alla matrice A che ci permette di capire quanti vettori linearmente indipendenti (riga/colonna) possiamo trovare **al massimo** nella matrice **rettangolare** A.

Nell'esempio visto prima qual è il numero massimo di vettori linearmente indipendenti che possiamo trovare nella matrice A?

$$A_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- le **2 colonne** di $A_{2,3}$ sono **LIN. INDIP.**
- le **3 righe** di $A_{2,3}$ sono **LIN. DIP.**

Il numero massimo di vettori linearmente indipendenti (righe o colonne) che possiamo trovare in $A_{2,3}$ **è 2.**

L'**ordine massimo di un minore non nullo** di A_{32} **è 2.**

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Caratteristica o Rango di una matrice

Definizione 2 (caratteristica o rango di A)
Data una matrice A_{mxn}, il **rango di A, r(A)** (o caratteristica di A, Car(A)) è l'**ordine massimo di un minore di A non nullo**.
(minore di ordine k = determinante di matrice estratta da A quadrata di ordine k)

Si tratta di un numero ('caratteristico') alla matrice A che ci permette di capire quanti vettori linearmente indipendenti (riga/colonna) possiamo trovare **al massimo** nella matrice **rettangolare** A.

Questa informazione è fondamentale per la soluzione di sistemi di equazioni lineari che affronteremo più avanti.

Esempio 1

B_3 matrice quadrata estratta da A di ordine 3 (prime 3 colonne di A)

$$A_{34} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 4 & 0 & 8 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{det}(\boldsymbol{B_3}) = 1(0-8) - 2(24-24) + 5(4-0)$$
$$= -8 + 20 = 12 \neq 0$$

r(A)=3

Caratteristica o Rango di una matrice

Definizione 2 (caratteristica o rango di A)
Data una matrice A_{mxn}, il **rango di A, r(A)** (o caratteristica di A, Car(A)) è l'**ordine massimo di un minore di A <u>non nullo</u>**.
(minore di ordine k = determinante di matrice estratta da A <u>quadrata di ordine k</u>)

Si tratta di un numero ('caratteristico') alla matrice A che ci permette di capire <u>quanti vettori linearmente indipendenti (riga/colonna)</u> possiamo trovare **al massimo** nella matrice **rettangolare** A.

Questa informazione è fondamentale per la soluzione di sistemi di equazioni lineari che affronteremo più avanti.

Esempio 2

I_3 Matrice identità

$$A_{34} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Delle 4 colonne di A, **al massimo 3** sono linearmente indipendenti.

$$\det(I_3) = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r(A)=3$$

Le 3 righe di A sono linearmente indipendenti.

Caratteristica o Rango di una matrice

Definizione 2 (caratteristica o rango di A)
Data una matrice A_{mxn}, il **rango di A, r(A)** (o caratteristica di A, Car(A)) è l'**ordine massimo di un minore di A non nullo**.
(minore di ordine k = determinante di matrice estratta da A quadrata di ordine k)

Si tratta di un numero ('caratteristico') alla matrice A che ci permette di capire quanti vettori linearmente indipendenti (riga/colonna) possiamo trovare **al massimo** nella matrice **rettangolare** A.

Questa informazione è fondamentale per la soluzione di sistemi di equazioni lineari che affronteremo più avanti.

NOTA Dalla definizione di rango di A segue che vale la seguente proprietà:

$$0 \leq r(A) \leq \min \{m,n\}$$

Infatti:

- r(A) = ordine di un minore di A ≤ m = numero di righe di A;
- r(A) = ordine di un minore di A ≤ n = numero di colonne di A;

L'ordine massimo di un minore di A **non può eccedere** né il numero di righe né il numero di colonne di A.

Inoltre si ha:

$r(A) = 0 \leftrightarrow$ A è la matrice nulla.

Caratteristica o Rango di una matrice

Definizione 2 (caratteristica o rango di A)
Data una matrice A_{mxn}, il **rango di A, r(A)** (o caratteristica di A, Car(A)) è l'**ordine massimo di un minore di A <u>non nullo</u>**.
(minore di ordine k = determinante di matrice estratta da A <u>quadrata di ordine k</u>)

Si tratta di un numero ('caratteristico') alla matrice A che ci permette di capire <u>quanti vettori linearmente indipendenti (riga/colonna)</u> possiamo trovare **al massimo** nella matrice **rettangolare** A.

Questa informazione è fondamentale per la soluzione di sistemi di equazioni lineari che affronteremo più avanti.

NOTA Affinché il rango r(A) sia uguale a k (con k ≤ min{m,n}) è sufficiente che **uno** dei minori di ordine k sia diverso da zero (non **tutti**).

Esempio 3

$$A_{24} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Una possibile matrice estratta di ordine 2

Si ha: $r(A) \le \min\{m,n\} = \min\{2,4\} = 2$

Siccome **esiste** un minore di ordine 2 non nullo, possiamo affermare che **r(A) = 2**

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = 3\cdot 2 - 5\cdot 5 = 6 - 25 = -19 \neq \mathbf{0}$$

Caratteristica o Rango di una matrice

Definizione 2 (caratteristica o rango di A)
Data una matrice A_{mxn}, il **rango di A, r(A)** (o caratteristica di A, Car(A)) è l'**ordine massimo di un minore di A <u>non nullo</u>**.
(minore di ordine k = determinante di matrice estratta da A <u>quadrata di ordine k</u>)

Si tratta di un numero ('caratteristico') alla matrice A che ci permette di capire <u>quanti vettori linearmente indipendenti (riga/colonna)</u> possiamo trovare **al massimo** nella matrice **rettangolare** A.

Questa informazione è fondamentale per la soluzione di sistemi di equazioni lineari che affronteremo più avanti.

NOTA Affinché il rango r(A) sia uguale a k (con k ≤ min{m,n}) è sufficiente che **uno** dei minori di ordine k sia diverso da zero (non **tutti**).

Esempio 4

$$A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

r(A) = 1 perché **tutti** i minori di ordine 2 sono nulli (verificare per esercizio).

Esempio 5

$$A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

r(A) = 2 perché **esiste almeno un minore non nullo** di ordine 2.

Caratteristica o Rango di una matrice

Definizione 2 (caratteristica o rango di A)
Data una matrice A_{mxn}, il **rango di A, r(A)** (o caratteristica di A, Car(A)) è l'**ordine massimo di un minore di A <u>non nullo</u>**.
(minore di ordine k = determinante di matrice estratta da A <u>quadrata di ordine k</u>)

Si tratta di un numero ('caratteristico') alla matrice A che ci permette di capire <u>quanti vettori linearmente indipendenti (riga/colonna)</u> possiamo trovare **al massimo** nella matrice **rettangolare** A.

Questa informazione è fondamentale per la soluzione di sistemi di equazioni lineari che affronteremo più avanti.

Nel caso particolare di matrici **quadrate**:

n vettori di R^n sono **linearmente dipendenti** ⬌ il determinante della matrice ottenuta per accostamento degli n vettori $a_1, \ldots, a_n$ è **nullo**.

n vettori di R^n sono **linearmente indipendenti** ⬌ il determinante della matrice ottenuta per accostamento degli n vettori $a_1, \ldots, a_n$ è **diverso da zero**.

Per una matrice quadrata A_n si ha

$$\det(A) \neq 0 \quad \leftrightarrow \quad r(A) = n\ .$$

NOTA
Una matrice quadrata A_n si dice:
- singolare se $\det(A) = 0$
- non singolare se $\det(A) \neq 0$

Proprietà della caratteristica o rango

Proprietà

P1. Il rango della matrice A coincide con quello della trasposta A^T:

$$r(B) = r(B^T)$$

P2. Moltiplicando una matrice per la sua trasposta il rango rimane immutato:

$$r(AA^T) = r(A)$$

P3. Date due matrici conformi, A_{mn} e B_{nq}, il rango della matrice prodotto è non maggiore del minore dei ranghi delle due matrici date:

$$r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$$

Sistemi di equazioni lineari

Sistemi di equazioni lineari

Consideriamo il sistema di equazioni lineari già introdotto in precedenza:

Sistema di m equazioni in n incognite

$$
\begin{cases}
x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \ldots + x_n a_{1n} = b_1 \\
x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \ldots + x_n a_{2n} = b_2 \\
\ldots \\
x_1 a_{m1} + x_2 a_{m2} + \ldots + x_n a_{mn} = b_m
\end{cases}
$$

x_j incognite
a_{ij} coefficienti
b_i termini noti

Il sistema è equivalente alla equazione vettoriale:

$$
x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_m \end{bmatrix} \Leftrightarrow A_{mn} x_{n1} = b_{m1}
$$

Sistema lineare in forma matriciale

- **compatibile** se ammette soluzioni
- **incompatibile** se non ammette soluzioni.

Sistemi di equazioni lineari

Accostando gli n vettori colonna a sinistra nell'equazione vettoriale si ottiene la matrice (**incompleta**) **A**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = A_{mn}$$

Matrice **INCOMPLETA**

Accostando ad A **il vettore dei termini noti b** si ottiene la matrice (**completa**) **A|b**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} = (A|b)_{m\ \mathbf{n+1}}$$

Matrice **COMPLETA**

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_m \end{bmatrix} \Leftrightarrow A_{mn}\, x_{n1} = b_{m1}$$

Sistema lineare in forma matriciale

- **compatibile** se ammette soluzioni
- **incompatibile** se non ammette soluzioni.

Sistemi di equazioni lineari

Il **rango di A** corrisponde (ad esempio) al **rango dell'insieme degli n vettori colonna di A**.

Possiamo riformulare il Teorema di Rouché-Capelli e il Teorema di Cramer (relativi all'esistenza di soluzioni per il sistema lineare) in termini di rango della matrice A e rango della matrice (A|b):

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_m \end{bmatrix} \Longleftrightarrow A_{mn}\, x_{n1} = b_{m1}$$

Sistema lineare in forma matriciale

- **compatibile** se ammette soluzioni
- **incompatibile** se non ammette soluzioni.

Sistemi di equazioni lineari

Il **rango di A** corrisponde (ad esempio) al **rango dell'insieme degli n vettori colonna di A**.

Possiamo riformulare il Teorema di Rouché-Capelli e il Teorema di Cramer (relativi all'esistenza di soluzioni per il sistema lineare) in termini di rango della matrice A e rango della matrice (A|b):

Teorema (di Rouchè-Capelli)
Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema

$$A_{mn}\, x_n = b_m$$

abbia soluzioni è: $r(A)=r(A|b)$.

Teorema (di Rouché-Capelli)
Condizione necessaria e sufficiente affinché l'equazione vettoriale

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_m \end{bmatrix}$$

abbia soluzioni è che il rango p dell'insieme (incompleto) dei vettori (colonna) $\{a_1,\ldots, a_n\}$ sia uguale al rango dell'insieme (completo) dei vettori $\{a_1,\ldots, a_n, b\}$.

Teorema (di Cramer)
Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema

$$A_{nn}\, x_n = b_n$$

abbia una ed una sola soluzione è: $r(A)=n$.

Teorema (di Cramer)
Se n=m, condizione necessaria e sufficiente affinché l'equazione vettoriale

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \\ a_{n1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \\ a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_n \end{bmatrix}$$

abbia una ed una sola soluzione è che sia p=n, cioè che il rango p dell'insieme $\{a_1,\ldots,a_n\}$ (con $a_i \in R^n\ \forall i=1,2,..,n$) sia uguale a n ('rango pieno').

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Sistemi di equazioni lineari

Il **rango di A** corrisponde (ad esempio) al **rango dell'insieme degli n vettori colonna di A**.

Possiamo riformulare il Teorema di Rouché-Capelli e il Teorema di Cramer (relativi all'esistenza di soluzioni per il sistema lineare) in termini di rango della matrice A e rango della matrice (A|b):

Teorema (di Rouchè-Capelli)
Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema

$$A_{mn}\, x_n = b_m$$

abbia soluzioni è: $r(A)=r(A|b)$.

Teorema (di Cramer)
Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema

$$A_{nn}\, x_n = b_n$$

abbia una ed una sola soluzione è: $r(A)=n$.

Sistemi di equazioni lineari

Il **rango di A** corrisponde (ad esempio) al **rango dell'insieme degli n vettori colonna di A**.

Possiamo riformulare il Teorema di Rouché-Capelli e il Teorema di Cramer (relativi all'esistenza di soluzioni per il sistema lineare) in termini di rango della matrice A e rango della matrice (A|b):

Teorema (di Rouchè-Capelli)
Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema

$$A_{mn}\, x_n = b_m$$

abbia soluzioni è: $r(A)=r(A|b)$.

Applicando il teorema, per decidere se il sistema ha soluzioni oppure no occorre:

1. Calcolare il rango di A;
2. Calcolare il rango di (A|b);

Se $r(A) = r(A|b)$ → il sistema è **compatibile**

Altrimenti (se $r(A) \neq r(A|b)$) → il sistema è **incompatibile**

Calcolo del rango di A_{mxn}

Per calcolare il rango di una matrice A_{mxn}, si procede 'per tentativi successivi', ricordando che $0 \leq r(A) \leq \min\{m,n\}$ e calcolando i minori di ordine p, partendo da dal massimo valore possibile dato da **min {m,n}**.

1. Porre $p = \min\{m,n\}$
2. Calcolare i minori di ordine p di A:
3. Se ce ne è **almeno uno** diverso da 0

   allora $r(A)$ **= p** → **STOP**

   Altrimenti (se **tutti** i minori di ordine p di A sono nulli)

   allora $r(A)$ **< p**

   porre $p = p – 1$ e ripetere dal punto 2.

Calcolo del rango di A_{mxn}

Per calcolare il rango di una matrice A_{mxn}, si procede 'per tentativi successivi', ricordando che $0 \le r(A) \le \min\{m,n\}$ e calcolando i minori di ordine p, partendo da dal massimo valore possibile dato da **min {m,n}**.

1. Porre $p = \min\{m,n\}$
2. Calcolare i minori di ordine p di A:
3. Se ce ne è **almeno uno** diverso da 0
   allora $r(A) = p$ → **STOP**

   Altrimenti (se **tutti** i minori di ordine p di A sono nulli)
   allora $r(A) < p$
   porre $p = p - 1$ e ripetere dal punto 2.

Esempio

$$A_{34} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 4 & 1 \\ 8 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 12 & 3 \end{matrix} & \begin{matrix} 6 & 3 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

1 minore di ordine 2 di A_{34} diverso da 0. ▶ **r(A) =2**

Esempio

Si ha $r(A) \le \min\{3,4\} = 3$

Quanti e quali sono i minori di ordine 3 di A_{34}?

Tutti i minori di ordine 3 di A_{34} sono **nulli** (**individuarli** e calcolarli per esercizio). ▶ $r(A) < 3$

Alternativamente si può escludere subito che il rango di A_{34} sia pari a 3 **notando che la terza riga di A_{34} è 3 volte la prima**.

Si deve procedere a valutare la possibilità p=2.

ESERCIZI (Proprietà della caratteristica o rango)

Proprietà

P1. Il rango della matrice B coincide con quello della trasposta B^T:

$$r(B) = r(B^T)$$

Verificare per esercizio

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

P2. Moltiplicando una matrice per la sua trasposta il rango rimane immutato:

$$r(AA^T) = r(A)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

P3. Date due matrici conformi, A_{mn} e B_{nq}, il rango della matrice prodotto è non maggiore del minore dei ranghi delle due matrici date:

$$r(AB) \leq \min\,(r(A), r(B))$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

ESERCIZI

Calcolare il rango delle seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

Argomenti della lezione VII

Definizione generale di:

- Matrice (quadrata) di ordine k estratta da A_{mn}
- Minore di A di ordine k
- Rango o caratteristica di una matrice A_{mn}
- Matrice quadrata A_n singolare e non singolare
- Matrice incompleta e matrice completa di un sistema di equazioni lineari
- Procedura per il calcolo del rango di A_{mn}
- Sistema di equazioni compatibile e incompatibile

Enunciato dei seguenti risultati:

Teorema di Rouchè-Capelli (per matrici)
Teorema di Cramer (per matrici)

Enunciato dei seguenti risultati:

Proprietà:

$$0 \leq r(A) \leq \min \{m,n\}$$

Proposizione
Per una matrice quadrata A_n si ha $\det(A) \neq 0 \quad \leftrightarrow \quad r(A) = n$.