Matematica Corso Base
a.a. 2019-2020

ALGEBRA LINEARE
LEZIONE VIII

Federica Ricca

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Soluzione di un sistema di equazioni lineari

Sistemi di equazioni lineari (da Lez. VII)

Il **rango di A** corrisponde (ad esempio) al **rango dell'insieme degli n vettori colonna di A**.

Possiamo riformulare il Teorema di Rouché-Capelli e il Teorema di Cramer (relativi all'esistenza di soluzioni per il sistema lineare) in termini di rango della matrice A e rango della matrice (A|b):

Teorema (di Rouchè-Capelli)
Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema

$$A_{mn}\, x_n = b_m$$

abbia soluzioni è: $r(A)=r(A|b)$.

Applicando il teorema, per decidere se il sistema ha soluzioni oppure no occorre:

1. Calcolare il rango di A;
2. Calcolare il rango di (A|b);

Se $r(A) = r(A|b)$ → il sistema è **compatibile**

Altrimenti (se $r(A) \neq r(A|b)$) → il sistema è **incompatibile**

Sistemi di equazioni lineari

Per **individuare le soluzioni** del sistema $A_{mn}x_n = b_m$ indichiamo con p il rango di A e distinguiamo 2 casi:

$$\begin{cases} p=m \text{ (num. equazioni)} \\ p<m \text{ (num. equazioni)} \end{cases}$$

Sistemi di equazioni lineari

Per **individuare le soluzioni** del sistema $A_{mn}x_n = b_m$ indichiamo con p il rango di A e distinguiamo 2 casi:

- p=m (num. equazioni)
- p<m (num. equazioni)

Eseguiamo **prima l'analisi del caso p=m** perché è il più intuitivo e perché sarà utilizzato anche per la risoluzione del sistema lineare <u>negli altri casi</u>.

Ricordiamo che nel caso **p=m**:

TUTTE le m righe della matrice A_{mn} sono LINEARMENTE INDIPENDENTI.

Se p=m si dice che il rango di A_{mn} è **pieno** (massimo).

Proprietà (IMPORTANTE)

Se $p = r(A_{mn}) = m \Rightarrow r((A|b)_{m\ n+1}) = m$

$\Rightarrow$ Se r(A)=m, la condizione del Teorema di Rouchè-Capelli r(A)=r(A|b) è sempre verificata.
Il sistema è **sempre compatibile.**

In altre parole, se **il rango di A è pieno** aggiungendo la colonna b all'insieme delle colonne di A esso <u>non può aumentare</u>.

Soluzione di un sistema di equazioni lineari:
Caso 1: p=m

Soluzione di un sistema di equazioni lineari

Caso 1: **p = m**

Il rango **p** della matrice A è uguale al numero **m** di equazioni del sistema.
Il sistema è **sempre compatibile**.

$A_{mn}\, x_n = b_m$

Ma si distinguono ancora due casi (in base alle dimensioni di A):

a. se m **=** n → p=m **=** n
b. se m **<** n → p=m **<** n

NOTA: p=m > n è **impossibile** perché il rango di A non può essere più grande del numero n delle colonne di A.

Caso 1.a**:** p = **m = n**

In questo caso il sistema di equazioni è **quadrato**, cioè ha n equazioni e n incognite e di rango pieno.

La matrice A ha **tutte** le colonne (p=m=n) linearmente indipendenti:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Caso 1.b: p = **m < n**

In questo caso il sistema di equazioni è **rettangolare**, cioè ha n equazioni e n incognite ed è di rango pieno.

La matrice A ha p=m**<n** colonne linearmente indipendenti, **S.P.I.G.**: le **prime p**.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p + a_{1p+1}x_{p+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p + a_{2p+1}x_{p+1} + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pp}x_p + a_{pp+1}x_{p+1} + \dots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

Soluzione di un sistema di equazioni lineari

Caso 1: p = m

Il rango **p** della matrice A è uguale al numero **m** di equazioni del sistema.
Il sistema è **sempre compatibile**.

$A_{mn}\, x_n = b_m$

Ma si distinguono ancora due casi (in base alle dimensioni di A):

a. se m **=** n → p=m **=** n
b. se m **<** n → p=m **<** n

NOTA: p=m > n è **impossibile** perché il rango di A non può essere più grande del numero n delle colonne di A.

Caso 1.a: p = m = n

In questo caso il sistema di equazioni è **quadrato**, cioè ha n equazioni e n incognite e di rango pieno.

La matrice A ha **tutte** le colonne (p=m=n) linearmente indipendenti:

$$\begin{cases} \boxed{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Caso 1.b: p = m < n

In questo caso il sistema di equazioni è **rettangolare**, cioè ha n equazioni e n incognite ed è di rango pieno.

La matrice A ha p=m**<n** colonne linearmente indipendenti, **S.P.I.G.**: le **prime p**.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p + a_{1p+1}x_{p+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p + a_{2p+1}x_{p+1} + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pp}x_p + a_{pp+1}x_{p+1} + \dots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

Soluzione di un sistema di equazioni lineari:

Caso 1.a: p=m=n

(sistema **quadrato** di **rango pieno**)

Caso 1.a (Sol. di un sistema di eq. Lineari)

Caso 1: **p = m**

Il rango **p** della matrice A è uguale al numero **m** di equazioni del sistema.
Il sistema è **sempre compatibile**.

$A_{mn}\, x_n = b_m$

Caso 1.a**:** p = **m = n**

$A_{\mathbf{nn}}\, x_{\mathbf{n}} = b_{\mathbf{n}}$

In questo caso il sistema ha **n equazioni e n incognite**.

- Si ha $(A|b)_{n\ n+1}$ e dunque r(A) = r(A|b) = n che, per il **Teorema di Rouchè-Capelli**, implica che per il sistema **esiste almeno una soluzione**.
- Per il **Teorema di Cramer**, ciò implica anche che **la soluzione è unica**.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

NOTA: le particolari condizioni di rango pieno **p=m** e sistema quadrato **m=n garantiscono** esistenza e unicità della soluzione del sistema.

La soluzione unica può essere individuata tramite la ***Regola di Cramer***.

Caso 1.a (Sol. di un sistema di eq. Lineari)

Caso 1: **p = m**

Il rango **p** della matrice A è uguale al numero **m** di equazioni del sistema.
Il sistema è **sempre compatibile**.

$A_{mn}\, x_n = b_m$

Caso 1.a: p = **m = n**

$A_{nn}\, x_n = b_n$

Teorema (***Regola di Cramer***)

Il sistema $A_{nn}x_n = b_n$ con $r(A)=n$ ha <u>una ed una sola soluzione</u> data dalla n-pla di valori per le variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ calcolata come segue:

Determinante della matrice ottenuta sostituendo alla **prima colonna** di A il vettore colonna b

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}, \ldots, x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

Determinante di A

Caso 1.a: Esempio

Caso 1: **p = m**

Il rango **p** della matrice A è uguale al numero **m** di equazioni del sistema.
Il sistema è **sempre compatibile**.

$A_{mn}\, x_n = b_m$

Caso 1.a: p = **m = n**

$A_{\mathbf{nn}}\, x_{\mathbf{n}} = b_{\mathbf{n}}$

Esempio Consideriamo il sistema **quadrato** di ordine 3 e **rango pieno** seguente (**p=r(A)=3**):

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

det(A_3) = 18 **≠ 0**
r(A) = 3

Calcoliamo r(A) per verifica. Il determinante della matrice A_{33} dei coefficienti del sistema risulta diverso da 0:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 18$$

r(A) = 3

Caso 1.a: Esempio

Caso 1: **p = m**

Il rango **p** della matrice A è uguale al numero **m** di equazioni del sistema.
Il sistema è **sempre compatibile**.

$A_{mn}\, x_n = b_m$

Caso 1.a: p = **m = n**

$A_{nn}\, x_n = b_n$

Esempio Consideriamo il sistema **quadrato** di ordine 3 e **rango pieno** seguente (**p=r(A)=3**):

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

$\det(A_3) = 18$ **≠ 0**
r(A) = 3

Applichiamo la Regola di Cramer per individuare la soluzione (unica) del sistema:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{18} = \frac{7}{9}$$

Determinante di A

Determinante della matrice ottenuta sostituendo alla **prima colonna** di A il vettore colonna b

Caso 1.a: Esempio

Caso 1: **p = m**

Il rango **p** della matrice A è uguale al numero **m** di equazioni del sistema.
Il sistema è **sempre compatibile**.

$A_{mn}\, x_n = b_m$

Caso 1.a: p = **m = n**

$A_{nn}\, x_n = b_n$

Esempio Consideriamo il sistema **quadrato** di ordine 3 e **rango pieno** seguente (**p=r(A)=3**):

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

det(A_3) = 18 **≠ 0**
r(A) = 3

Applichiamo la Regola di Cramer per individuare la soluzione (unica) del sistema:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{18} = \frac{7}{9}\,,\quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{18} = \frac{4}{9}\,,\quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{18} = -\frac{1}{3}$$

Determinante di A

Determinante della matrice ottenuta sostituendo alla **prima colonna** di A il vettore colonna b

Caso 1.a: Esercizi

Esercizio 1

Risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 1 \\ +3x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

[Si ha $\det(A_3)=2\neq 0$ (A_3 è non singolare) $\rightarrow$ **$r(A_3)=3$**]

Esercizio 2

Risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -3 \\ -2x_1 + 4x_2 &= 0 \end{aligned}$$

[Si ha $\det(A_2)=6\neq 0$ (A_2 è non singolare) $\rightarrow$ **$r(A_2)=2$**]

Soluzione di un sistema di equazioni lineari: Caso 1.b: p=m<n

(sistema rettangolare di **rango pieno**)

Caso 1.b (Sol. di un sistema di eq. lineari)

Caso 1: **p = m**

Il rango **p** della matrice A è uguale al numero **m** di equazioni del sistema.
Il sistema è **sempre compatibile**.

$A_{mn}\, x_n = b_m$

Caso 1.b: p = **m < n**

$A_{pn}\, x_n = b_p$

In questo caso il sistema ha **p equazioni e n>p incognite** (rettangolare).

Si ha $(A|b)_{p\ n+1}$ e, siccome il rango di A è pieno, si ha **p=r(A) = r(A|b)** (compatibilità).

$$\begin{cases} \boxed{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p + a_{1p+1}x_{p+1} + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p + a_{2p+1}x_{p+1} + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pp}x_p + a_{pp+1}x_{p+1} + \ldots + a_{pn}x_n \end{array}} \begin{array}{l} = b_1 \\ = b_2 \\ \\ = b_p \end{array} \end{cases}$$

Per il Teorema di Rouchè-Capelli il sistema è compatibile.

PERO' la condizione del Teorema di Cramer **non è verificata** (r(A) = p **< n**), dunque il sistema non ha soluzione unica, ma ammette **più di una soluzione** (in effetti vedremo che ammette **infinite soluzioni**).

Caso 1.b (Sol. di un sistema di eq. lineari)

Caso 1: **p = m**

Il rango **p** della matrice A è uguale al numero **m** di equazioni del sistema.
Il sistema è **sempre compatibile**.

$A_{mn}\, x_n = b_m$

Caso 1.b: **p = m < n**

$\mathbf{A_{pn}\, x_n = b_p}$

In questo caso il sistema ha **p equazioni e n>p incognite** (rettangolare).
Si ha $(A|b)_{p\ n+1}$ e, siccome il rango di A è pieno, si ha **p=r(A) = r(A|b)** (compatibilità).

'Fissando' il valore delle n-p incognite 'in più' si può ottenere un sistema quadrato di ordine p e di **rango pieno** e poi rifarsi al Caso 1.a.

SPIG: le prime p colonne di A sono lin. indip.

$$\begin{cases} \boxed{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p} + a_{1p+1}x_{p+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p + a_{2p+1}x_{p+1} + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pp}x_p + a_{pp+1}x_{p+1} + \dots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

Fissando ad esempio x_{p+1}, x_{p+2}, … x_n, e aggiornando opportunamente i termini noti del sistema, si ottiene un sistema analogo a quello del Caso 1.a.

Il sistema così ottenuto si chiama **sistema ridotto** del sistema originale ed è quadrato di rango pieno (Caso 1.a).

Si può risolvere applicando la **Regola di Cramer**

Caso 1.b (Sol. di un sistema di eq. lineari)

SISTEMA RIDOTTO

$$\begin{cases} \boxed{x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \ldots + x_p a_{1p}} = b_1 - x_{p+1} a_{1p+1} + \ldots - x_n a_{1n} \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \ldots + x_p a_{2p} = b_2 - x_{p+1} a_{2p+1} + \ldots - x_n a_{2n} \\ \ldots \\ x_1 a_{p1} + x_2 a_{p2} + \ldots + x_p a_{pp} = b_p - x_{p+1} a_{pp+1} + \ldots - x_n a_{pn} \end{cases}$$

PARTE INCOGNITA

PARTE '**NOTA**'

SPIG: le prime p colonne di A sono lin. indip.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p + a_{1p+1}x_{p+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p + a_{2p+1}x_{p+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pp}x_p + a_{pp+1}x_{p+1} + \ldots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

Fissando ad esempio x_{p+1}, x_{p+2}, … x_n, e aggiornando opportunamente i termini noti del sistema, si ottiene un sistema analogo a quello del Caso 1.a.

Il sistema così ottenuto si chiama **sistema ridotto** del sistema originale ed è **quadrato di rango pieno** (Caso 1.a).

Si può risolvere applicando la **Regola di Cramer**

Caso 1.b: Esempio

Caso 1: **p = m**

Il rango **p** della matrice A è uguale al numero **m** di equazioni del sistema.
Il sistema è **sempre compatibile**.

$A_{mn}\, x_n = b_m$

Caso 1.b: **p = m < n**

$A_{pn}\, x_n = b_p$

Esempio Consideriamo il sistema **rettangolare 3x4 di rango pieno** seguente:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

r(A) = 3

RICORDA: Ogni minore di A corrisponde alla scelta di 3 colone di A LIN. INDIP.

Verifichiamo che **p=3**.
Calcoliamo r(A) per tentativi partendo da p = 3 = min{3,4}. Consideriamo tutti i minori di ordine 3 della matrice A_{34} verificando che **almeno uno** è non nullo:

$$D_1 = \boxed{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = 18, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -9$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -15, \quad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 15$$

r(A) = 3

Caso 1.b: Esempio

Caso 1: **p = m**

Il rango **p** della matrice A è uguale al numero **m** di equazioni del sistema.
Il sistema è **sempre compatibile**.

$A_{mn}\, x_n = b_m$

Caso 1.b: **p = m < n**

$A_{pn}\, x_n = b_p$

Esempio Consideriamo il sistema **rettangolare 3x4 di rango pieno** seguente:

$$\begin{cases} \boxed{2x_1 + x_2 + 3x_3} + x_4 = 1 \\ \boxed{x_1 + 2x_2 - x_3} + 3x_4 = 2 \\ \boxed{-x_1 + x_2 + 2x_3} - x_4 = -1 \end{cases}$$

r(A) = 3

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 18;$$

Per risolvere il sistema è necessario **<u>scegliere</u> un minore non nullo** e considerare come variabili solo quelle relative alle colonne della **corrispondente matrice estratta da A** e fissare arbitrariamente il valore delle restanti.

Ad esempio se scelgo:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 18;$$

x_1, x_2 e x_3 rimangono incognite

x_4 è fissata a un valore qualsiasi

La scelta di un minore corrisponde all'esclusione di una colonna, quella della variabile x_4 che fissiamo e conduce a uno specifico SISTEMA RIDOTTO.

Caso 1.b: Esempio

Caso 1: **p = m**

Il rango **p** della matrice A è uguale al numero **m** di equazioni del sistema.
Il sistema è **sempre compatibile**.

$A_{mn}\, x_n = b_m$

Caso 1.b: **p = m < n**

$A_{pn}\, x_n = b_p$

Esempio Consideriamo il sistema **rettangolare 3x4 di rango pieno** seguente:

$$\begin{cases} \boxed{2x_1 + x_2 + 3x_3} + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

r(A) = 3

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 18,$$

SISTEMA RIDOTTO

Parte incognita in funzione delle x

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 - x_4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 - 3x_4 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 + x_4 \end{cases}$$

Nuovo vettore dei termini noti con x_4 fissata (sono scritti in funzione di x_4, ma x_4 ora è considerato un **numero reale qualsiasi**)

A questo punto, per risolvere il sistema, si può applicare la Regola di Cramer al sistema ridotto (quadrato di rango pieno):

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 - x_4 & 1 & 3 \\ 2 - 3x_4 & 2 & -1 \\ -1 + x_4 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{18} = -\frac{5}{6}x_4 + \frac{7}{9}$$

Caso 1.b: Esempio

Caso 1: **p = m**

Il rango **p** della matrice A è uguale al numero **m** di equazioni del sistema.
Il sistema è **sempre compatibile**.

$A_{mn}\, x_n = b_m$

Caso 1.b: **p = m < n**

$A_{pn}\, x_n = b_p$

Esempio Consideriamo il sistema **rettangolare 3x4 di rango pieno** seguente:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

r(A) = 3

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 18;$$

SISTEMA RIDOTTO

Parte incognita in funzione delle x

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 - x_4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 - 3x_4 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 + x_4 \end{cases}$$

b_3

Nuovo vettore dei termini noti con x_4 fissata (sono scritti in funzione di x_4, ma x_4 ora è considerato un **numero reale qualsiasi**)

A questo punto, per risolvere il sistema, si può applicare la Regola di Cramer al sistema ridotto (quadrato di rango pieno):

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 - x_4 & 3 \\ 1 & 2 - 3x_4 & -1 \\ -1 & -1 + x_4 & 2 \end{vmatrix}}{18} = -\frac{5}{6}x_4 + \frac{4}{9}$$

Caso 1.b: Esempio

Caso 1: **p = m**

Il rango **p** della matrice A è uguale al numero **m** di equazioni del sistema.
Il sistema è **sempre compatibile**.

$A_{mn}\, x_n = b_m$

Caso 1.b: **p = m < n**

$A_{pn}\, x_n = b_p$

Esempio Consideriamo il sistema **rettangolare 3x4 di rango pieno** seguente:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

r(A) = 3

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 18$$

SISTEMA RIDOTTO

Parte incognita in funzione delle x

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 - x_4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 - 3x_4 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 + x_4 \end{cases}$$

b_3

Nuovo vettore dei termini noti con x_4 fissata (sono scritti in funzione di x_4, ma x_4 ora è considerato un **numero reale qualsiasi**)

A questo punto, per risolvere il sistema, si può applicare la Regola di Cramer al sistema ridotto (quadrato di rango pieno):

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 - x_4 \\ 1 & 2 & 2 - 3x_4 \\ -1 & 1 & -1 + x_4 \end{vmatrix}}{18} = \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{3}$$

Caso 1.b: Esempio

Caso 1: **p = m**

Il rango **p** della matrice A è uguale al numero **m** di equazioni del sistema.
Il sistema è **sempre compatibile**.

$A_{mn}\, x_n = b_m$

Caso 1.b: **p = m < n**

$A_{pn}\, x_n = b_p$

Esempio Consideriamo il sistema **rettangolare 3x4 di rango pieno** seguente:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

r(A) = 3

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 18,$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1-x_4 & 1 & 3 \\ 2-3x_4 & 2 & -1 \\ -1+x_4 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{18} = -\frac{5}{6}x_4 + \frac{7}{9} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1-x_4 & 3 \\ 1 & 2-3x_4 & -1 \\ -1 & -1+x_4 & 2 \end{vmatrix}}{18} = -\frac{5}{6}x_4 + \frac{4}{9}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1-x_4 \\ 1 & 2 & 2-3x_4 \\ -1 & 1 & -1+x_4 \end{vmatrix}}{18} = \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{3} \qquad x_4 \quad \textit{qualunque}$$

Quanti valori può assumere x_4?

NOTA I valori delle componenti x_1, x_2 e x_3 sono scritti in funzione di x_4, e **x_4 può assumere un qualsiasi valore reale**.

Ad esempio, **se $x_4=0$**:

$$x_1 = \frac{7}{9} \qquad x_2 = \frac{4}{9} \qquad x_3 = -\frac{1}{3} \qquad x_4 = 0$$

Caso 1.b: Esempio

Caso 1: **p = m**

Il rango **p** della matrice A è uguale al numero **m** di equazioni del sistema.
Il sistema è **sempre compatibile**.

$A_{mn}\, x_n = b_m$

Caso 1.b: **p = m < n**

$A_{pn}\, x_n = b_p$

Esempio Consideriamo il sistema **rettangolare 3x4 di rango pieno** seguente:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

r(A) = 3

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 18,$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1-x_4 & 1 & 3 \\ 2-3x_4 & 2 & -1 \\ -1+x_4 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{18} = -\frac{5}{6}x_4 + \frac{7}{9} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1-x_4 & 3 \\ 1 & 2-3x_4 & -1 \\ -1 & -1+x_4 & 2 \end{vmatrix}}{18} = -\frac{5}{6}x_4 + \frac{4}{9}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1-x_4 \\ 1 & 2 & 2-3x_4 \\ -1 & 1 & -1+x_4 \end{vmatrix}}{18} = \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{3} \qquad x_4 \quad qualunque$$

Quanti valori può assumere x_4?

NOTA I valori delle componenti x_1, x_2 e x_3 sono scritti in funzione di x_4, e x_4 può assumere un **qualsiasi valore reale**.

Il sistema ammette **infinite soluzioni**, una per ogni possibile valore attribuito a x_4.

Caso 1.b: Numero di soluzioni

Caso 1: **p = m**

Il rango **p** della matrice A è uguale al numero **m** di equazioni del sistema.
Il sistema è **sempre compatibile**.

$A_{mn}\, x_n = b_m$

Caso 1.b: **p = m < n**

$A_{pn}\, x_n = b_p$

In particolare, essendo le incognite n=4 ed il rango p=3, si dice che il sistema ha $\infty^{n-p} = \infty^{4-3} = \infty^1$ soluzioni (tante quanti sono i valori attribuibili a x_4).

L'esponente del simbolo ∞ indica pertanto il numero di incognite che possono essere fissate arbitrariamente.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1-x_4 & 1 & 3 \\ 2-3x_4 & 2 & -1 \\ -1+x_4 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{18} = -\frac{5}{6}x_4 + \frac{7}{9} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1-x_4 & 3 \\ 1 & 2-3x_4 & -1 \\ -1 & -1+x_4 & 2 \end{vmatrix}}{18} = -\frac{5}{6}x_4 + \frac{4}{9}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1-x_4 \\ 1 & 2 & 2-3x_4 \\ -1 & 1 & -1+x_4 \end{vmatrix}}{18} = \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{3} \qquad x_4 \quad \textit{qualunque}$$

Quanti valori può assumere x_4?

NOTA I valori delle componenti x_1, x_2 e x_3 sono scritti in funzione di x_4, e x_4 può assumere un **qualsiasi valore reale**.

Il sistema ammette **infinite soluzioni**, una per ogni possibile valore attribuito a x_4.

Caso 1.b: Esempio (variante)

Caso 1: **p = m**

Il rango **p** della matrice A è uguale al numero **m** di equazioni del sistema.
Il sistema è **sempre compatibile**.

$A_{mn}\, x_n = b_m$

Caso 1.b: **p = m < n**

$A_{pn}\, x_n = b_p$

Esempio Consideriamo il sistema **rettangolare 3x4 di rango pieno** seguente:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \end{cases} .$$

Calcoliamo r(A) per tentativi partendo da p=3 = min {3,4}. Consideriamo tutti i minori di ordine 3 della matrice A_{34} verificando che **almeno uno** è non nullo:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 18, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -9$$

x_1, x_2 e x_4 incognite
x_3 fissata

$\blacktriangleright$ r(A) = 3

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -15, \qquad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 15$$

NOTA Si poteva risolvere il sistema anche partendo da un altro minore non nullo di ordine 3.

Caso 1.b: Esempio (variante)

Esercizio
Risolvere il sistema **partendo dal minore D_2.**
Contare le soluzioni e confrontare con l'esito dell'esercizio svolto.

$A_{mn}\, x_n = b_m$

Caso 1.b: **p = m < n**

$\mathbf{A_{pn}\, x_n = b_p}$

Esempio Consideriamo il sistema **rettangolare 3x4 di rango pieno** seguente:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \end{cases}.$$

Calcoliamo r(A) per tentativi partendo da p=3 = min {3,4}. Consideriamo tutti i minori di ordine 3 della matrice A_{34} verificando che **almeno uno** è non nullo:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 18, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -9$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -15, \qquad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 15$$

x_1, x_2 e x_4 incognite
x_3 fissata

r(A) = 3

NOTA Si poteva risolvere il sistema anche partendo da un altro minore non nullo di ordine 3.

Argomenti della Lezione VIII

Definizione generale di:

- Sistema Ridotto
- Rango pieno per una matrice A_{mn}
- Regola di Cramer

Impostazione della risoluzione di un sistema di equazioni lineari con matrice dei coefficienti di rango pieno: Casi 1.a e 1.b

Enunciato e dimostrazione dei seguenti risultati:

Proprietà

Se $p = r(A_{mn}) = m \quad \Rightarrow \quad r(\,(A|b)_{m\ n+1}\,) = m$

Caso 1.b: Esempio (variante)

Esercizio
Risolvere il sistema **partendo dal minore D_2.**
Contare le soluzioni e confrontare con l'esito dell'esercizio svolto.

$A_{mn}\, x_n = b_m$

Caso 1.b: **p = m < n**

$A_{pn}\, x_n = b_p$

Esempio Consideriamo il sistema **rettangolare 3x4 di rango pieno** seguente:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \end{cases}.$$

Calcoliamo r(A) per tentativi partendo da p=3 = min {3,4}. Consideriamo tutti i minori di ordine 3 della matrice A_{34} verificando che **almeno uno** è non nullo:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 18, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -9$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -15, \qquad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 15$$

x_1, x_2 e x_4 incognite
x_3 fissata

r(A) = 3

NOTA Si poteva risolvere il sistema anche partendo da un altro minore non nullo di ordine 3.

Caso 1.b: Esempio (variante)

Esercizio
Risolvere il sistema **partendo dal minore D_2.**
Contare le soluzioni e confrontare con l'esito dell'esercizio svolto.

SISITEMA RIDOTTO rispetto a D_2

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -9$$

x_1, x_2 e x_4 incognite
x_3 fissata

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 = 1 - 3x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 2 + x_3 \\ -x_1 + x_2 - x_4 = -1 - 2x_3 \end{cases}$$

SOLUZIONE

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1-3x_3 & 1 & 1 \\ 2+x_3 & 2 & 3 \\ -1-2x_3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-9} = -\frac{5}{3}x_3 + \frac{2}{9} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1-3x_3 & 1 \\ 1 & 2+x_3 & 3 \\ -1 & -1-2x_3 & -1 \end{vmatrix}}{-9} = -\frac{5}{3}x_3 - \frac{1}{9}$$

$$x_4 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1-3x_3 \\ 1 & 2 & 2+x_3 \\ -1 & 1 & -1-2x_3 \end{vmatrix}}{-9} = 2x_3 + \frac{2}{3} \qquad x_3 \quad \textit{qualunque.}$$

Il sistema ha $\infty^{n-p} = \infty^{4-3} = \infty^1$ soluzioni
(tante quanti sono i valori attribuibili a x_3).

Caso 1.b: Esempio (variante)

Confrontiamo le soluzioni trovate per lo stesso sistema usando D_1 e D_2.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 18;$$

x_1, x_2 e x_3 incognite
x_4 fissata

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -9$$

x_1, x_2 e x_4 incognite
x_3 fissata

Se $\mathbf{x_4=0}$:

$$\boxed{x_1 = \frac{7}{9} \qquad x_2 = \frac{4}{9} \qquad x_3 = -\frac{1}{3} \qquad x_4 = 0}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1-3x_3 & 1 & 1 \\ 2+x_3 & 2 & 3 \\ -1-2x_3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-9} = -\tfrac{5}{3}x_3 + \tfrac{2}{9} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1-3x_3 & 1 \\ 1 & 2+x_3 & 3 \\ -1 & -1-2x_3 & -1 \end{vmatrix}}{-9} = -\tfrac{5}{3}x_3 - \tfrac{1}{9}$$

$$x_4 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1-3x_3 \\ 1 & 2 & 2+x_3 \\ -1 & 1 & -1-2x_3 \end{vmatrix}}{-9} = 2x_3 + \tfrac{2}{3} \qquad x_3 \quad \textit{qualunque.}$$

L'insieme delle ∞^1 soluzioni ottenute utilizzando D_1 è in **corrispondenza biunivoca** con l'insieme delle ∞^1 soluzioni ottenute utilizzando D_2.

Siccome quando utilizziamo D_2 possiamo fissare x_3 a qualsiasi valore reale, proviamo a fissarlo proprio a questo valore nella soluzione trovata utilizzando D_2.

$$\mathbf{x_3 = -\frac{1}{3}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= -\frac{5}{3}\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{2}{9} = \mathbf{\frac{7}{9}} \\ x_2 &= -\frac{5}{3}\left(-\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{9} = \mathbf{\frac{4}{9}} \\ x_4 &= 2\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3} = \mathbf{0} \end{aligned}}$$