MATEMATICA DEL CONTINUO

teoria

Alcuni simboli matematici

$\in$ appartiene

$\notin$ non appartiene

$\nexists$ non esiste

$\exists$ esiste

$\exists!$ esiste ed è unico

$\forall$ per ogni

$\Rightarrow$ $\Leftarrow$ implica

$\Leftrightarrow$ se e solo se

$|$ o $:$ tale che

$:=$ per definizione es. $A :=$ lunghezza di ...

Insiemi

Sia U un insieme (una collezione di oggetti/elementi per la quale è possibile dire se un elemento, appartiene o meno all'insieme)

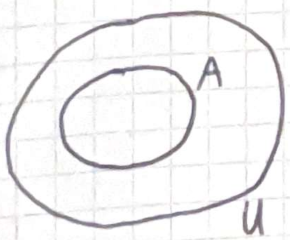
$x \in U$

$\gamma \notin U$

$[U$ insieme universo

- Sottoinsieme

$A \subseteq U$, se ogni elemento di A è un elemento di U



$x \in A \Rightarrow x \in U$

Scriviamo $A \subsetneq U$ se esiste $x \in U$ ma $x \notin A$

Operazioni sugli insiemi

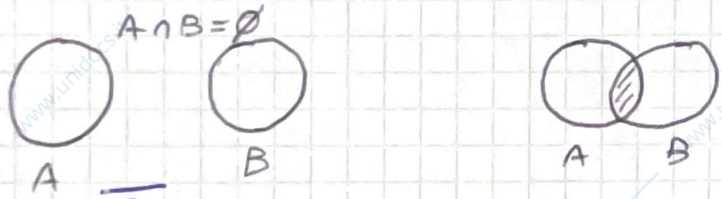
$A, B \subseteq U$

- unione

$A \cup B = \{ x \in U : x \in A \text{ oppure } x \in B \}$

- intersezione

$A \cap B = \{ x \in U : x \in A \text{ e } x \in B \}$



insieme vuoto, per convenzione

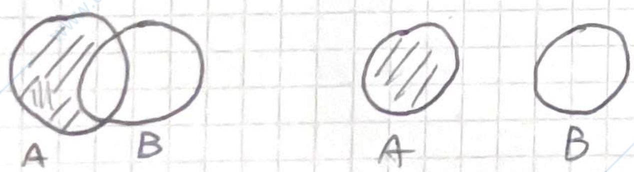
$\forall A \subseteq U \qquad \emptyset \subseteq A$

$A \cup \emptyset = A$

$A \cap \emptyset = \emptyset$

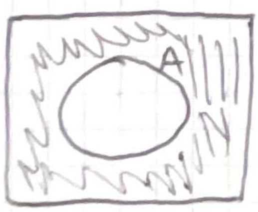
- differenza

$A \setminus B = \{ x \in U : x \in A \text{ e } x \notin B \}$



- complementare

$A^c = U \setminus A$



- prodotto cartesiano

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

insieme di coppie ordinate

Numeri

costruzione assiometrica - assiomi di Peano

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Assiomi di Peano

A1) esiste un numero naturale, 1
A2) se n è un numero naturale, $s(n)$ è un numero naturale
A3) se $n \neq m$ sono numeri naturali, allora $s(n) \neq s(m)$
A4) 1 non è il successore di nessun numero

DIMOSTRAZIONE $4 \neq 1$ A2, $4 = s(3)$
$s(3) \neq 1$

A5) Principio di induzione

Sia P una qualsiasi proprietà.
Supponiamo che $P(1)$ è vera e vale la seguente

se $P(n)$ è vera $\Rightarrow P(s(n))$ vera $\Rightarrow P(n)$ vera $\forall n$

- come definire una somma

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$s(n) = n+1$
$n+2 = n + s(1) = n+1+1 = s(n)+1 = s(s(n))$

$n, m \in \mathbb{N}$

$n+m = s(s \cdot \cdot (n))$

- Operazioni $\forall\ n, m, p \in \mathbb{N}$

ADDIZIONE

p1) prop. commutativa $m+n = n+m$
p2) prop. associativa $(n+m)+p = n+(m+p)$
p3) esiste ed è unico un elemento neutro della somma

$n+0 = n$ $\quad 0+n = n$

denotiamo: $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

PRODOTTO

P4) commutativa $\forall m, n, p \in \mathbb{N}_0$

$$m \cdot n = n \cdot m$$

P5) associativa $n(m \cdot p) = (n \cdot m)p$

P6) esiste elemento neutro 1

$$n \cdot 1 = n \qquad 1 \cdot n = n$$

P7) prop. distributiva

$$n \cdot (m \cdot p) = n \cdot m + n \cdot p$$

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ numeri interi

P1 → P7 valgono

P8) esistenza dell'opposto

$$\forall x \in \mathbb{Z} \quad \exists! \, y \in \mathbb{Z} \mid x + y = 0$$

$$y = -x \rightarrow x + (-x) \rightarrow x - x$$

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

$\mathbb{Q}$ numeri razionali

P1 - P8

P9) esistenza dell'inverso

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \, x \neq 0 \quad \exists! \, y \in \mathbb{Q} \mid x \cdot y = 1$$

$$y = \frac{1}{x}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, \, n \neq 0, \, \text{mcd}(m, n) = 1 \right\}$$

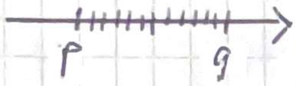
→ identifichiamo $\frac{km}{kn}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

RAPPRESENTAZIONE DECIMALE

$\frac{1}{5} = 0{,}2$; $\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$! N.B. $q \in \mathbb{R} \iff$ ammette una rappresentazione decimale finita o periodica

Teorema $\mathbb{Q}$ è denso

presi due numeri razionali $q, p \in \frac{q+p}{2}$



$\forall\ p < q \in \mathbb{Q}\ \exists\ r \in \mathbb{Q}\quad p < r < q$

ESERCIZIO: $\exists$ numeri non razionali

dimostrazione $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

riduciamo all'assurdo cioè $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

allora $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ con $(m, n) = 1$

$2n^2 = m^2 \Rightarrow m$ pari

$m = 2k$

$2n^2 = 4k^2 \Rightarrow n$ pari

contraddizione

NUMERI REALI

$\mathbb{R}$ è l'insieme di TUTTE le rappresentazioni decimali (infinite, non periodiche ...)

corrispondenza biunivoca con la retta

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$

P1 - P9

DENSITÀ
1) $\mathbb{R}$ è denso in $\mathbb{R}$
2) $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$: $\forall\ a < b \in \mathbb{R}\ \exists\ p \in \mathbb{Q} \mid a < p < b$

- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ irrazionali es π, e ...

$\rightarrow \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Approssimazione dei reali con razionali

$r = a_0, a_1, a_2 \dots \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ $a_0 \in \mathbb{N}$

$a_i \in \{0, 1, 2, 3\} \ \forall i \in \mathbb{N}$

$a_0 \leq r \leq a_0 + 1$

$a_0 + \frac{a_1}{10} \leq r \leq a_0 + \frac{a_1 + 1}{10}$

...

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{10^i} \leq r \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{10^i} + \frac{a_i + 1}{10^i}$$

INSIEMI LIMITATI, ILLIMITATI

Defn. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $M \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$

a) M si dice maggiorante se ogni $x \in A \mid x \leq M$

b) m si dice minorante se ogni $x \in A \mid x \geq m$

c) M si dice massimo se M è maggiorante e $M \in A$

d) m si dice minimo se m è minorante e $m \in A$

e) A è limitato superiormente se ammette almeno un maggiorante

f) A è limitata inferiormente se ammette almeno un minorante

g) A è limitato se $\exists$ lim. sup. e inf.

oss: 1
se A ammette almeno un maggiorante $\Rightarrow$ ne ammette infiniti

oss: 2
se c'è min/max $\Rightarrow$ è unico

Teorema di Completezza di $\mathbb{R}$

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

a) se A è limitato sup, $\exists$ il più piccolo maggiorante, chiamato estremo superiore

b) se A è limitato inferiormente, $\exists$ il più piccolo minorante, chiamato estremo inferiore

oss

se $\sup A \in A \Rightarrow \max A$

esempio

$$A = \overbrace{\{x \in \mathbb{R} : x < 0\}}^{A_1} \cup \overbrace{\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0, x^2 \leq 2\}}^{A_2}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0, x^2 \geq 2\}$$

A_1 A_2 B

$$\begin{bmatrix} \alpha^2 = 2 \\ \alpha = \mathbb{R} \\ \alpha = \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

dim) Sia $\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \geq 0, x^2 = 2$ $(\alpha \in A)$

- dim $\alpha = \max A = \inf B$

1. $\forall x \in A$ $\alpha \geq x$
   - se $x \in A_1$ si
   - se $x \in A_2$ si

2. $\alpha = \inf B$
   - α è minorante si $\alpha \leq x$ $\forall x \in B$
   - α è il più grande minorante

Per Teorema comp $\exists \inf B = \underset{\in \mathbb{R}}{\beta} \neq \alpha$

inoltre, $\beta \in B \Rightarrow \beta < \min B$

Per Teorema Densità $\exists$ $\gamma \in \mathbb{R} \mid \alpha < \gamma < \beta$

$\gamma > \alpha \geq 0 \Rightarrow \gamma \geq 0$

β minorante $\alpha^2 \leq \beta^2 \leq x^2$ $\forall x \in B$

- $2 = \alpha^2 \leq \gamma^2 \leq \beta^2 \Rightarrow \gamma \in B$

NB

$$B = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0, x^2 > 2\}$$

$\nexists \inf B \in \mathbb{Q}$

oss

se A è illimitato per convenzione, per abuso di notazione si scrive:

- $\sup A = +\infty$
- $\inf B = -\infty$

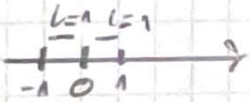
esempi: esistono 9 tipi di intervalli. $a, b \in \mathbb{R}$

- $(a; b)$ (aperto) $= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
- $[a; b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
- $(a; b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
- $(-\infty, b)$ infiniti **mai** inclusi
- $(a, +\infty)$
- $(-\infty, b]$
- $[a, +\infty)$

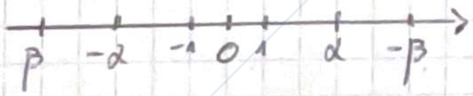
Definizione radice n-esima di un numero reale ≥ 0

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$ Def. $\sqrt[n]{\alpha}$, $n \in \mathbb{N}$
quell'unico numero reale ≥ 0 | $x^n = \alpha$ $\quad (x = \sqrt[n]{\alpha})$

Modulo di un numero reale



- $\alpha > 0$
  $\beta < 0$



$\rightarrow \quad |\alpha| = \alpha$
$\quad\quad |\beta| = -\beta$

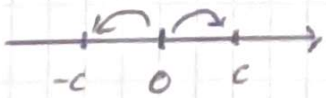
- Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha & \text{se } \alpha \geq 0 \\ -\alpha & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

PROPRIETÀ ($\forall \alpha \in \mathbb{R}$)

- $|\alpha| > 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- $|\alpha| = 0 \iff \alpha = 0$
- dato $c \in \mathbb{R}$, $|\alpha| < c$

1) $c \leq 0 \quad \nexists$
2) $c > 0 \iff -c < \alpha < c \implies \alpha \in (-c, c)$



• date $c \in \mathbb{R}$, $|\alpha| > c$

1) $c < 0$ $\quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
2) $c = 0$ $\quad \forall \alpha \neq 0$
3) $c > 0$ $\quad \alpha > c$ oppure $\alpha < -c \Rightarrow \alpha \in (-\infty, -c) \cup (c, +\infty)$

metodi di risoluzione disequazioni

es. $|x| < 3$, $-3 < x < 3$, $S = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 3\}$, $(-3;3)$

scrittura risultati

es 1

$|x| < 3x+2$

primo modo

... $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

• $\begin{cases} x \geq 0 \\ x < 3x+2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ -1 < 0 \end{cases}$ $\qquad (0, +\infty) \cup \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

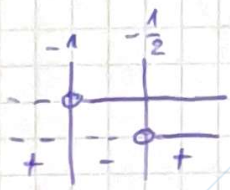
• $\begin{cases} x < 0 \\ -x < 3x+2 \end{cases} \iff \begin{cases} x < 0 \\ -\frac{1}{2} < x \end{cases}$

secondo modo

$-(3x+2) < x < 3x+2$

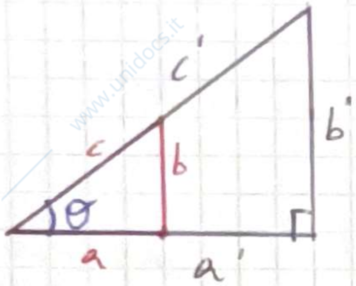
$-4x - 2 < 0 \quad \wedge \quad 2x + 2 > 0$

$\downarrow$ $x > -\frac{1}{2} \qquad x > -1$



$S : \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$

Cenni alla trigonometria



Talete

- $\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$

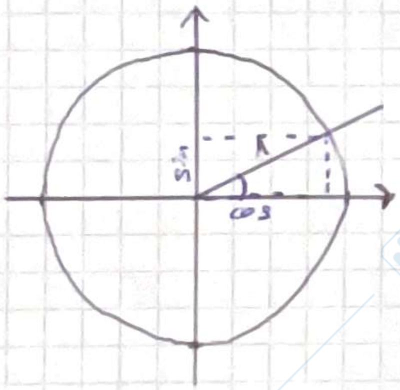
$\frac{a}{c} = \cos\theta$

- $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$

$\frac{b}{c} = \sin\theta$

ponendo $c = 1$ → $a = \cos\theta$
$b = \sin\theta$

→ circonferenza goniometrica



$\theta \in [0, 2\pi]$ oppure $[-1, 1]$,

$\cos 0 , \cos 2\pi = 1$ oppure $[0 + 2k\pi , 2\pi + 2k\pi]$
$\sin 0 , \sin 2\pi = 0$ $k \in \mathbb{Z}$
$\cos\frac{\pi}{2} = 0$
$\sin\frac{\pi}{2} = 1$ ....

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$-1 \leq \frac{\cos}{\sin}\theta \leq 1$

$tg\,\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\cos\theta \neq 0$, $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

formule utili:

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$