8. Calcolo integrale
    a. Integrale indefinito. Primitiva di una funzione. Alcune primitive elementari.
    b. Proprietà dell'integrale indefinito. Integrali definiti e aree. Proprietà dell'integrale definito. Metodi di integrazione per parti e per sostituzione. Integrazione delle funzioni razionali.
    c. **Teorema della media integrale (*). Teorema fondamentale del calcolo integrale (*). Formula fondamentale del calcolo integrale (*).**
    d. Integrali impropri su intervalli limitati e non chiusi e su intervalli chiusi e non limitati. Criteri di integrabilità in senso improprio per funzioni non negative: criterio del confronto, criterio del confronto asintotico. Convergenza assoluta degli integrali impropri.
9. Serie numeriche
    a. Serie geometrica. Serie armonica. Serie armonica generalizzata.
    b. Serie a termini positivi, criteri di convergenza: criterio del confronto, criterio del confronto asintotico, criterio della radice n-esima, criterio del rapporto.
    c. Serie a termini di segno qualunque. Convergenza assoluta. Criterio di Leibniz per la convergenza di serie a segni alterni. Criterio di convergenza assoluta.
    d. Serie numeriche e integrali impropri.
    e. Serie di potenze. Raggio di convergenza e criteri di determinazione. Serie derivata di una serie di potenze. Serie di potenze con raggio non nullo e derivabilità di qualunque ordine della funzione somma. Derivabilità e integrabilità termine a termine di una serie di potenze con raggio non nullo.
    f. Funzioni analitiche o sviluppabili in serie di Taylor. Criterio per poter sviluppare in serie di Taylor. Esempi di funzioni analitiche. Confronto tra formula e serie di Taylor.
    g. Serie di Fourier. Convergenza della serie di Fourier. Formula di Parseval.
    h. Irrazionalità del numero e. Forma esponenziale dei numeri complessi. Formula di Eulero. Equazione di Eulero.

Integrali Indefiniti (antiderivata)

f	f'
x	1
x^3	$3x^2$
$\cos x$	$-\sin x$
$\int f\,dx$	f

es

$$\int 3x^2\,dx = x^3 + c \,, \quad \underline{c \in \mathbb{R}}$$

quasi

Defin: sia $f : I \to \mathbb{R}$

Allora $F : I \to \mathbb{R}$ è detta primitiva di f su F se:

1) F è derivabile in I

2) $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$

Teorema

data $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia

$F : I \to \mathbb{R}$ una sua primitiva. Allora:

i) ogni $G(x) = F(x) + c \,, \quad c \in \mathbb{R}$

ii) ogni altra primitiva di f è $F(x) + c$

dim Sappiamo che F è primitiva per definizione.

i) $F : I \to \mathbb{R}$ è derivabile, $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$

Allora $G : I \to \mathbb{R}$ è deriv. (somma di 2 funz derivabili)

$G'(x) = (F(x)+c)' = F'(x) = f(x)$

$\Rightarrow$ G è una primitiva di f

ii) Sia H una primitiva, quindi H è derivabile e $H' = f$

$\Rightarrow H' = F'$ su I intervallo

2ª conseguenza teo. Lagrange

$\int f(x)\,dx = \{$ insieme delle primitive $\}$

- se f ammette primitiva $\rightarrow F$
- $\int f(x)\,dx = F + c \quad , c \in \mathbb{R}$
- se f ammette una primitiva $\Rightarrow$ ne ammette infinite che differiscono per una costante

Domanda: esiste sempre una primitiva?

- Cond necessaria

se f ammette primitiva $\Rightarrow$ f ha prop. di Darboux

Quindi:
se f non ha Darboux $\Rightarrow$ non ammette primitiva

- Cond sufficiente

f cont. $\Rightarrow$ ammette primitiva

Proprietà di Darboux

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, Allora $f([a,b])$ è un intervallo

Teorema le derivate hanno Darboux

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, derivabile, $f'(a) \neq f'(b)$

Preso y_0 tra $f'(a)$ e $f'(b)$, esiste $x_0 \in (a,b)$ t.c. $f'(x_0) = y_0$

- Le derivate non possono avere disc di Salto

Teorema

Se $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f continua

$\Rightarrow$ ammette primitiva

NB la continuità può essere sostituita con una disc. di salto, vedi Teorema precedente

Proprietà dell'integrale indefinito

$f: I \to \mathbb{R}$, f continua

Sia $F: I \to \mathbb{R}$ una sua primitiva

Allora $\int f(ax+b)\,dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c$, $c \in \mathbb{R}$

dim $\frac{1}{a} F'(ax+b)\,a = f(ax+b)$

Altre proprietà

$f, g: I \to \mathbb{R}$, continue. Allora:

a) $\int a\, f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx$

b) $\int \left(f(x)\,dx + g(x)\,dx \right) dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

Integrazione per parti

f, g derivabili con der. continua su I. Allora:

$\int f(x) \cdot g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx$

... da derivata di prodotto di funzioni

Metodo di sostituzione

$f, g : I \to \mathbb{R}$, I intervallo

f continua ; g derivabile su I

1) $\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\, g'(t)\,dt$

$x = g(x)$

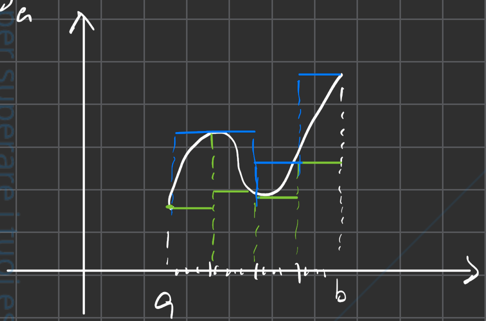
$dx = g'(t)\,dt$

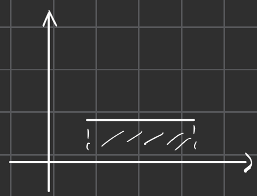
2) se $g' > 0$ $(g' < 0)$ allora

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\, g'(t)\,dt \; dt \Big|_{t = g^{-1}(x)}$$

Integrale di Riemann (definito)

$\int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}$ un numero | $\int f(x)\,dx$ una funzione





per eccesso $\sum_i M_i (x_{i+1} - x_i)$

per difetto

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f limitata

Defin: P si chiama partizione di $[a,b]$ su $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ tale che $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} = b$

Somma superiore rispetto a P $\quad M_i = \sup_{[x_{i-1}; x_i]} f \quad i = 1, n$

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

Somma inferiore rispetto a P $\quad m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \quad i = 1, n$

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$

Oss Area (A) regione tra G_f, O_x in $[a, b]$

$$s(f, P) \le A \le S(f, P) \qquad \forall P \text{ partizione}$$

Proprietà

1) Sia $P = \{x_0, \dots, x_n\}$, sia $P' = P \cup \{y\}$

Allora $S(f, P) \geq S(f, P')$
$s(f, P) \le s(f, P')$

"ad infittirsi della partizione, le somme sup. $\downarrow$, quelle inf $\nearrow$"

2) $\forall P, Q$ 2 partizioni t.c. $P \subseteq Q$ allora

$s(f, P) \le s(f, Q)$ somme inf crescono
$S(f, P) \geq U(f, Q)$ somme sup decrescono

3) $\sup_P s(f, P) = \inf_P S(f, P) = \int_a^b f(x)\,dx$

$\Rightarrow f$ è R-integrabile

Lemma Sia:

$B_1 = \{ s(f, P) : \forall P \text{ partizione} \}$

$B_2 = \{ S(f, P) : \forall P \text{ partizione} \}$

B_1 è lim sup $\Rightarrow$ ammette sup $\alpha = \sup B_1$
B_2 lim inf $\Rightarrow$ $\beta = \inf B_2$

Defin $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, limitata, è integrabile secondo Riemann se $\alpha = \beta$. In tal caso il valore assunto è

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sup_P s(f, P) = \inf_P S(f, P)$$

Significato geometrico

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata

1) $f(x) \geq 0$ in $[a,b]$ allora $\text{Area}(A) = \int_a^b f(x)\,dx$

2) $f(x) \leq 0$ in $[a,b]$ allora $\text{Area}(A) = -\int_a^b f(x)\,dx$

3) $f(x)$ cambia segno $\text{Area}(A) = \int_a^b |f(x)|\,dx$ altrimenti:

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b - f(x)\,dx \qquad c \in [a,b]$$

es

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{se } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1] \end{cases}$$

non integrabile secondo Riemann

Teorema

1) Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua in $[a,b] \Rightarrow f$ è integrabile secondo Riemann

2) Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è limitata e continua fuori da un insieme finito di punti $\Rightarrow$ allora è R-int

Proprietà dell'integrale di R.

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, R-int allora

1) $\int_a^b (\alpha f(x)\, dx)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx$

2) $\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$

3) $\int_a^b dx = b-a$

4) $\int_a^a f(x)\, dx = 0$

5) $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$

6) $\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx$

7) $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^d f(x)\, dx$ se $c > b$ e $c < a$ vale.

$\int_a^c f(x)\, dx - \int_b^c f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$

8) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ con dominio simmetrico

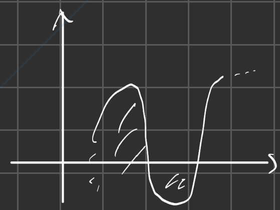
- f è pari ($f(-x) = f(x)$)

$$\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

- f dispari

$$\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

9) $\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$



NB $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,du$

Teorema della media integrale

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$, allora:

$\exists\, z \in [a,b]$ t.c.

$$\int_a^b f(x)dx = f(z)(b-a) \quad = \quad \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(z)$$

Dim f continua su $[a,b] \Rightarrow$ (per teorema Weierstrass) esistono

x_1, x_2 t.c. $m = \min f = f(x_1)$ e $M = \max f(x_2)$ e si ha:

$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a,b]$

siccome f continua in $[a,b] \Rightarrow f$ è R-int

Per la monotonia dell' int.

$$\Rightarrow \int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$$

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \leq M$$

f. continua $\overset{\text{Darboux}}{\Rightarrow}$ f assume tutti i valori tra m e M quindi il valore $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$ cioè $\exists\ z \in (a,b)$ tale la tesi

Funzione Integrale

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, $x \in (a,b]$

Allora $f : [a,x] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,x]$

$\Rightarrow$ esiste $\int_a^x f(t)\, dt \quad \forall x \in [a,b]$

$$\int_a^a f(t)\, dt = 0$$

$F : [a,b] \to \mathbb{R}$

$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ si dice funz. integrale

Teorema fondamentale del calcolo integrabile

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a,b]$

Allora $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ è

i) derivabile in $[a,b]$

ii) si ha $F'(x) = f(x) \quad \forall x\ [a,b]$

NB F è primitiva di f (per definizione di primitiva) dim 1) Sia $x_0 \in (a,b)$ A] si $h>0$ piccolo a piacere tc $x_0+h \in (a,b)$

rapporto incrementale da dx

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt$$ per le proprietà del int-R

f cont, teo media int su $[x_0, x_0+h] \Rightarrow \exists\ z \in [x_0, x_0+h]$ $(x_0 \leq z \leq x_0+h)$

tale che $\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt = f(z)$

segue che $\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt = \lim_{z\to 0^+} f(z) = f(x_0)$

1) A] $\Rightarrow F'_+(x_0) = f(x_0)$

B] se $h>0$ piccolo tc $x_0-h \in (a,b)$
si ottiene $F'_-(x_0) = f(x_0)$

$\Rightarrow F'_+(x_0) = F'_-(x_0) \Rightarrow F$ è deriv. in x_0 e

$F'(x_0) = f(x_0)$

2) in a si procede 1) A] $\Rightarrow F'_+(a) = f(a)$

3) in b si procede 1) B] $\Rightarrow F'_-(b) = f(b)$

oss $f(x) = x^2+1$ in $[0,1]$

$F(x) = \int_0^x (t^2+1)\,dt$ è una primitiva

$G(x) = \int f(x)\,dx = \frac{x^3}{3} + x + c$ una primitiva

$F(x) = G(x)$ $\quad \int_0^1 f(t)\,dt = F(1) = G(1)$

Formula fondamentale del calcolo integrale

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a,b]$.

Sia $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ una primitiva di f.

Si ha: $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$

dim $\cdot$ f continua $\Rightarrow \exists$ primitiva

per la definizione di primitiva:

i) G è derivabile su $[a,b]$

ii) $\forall x \in [a,b]$, $G'(x) = f(x)$

per il TFCI Sappiamo che:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$ è una primitiva

2 primitive su $[a,b]$ differiscono per una costante $\exists\ \mathbb{R}$

ovvero:

$F(b) = G(b) + c$ e $F(a) = G(a) + c$

Ma $F(b) = \int_a^b f(t)\,dt$

$F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$

$\Rightarrow c = -G(a)$

$\Rightarrow F(b) = G(b) - G(a)$ conclusione.

Notazione

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(t)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Integrale definito per parti

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$; f, g derivabile con derivata continua

si ha: $\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx$

Integrale definito per sostituzione

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, $\quad g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$

tali: f cont, g derivabile con derivata continua

Allora $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))\,g'(t)\,dt$

$x = g(t) \Rightarrow dx = g'(t)\,dt$

$x = b \rightsquigarrow t = \beta \qquad (g(\beta) = b)$
$x = a \rightsquigarrow t = \alpha \qquad (g(\alpha) = a)$

dim f continua $\exists$ primitiva e vale per FFCI: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ ☆
con $F'(x) = f$ continua su $[a,b]$

Prendiamo $F \circ g$ (composta) $: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ derivabile con derivata continua,

$(F \circ g)'(x) = (F(g(x)))' = F'(g(x))\,g'(x) = f(g(x))\,g'(x)$

Allora: $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(g(x))\,g'(x)\,dx \Rightarrow \int_\alpha^\beta (F \circ g)'(x) = (F \circ g)(x)\Big|_\alpha^\beta$

$= F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = F(b) - F(a)$ Concludiamo per ☆

NB

$\displaystyle\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt$
funz. in x — funz. in t

$t = g^{-1}(x)$

$\boxed{x = g(t)}$

$g' > 0$

in generale:

- I^a sostituire x con y
- II^a dx con dy
- III^a estremi

osservazioni sulla sostituzione

Mantenere l'ordine degli estremi di integrazione!

1) $\int_{-2}^{0} \frac{3x}{x^2-1}\,dx =$ $\quad x^2 = y \quad 2x\,dx = dy \quad x=0 \rightsquigarrow y=0 \quad x=-\frac{1}{2} \rightsquigarrow y=\frac{1}{4}$

$$\int_{\frac{1}{4}}^{0} \frac{3}{2}\frac{dy}{y-1} = -\int_{0}^{1/4} \frac{3}{2}\frac{dy}{y-1} = -\frac{3}{2}\ln|y-1|\Big|_0^{1/4}$$

Attenzione a sostituzioni non invertibili

$\int_{-1}^{1} x^2 e^{4-x^2}\,dx =$ $\quad 4-x^2 = y \quad x=\pm\sqrt{4-y}$

$x=1 \quad y=3$

$x=-1 \quad y=3$

$\int_3^3 \dots dy = 0$ no!

$$2\int_0^1 x^2 e^{4-x^2}\,dx$$

Integrali Impropri

Ricordo: per Riemann 1) $[a,b]$ 2) f limitata, f cont su $[a,b]$

funzioni continue su $I = [a,b)\ [a,+\infty)$ $\quad \int_a^b f\,dx = K \in \mathbb{R}$

$\underbrace{(a,b]}_{1}\ \underbrace{(-\infty,b]}_{2}$

1) $f:(a,b] \to \mathbb{R}$, continua su $(a,b]$

prendo $\alpha > a \Rightarrow f$ continua su $[\alpha,b]$ & f R-int su $[\alpha,b]$

ovvero:

$\exists$ finito $\int_\alpha^b f(x)\,dx = h(\alpha)$, $h:(a,b] \to \mathbb{R}$ funzione

Cosa possiamo dire del limite $\lim_{\alpha\to a^+} h(\alpha)$?

$$\lim_{\alpha\to a^+} h(\alpha) = \begin{cases} \nexists \\ \exists \text{ infinito} \\ \exists \text{ finito} \end{cases}$$

Quindi:

$$\lim_{\alpha\to a^+} \int_\alpha^b f(x)\,dx =$$

- $\to l \in \mathbb{R}$
  - l'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ CONVERGE
  - f è $\mathbb{R}$-int in senso improprio in $(a,b]$
- $\to \pm\infty$
  - $\int_e^b f(x)\,dx$ DIVERGE
  - f non è $\mathbb{R}$-int in senso improprio in $(a,b]$
- $\to \nexists$
  - l'integrale non esiste

2) $f: [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ cont su $[e,+\infty)$

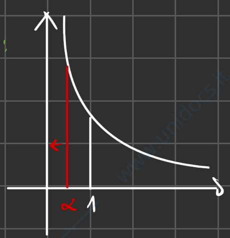
$\alpha > a$, $[a,\alpha] \Rightarrow f$ $\mathbb{R}$-int

$$\lim_{\alpha\to +\infty} \int_a^\alpha f(x)\,dx =$$

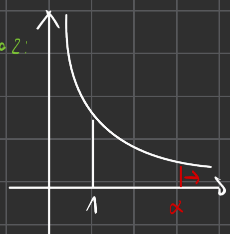
- $\to l \in \mathbb{R}$
  - l'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ CONVERGE
  - f è $\mathbb{R}$-int in senso improprio in $(a,b]$
- $\to \pm\infty$
  - $\int_e^b f(x)\,dx$ DIVERGE
  - f non è $\mathbb{R}$-int in senso improprio in $(a,b]$
- $\to \nexists$
  - l'integrale non esiste

Caso 1:

$\frac{1}{x}$



Caso 2:



Interpretazione geometrica per funzioni non negative

Se l'integrale improprio converge → area compresa tra grafico della funzione e O_x è finito.

Criteri di convergenza per le funzioni campione

1) $\int_0^1 \frac{1}{x^a}\,dx$ converge $\iff$ $a>1$

dim $a=1$ $\quad \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\alpha\to 0^+} \ln|x|\Big|_\alpha^1 = \infty \to$ diverge

$a \neq 1$ $\quad \frac{x^{-a+1}}{-a+1} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ se $-a+1>0$

$\frac{x^{-a+1}}{-a+1} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$ se $-a+1<0$

1.1) $\int_1^\infty \frac{1}{x^a}\,dx$ converge $\iff$ $a>1$

2) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^a \log^b x}$ converge per $b>0$, $a>1$

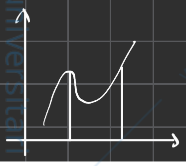
$a \neq 1$

2.1) $\int_0^{1/2} \frac{1}{x^a |\log x|^b}\,dx$ converge per $a<1$

Proprietà

Se $f: I < \begin{matrix} [a,b] \dots [a,b) \dots \\ \mathbb{R} \end{matrix}$

$f \geq 0 \Rightarrow$ integrale improprio esiste (o converge o diverge)



$[a,b)$ $\quad h(\alpha) = \int_a^\alpha f(t)\,dt$

$(a,b]$ $\quad h \nearrow$ in α

Criteri di convergenza di integrali impropri per funzioni non negative

Sia $I = (a,b]$; $[a,b)$; $[a,b)$; $(-\infty, b]$

Criterio del confronto

Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ continue su I con $0 \le f(x) \le g(x)$

Allora:

$$0 \le \int_I f(x)\,dx \le \int_I g(x)\,dx$$

- se $\int_I g(x)\,dx$ converge $\Rightarrow \int_I f(x)\,dx$ converge
- se $\int_I f(x)\,dx$ diverge $\Rightarrow \int_I g(x)\,dx$ diverge

dim

Sia $I = [a,b)$, $\beta < b$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\beta \to b^-} \int_a^\beta f(x)\,dx$$

- f cont su $[a,\beta]$ $\Rightarrow$ R-int
- $f \ge 0 \Rightarrow \lim_{\beta \to b^-} \int_a^\beta$

$f \le g \Rightarrow$ monotona R-int $\int_a^\beta f \le \int_a^\beta g$ $\quad \lim_{\beta \to b^-} \dots$ ok

esempio

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \cos^2 x + 1}$$

converge $\quad f(x) = \frac{1}{x^2 + \cos^2 x + 1} \le \frac{1}{x^2+1} \to \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2}$ converge

$0 \le \cos^2 x \le 1$ teorema Carabinieri

Confronto asintotico

Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ continue su I con $f, g \geq 0$ su I e P punto problematico

tali che $f(x) \sim g(x)$ => allora $\int_I f(x)\,dx$, $\int_I g(x)\,dx$ hanno lo stesso comportamento per $x \to p$

dim

Sia $I = [a, b)$ $p = b$ $\qquad f(x) \sim g(x) \iff \lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^\beta f(x)\,dx}_{\to\ \mathbb{R}\text{-int}} + \int_\beta^b f(x)\,dx$$

=> per x abbiamo vicino a p $\quad \frac{1}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < 3 \quad$ per teorema dei carabinieri

NB

1) anche $f(x) \leq 0$ va bene $\to \int_I f(x)\,dx = -\int_I (-f(x))\,dx$

2) si ha necessità di segno costante negli intorni di P

Funzioni di segno qualunque

$f : I \to \mathbb{R}$, f continua se $\int |f(x)|\,dx$ converge => $\int_I f(x)\,dx$

cenno dim $\qquad f \leq |f|$

$$\left|\int_I f(x)\,dx\right| \leq \int_I |f(x)|\,dx$$

NB $\quad \int |f|$ diverge $\not\Rightarrow \int f$ diverge

es) $\quad \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ → converge $\qquad \int_\pi^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ → diverge

NB I può anche essere (a,b) ; $(-\infty,+\infty)$; $(a,+\infty)$; $(-\infty,b)$

in generale
1° pt prob
2° isolali
3° cosa faccio ?
→ calcolo
→ confronto
→ asintotico

Sia f continua su I :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

NB $I = [a,b] \setminus \{x_0\}$, $x_0 \in (a,b)$; $f: [a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^b f(x)\,dx$$

Un esempio interessante

$f(x) = e^{-x^2}$ detta funzione gaussiana $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua su $\mathbb{R}$

=> ammette primitiva , ma non si può esprimere come funzione elementare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

si può dimostrare che $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge

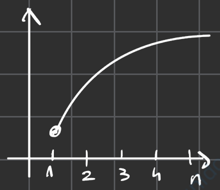
Serie Numeriche

(preliminari $\sum_{i=1}^{300} 10i$)

Intuizione:

- Integrale di Riemann sta a $\sum$ finita come
  l'integrale improprio sta a $\sum$ infinito

Sia $f: [1,+\infty)$ continua e monotona



$$P = \{1,2,3,\dots,n\} \leq f(1)(2-1) + f(2)(3-2) + \dots + f(n-1)(n-1) \leq \int_1^n f(x)\,dx$$

quindi:

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(i) \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq \sum_{i=2}^{n} f(i)$$

Integrale di Riemann

applicando limite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{+\infty} f(i) \leq \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \leq \lim_{n\to+\infty} \sum_{n=2}^{n} f(i)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} f(i) \qquad \text{SERIE NUMERICA}$$

Serie Numerica

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione di numeri reali

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ quanto fa questa somma?

- devo definire la somma parziale

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

- al tendere di $n\to+\infty$ $\{S_n\}_n$ cosa le succede?

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$

S_1

S_2

S_3

S_n

la serie numerica è denotata con $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$ e

- **converge** $\iff \lim_{n\to+\infty} S_n$ converge in quel caso $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i = S$

$\quad\quad " S$

• diverge a $\pm\infty \iff \lim_{n\to+\infty} S_n$ diverge in quel caso $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i = \lim_n S_n$

• è indeterminata se $\nexists \lim_n S_n$ se la serie $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$

Serie di Mengoli

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$ SERIE TELESCOPICA

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$$ serie convergente

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Una serie indeterminata

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \qquad -1, +1, -1, +1, \dots \qquad \{S_n\}_n$$

$$S_n = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ -1 & n = 2k+1 \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}$$

$\nexists \lim \Rightarrow \sum a_n$ è indeterminata

Teorema: condizione necessaria per la convergenza

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_k$ converge $\Rightarrow a_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$

al contrario, se $\{a_k\}_k$ e $a_k \not\xrightarrow[k \to +\infty]{} 0 \Rightarrow \sum a_k$ non converge

dim

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k = a_{k+1}$$

$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge $\Rightarrow \{S_n\}_n$ converge.

Sia $\lim_{n \to +\infty} S_n = l$

$$\lim_{n \to +\infty} (S_{n+1} - S_n) = \lim_{n \to +\infty} S_{n+1} - \lim_{n \to +\infty} S_n = l - l = 0$$

Teorema serie a termini di segno costante

Sia $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$

con $a_n \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow$ la serie converge o diverge a $+\infty$

dim

$\{S_n\}_n \nearrow \quad (S_{n+1} = S_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0})$

$\{S_n\}_n$ ammette limite
- finito se la successione è limitata
- $+\infty$ se succ non è limitata

NB

$b_k \leq 0 \qquad -b_k \geq 0$

$$\sum b_k = -\underbrace{\sum (-b_k)}_{\geq 0}$$

NB

condizione $a_k \geq 0 \ \forall k$ può essere soddisfatta con definitivamente

Alcune serie campione

SERIE GEOMETRICA

sia $x \in \mathbb{R}$ fissato

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

- $x = 1$ $\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \lim_{n \to +\infty} n = +\infty$

condizione necessaria $\quad a_k = x^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0 \qquad |x| < 1$

- $x \neq 1$ $\quad \displaystyle S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{1-x}$ $\quad |x| < 1$ converge

$x > 1$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & , \text{ se } |x| < 1 \\ +\infty & , \text{ se } x \geq 1 \\ \text{indeterminata} & , \text{ se } x \leq 1 \end{cases}$$

esempio

$0,\overline{9} = 1 \qquad 0,\overline{9} = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \dots$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{9}{10^i} = 9 \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i = 9\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1\right) = 1 \qquad 0<x<1$$

SERIE ARMONICA

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

- $\frac{1}{n} \geq 0$, $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ ok <u>cond. nec</u>
- non converge $\Rightarrow$ diverge a $+\infty$

dim

$f \searrow \qquad \sum_{i=2}^{n} f(i) \leq \int_1^{+\infty} f(x)dx \leq \sum_{i=1}^{+\infty} f(i)$

SERIE ARMONICA GENERALIZZATA (1)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$$

converge $\Leftrightarrow a>1$
diverge $\Leftrightarrow a \in (-\infty, 1]$

(legame con int. improprio $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a} dx$)

- $a=0 \qquad a_n = 1 \qquad S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = n+1$

SERIE ARMONICA GENERALIZZATA (2)

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^a (\log n)^b}$$

converge $\Leftrightarrow$
i) $a>1$
ii) $a=1$ e $b>1$

Criteri di convergenza per serie a termini di segno costante

1) CONFRONTO

Siano $\{a_n\}_n$, $\{b_n\}_n$ 2 successioni tc $0 \leq a_n \leq b_n$

Allora $0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$

Quindi se:

i) $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge

ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge

dim

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad T_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$

$0 \leq S_n \leq T_n \underset{\text{perm. segno}}{\Rightarrow} 0 \leq \lim_n S_n \leq \lim_n T_n$

NB

$\sum a_n$, $\sum b_n$ possono solo convergere o divergere

es

$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{n^2+\sin^2 n}}_{a_n}$ $\qquad$ • $a_n \geq 0$, $a_n \searrow$

$0 \leq \sin n \leq 1 \rightarrow n^2 \leq n^2+\sin^2 n \leq n^2+1$

$\frac{1}{n^2+1} \leq a_n \leq \frac{1}{n^2} \rightarrow \sum \frac{1}{n^2}$ converge $\Rightarrow a_n$ converge

2) CONFRONTO ASINTOTICO

Siano $\{a_n\}_n$, $\{b_n\}_n$ 2 successioni t.c.

- $a_n > 0$
- $b_n > 0$
- $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ e $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ hanno lo stesso carattere

es

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{n + 2^n + \log n}{e^n + n^2 - \frac{1}{n}}}_{a_n}$$

- $a_n \geq 0$

$$a_n \sim \frac{2^n}{e^n} = \left(\frac{2}{e}\right)^n \qquad 0 < \frac{2}{e} < 1$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^n$ converge come serie geometrica

3) CRITERIO DELLA RADICE n-esima

Sia $a_n \geq 0$, $\exists \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \in \underline{[0,+\infty) \cup \{+\infty\}} = [0,+\infty]$ abuso di notazione

i) se $l \in [0,1) \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge

ii) se $l \in (1,+\infty] \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge

iii) se $l = 1$??

dim

Sia $\varepsilon > 0$ t.c. $l+\varepsilon < 1$ Def. lim $\exists N \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq N$ si ha

$0 \leq \sqrt[n]{a_n} < l+\varepsilon \Rightarrow 0 \leq a_n < \underbrace{(l+\varepsilon)^n}_{<1}$

$\sum_{n=0}^{+\infty} (l+\varepsilon)^n$ con $0 < l+\varepsilon < 1$ converge (serie geometrica)

$\Rightarrow \sum a_n$ converge per teorema confronto

es

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n} \qquad a_n \geq 0 \qquad a_n \searrow 0 \qquad \sqrt[n]{a_n} = \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$$

4) CRITERIO DEL RAPPORTO

Sia $a_n > 0$, sia $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in [0,+\infty]$

i) se $l \in [0,1) \Rightarrow \sum a_n$ converge

ii) se $l \in (1,+\infty] \Rightarrow \sum a_n$ diverge

iii) se $l = 1$??

es

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \qquad 0! = 1$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot n! = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \text{ converge}$$

Casi particolari: la serie geometrica

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge

entrambi: criteri non sono utili per verificare la convergenza/divergenza.

Criteri di convergenza per serie a termini di segno alterni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n \quad \text{con} \quad a_n \geq 0$$

CRITERIO DI LEIBNIZ

i) $a_n \geq 0$

ii) $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

iii) $a_{n+1} \leq a_n$

$\Rightarrow \sum (-1)^n a_n$ converge

dim (cenno)

$S_0 \geq 0$

$S_1 = a_0 - a_1 \geq 0$ (per monotonia)

$S_2 = a_0 - a_1 + a_2 \leq S_0$

$S_3 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \geq S_1$

si ottiene

$S_0 \geq S_2 \geq S_4 \geq \dots \geq 0$

$S_1 \leq S_3 \leq S_5 \leq \dots$

$\Rightarrow \{S_{2k}\}_k \searrow \quad , \quad \{S_{2k+1}\}_k \nearrow$

$\Rightarrow \exists \lim S_{2k} = l_1$

es

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n$ $\qquad n \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$ $\Rightarrow$ non soddisfa condizione necessaria
$\Rightarrow$ serie non converge

2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ $\qquad a_n = \frac{1}{n}$

$a_n \geq 0$ ok
$a_n \longrightarrow 0$ ok $\Rightarrow$ serie converge
$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ ok

3) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\log n}$ $\qquad a_n = \frac{1}{n\log n}$

$a_n \geq 0$ ✓
$a_n \longrightarrow 0$ ✓ $\Rightarrow$ serie converge
$a_{n+1} \leq a_n$ ✓

Criteri di convergenza per serie a termini di segno qualsiasi

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ con $a_n \in \mathbb{R}$

CRITERIO DI CONVERGENZA ASSOLUTA

Def.n la serie converge assolutamente se converge $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$

Teorema

Se $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge se la serie converge assolutamente allora la serie converge

dim

$$|a_n| = \begin{cases} a_n, & a_n \geq 0 \\ -a_n, & a_n < 0 \end{cases}$$

$a_n + |a_n| \geq 0$

$a_n + |a_n| \leq \sum |a_n| \Rightarrow \underset{\uparrow\ \text{converge per confronto}}{\sum (a_n + |a_n|)}$

Allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(a_n + |a_n|) - |a_n|\right] = S_1 - S_2 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge

NB non vale $\Leftarrow$

la serie iniziale $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ può convergere e $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ no!

es (serie a termini di segno alterni)

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\log n} \qquad a_n \geq 0 \qquad a_n \longrightarrow 0 \qquad a_n \searrow 0$$

$\Rightarrow$ serie converge per crit. Leibniz

converge anche assolutamente ?

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n\log n}\right| = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\log n}$$ serie armonica generalizzata (2) diverge

Serie di potenze

polinomio di Taylor ... $x \in \mathbb{R}$, $\{a_k\}_k$ successioni di numeri reali

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - \underbrace{x_0}_{0})^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Serie di potenze centrata in 0

NB

Se $a_k = 1 \quad \forall k$

$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ converge $\Leftrightarrow |x| < 1$ e in quel caso $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$

es

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge $\Leftrightarrow |x| < 1$

se $x = 0 \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1$

se $x \neq 0$ (non è serie a segno costante)

c'è convergenza assoluta? $|b_n| = \left|\frac{x^n}{n!}\right| = \frac{|x^n|}{n!} \geq 0$

applico criterio del rapporto $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow[n]{} 0$

$\Rightarrow \sum b_n$ converge

$\Rightarrow \sum \frac{x^n}{n!}$ converge assolutamente $\Rightarrow$ converge $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = f(x)$

Def in

data una serie di potenze si chiama insieme di convergenza

$E = \{ x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge $\}$

Funzione somma

$f: E \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

1) $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \qquad E = (-1, 1) \qquad f(x) = \frac{1}{1-x}$

2) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad E = \mathbb{R} \qquad f: E \to \mathbb{R}$

NB

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \ldots$

Teorema - Proprietà

data una qualsiasi serie di potenze si ha:

i) $E \neq \emptyset$

ii) $E = \{0\}$

iii) $E = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

iv) $E = [/(-R, R)/]$ aperto / chiuso a destra / sinistra Raggio di convergenza

Def.n $R = \sup E$ è detto raggio di convergenza della serie di potenze

Teorema come determinare R?

Data $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

i) se esiste $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l \in [0, +\infty]$

ii) se esiste $\lim_{n \to +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l \in [0, +\infty]$

Allora $\begin{cases} R = 1/l & l \in (0, +\infty] \\ R = 0 & l = +\infty \\ R = +\infty & l = 0 \end{cases}$

dim i)

$b_n = |a_n x^n| \geq 0$ $\qquad \sqrt[n]{b_n} = \sqrt[n]{a_n}\ |x| \xrightarrow[n \to +\infty]{} l|x|$ $\qquad$ supp. $l \in (0, +\infty)$

$= |a_n| |x^n|$ $\qquad$ crit radice n-esima

• se $l|x| < 1$ $\quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge assolutamente $\Rightarrow$ converge

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge per $x \in \left(-\frac{1}{l}, \frac{1}{l}\right) = (-R, R)$

- se $l|x|>1 \Rightarrow$ per n abbastanza $\sqrt[n]{b_n} > 1 \Rightarrow b_n \geq 1$
$\Rightarrow b_n \not\to 0 \Rightarrow a_n x^n \not\to 0$

$\sum a_n x^n$ serie non converge

esempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$$

- $$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)\, n!}{(n+1)(n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \longrightarrow \frac{1}{e}$$

$= R = e \qquad E = (-e, e)$

- $x = e$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n} e^n = n! \left(\frac{e}{n}\right)^n$$

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \Rightarrow b_n \not\to 0 \Rightarrow \text{diverge}$$

- $x = -e$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n! \left(\frac{e}{n}\right)^n \qquad |b_n| \not\to 0 \qquad \text{serie non converge}$$

Serie derivata

Def.n data $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ serie di potenze, $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$ è la serie derivata

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

NB

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \dots$$

Teorema

i) La serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ e la sua serie derivata $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$

hanno lo stesso raggio di convergenza

ii) se $\sum a_n x^n$ ha raggio R con $R \in (0, +\infty]$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = f(x) \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = f'(x) \quad \forall x \in (-R, R)$$

iii) $\forall k \in \mathbb{N}$ se $R = (0, +\infty]$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} (n-1) \cdots (n-k+1) \, x^{n-k}$$

Serie Integrata

Def.n data $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ serie di potenze, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ è la serie integrata

NB

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \dots$$

$$\int_0^x a_n t^n \, dt$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \int_0^x f(t)\,dt \quad \forall x \in (-R,R)$$

1° esempio: serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\,x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\,x^n$$

per il teorema precedente, si ha:

- $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n$ hanno $R=1$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\,x^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)' \quad \forall x \in (-1,1) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

- $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ha $R=1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = -\log|1-x| \quad \forall x \in (-1,1)$$

2) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n \longrightarrow$ serie geometrica con ragione $-x$

Sia $E: |-x|<1 \qquad f(x) = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}$

serie integrata

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt \quad \forall x \in (-1,1) = \log|1+x| \quad \forall x \ (-1,1)$$

$$= \log(1+x) \longrightarrow \text{ha espansione di Taylor}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$$

3) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

$a_n = \frac{1}{n!}$ $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{1} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Rightarrow R = +\infty$

$\Rightarrow E = (-\infty, +\infty)$

$\exists\ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tc $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-n)!} x^{n-1}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} x^m = f(x)$$

Teorema della serie derivata

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} x^m = f'(x)$$

$\Rightarrow f(x) = f'(x) \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = e^x$

NB

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Notazione

$f \in C^\infty(I)$ (I: intervallo) se f è derivabile k volte, $k \in \mathbb{N}$

Domanda: se $f \in C^\infty$

$\Rightarrow$ posso scrivere $f^{(k)}(0)$ come $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$

• se $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$

$f(0) = a_0$, $f'(0) = a_1$, $f''(0) = 2a_2$, ..., $f^{(k)}(0) = k\, a_k$

- se $f \in C^{\infty}$, posso sempre scrivere la serie di Taylor
- se $f \in C^{\infty}$ e f è la somma delle serie di potenze, la serie di potenza è la serie di Taylor

Domanda: $\forall f \in C^{\infty}$, è vero che $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} x^k$ <u>NO</u>

C^{∞} = derivabile infinite volte

$\Rightarrow \forall f \in C^{\infty}$, f derivabile infinite volte

e $f \in C^{\infty}(I)$ f derivabile infinite volte <u>dentro</u> all'intervallo I

Serie di Taylor

Def.

Sia $f \in C^{\infty}(x_0-\delta, x_0+\delta)$,

f si dice sviluppabile in serie di Taylor centrata in x_0 se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$$

Teorema: condizione necessaria

Sia $f \in C^{\infty}(x_0-\delta, x_0+\delta)$ con $\delta > 0$. Supponiamo che $\exists M > 0$ t.c.

$$|f^{(n)}(x)| \leq M \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta), \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow f$ è sviluppabile in serie di Taylor di centro x_0

dim

usiamo il polinomio di Taylor con resto di Lagrange

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \quad \text{per} \quad n \to +\infty \text{ si ha } f(x) = \lim_{n\to+\infty} P_n(x) + \lim R_n(x)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad \text{con } z \text{ tra } x \text{ e } x_0$$

voglio dimostrare che $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$

$$|R_n(x)| \leq M \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!} \cdot M \longrightarrow 0 \quad \Rightarrow R_n \to 0 \quad \forall x \in (x_0-\delta; x_0+\delta)$$

esempi

1) $f(x) = \sin x \qquad f'(x) = \cos x \qquad f''(x) = -\sin x \qquad f'''(x) = -\cos x$

$$|f^{(n)}(x)| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{sviluppo in } 0$$

2) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

3) teorema precedente vale anche per la funzione esponenziale $f(x) = e^x$

$$|f^{(n)}(x)| = e^x \leq e^{\delta} = M \quad \forall x \in (-\delta, \delta)$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{con centro in } 0$$

Polinomio di Taylor centrato in x_0

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Sia f n volte derivabile in $U_\delta(x_0)$
$\exists$ z tra x e x_0

$$f(x) = P_n(x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{R_n \text{ di Lagrange}} \qquad \forall x \in U_\delta(x_0)$$

x_0 fissato, $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ fissato

$f \in C^\infty$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \lim_{n\to+\infty} P_n(x)$$

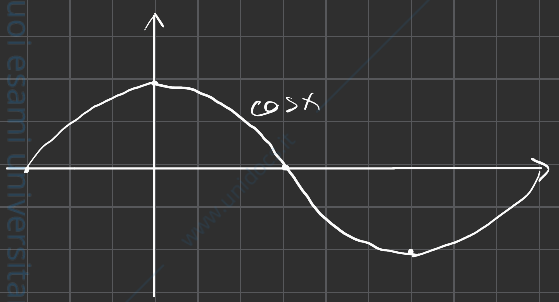
Serie di Fourier

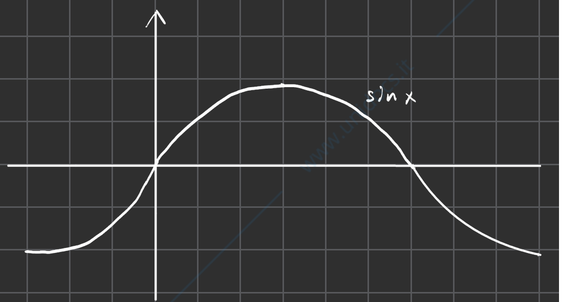
- f è periodica di periodo T
  se $f(x+T) = f(x) \Rightarrow f(x+kT) = f(x) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

- $g(x) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$ periodica, periodo 2π

in fatti: $g(x+2\pi) = f\left(\frac{T}{2\pi}(x+2\pi)\right) = f\left(\frac{Tx}{2\pi}+T\right) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right) = g(x)$

Onda sinusoidale





www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

La serie di Fourier è una combinazione lineare infinita di funzioni sin e cos

Siano $\{a_n\}_n$, $\{b_n\}_n$ successioni di numeri reali

$a_1 \cos x + b_1 \sin x$ armonica fondamentale

$a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ armonica n-esima

$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ serie di Fourier

NB

$\cos(nx)$ e $\sin(nx)$ sono periodiche di periodo $\frac{2\pi}{n}$

Domanda

f periodica, è vero che f sviluppabile in Fourier?

NB

se $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \Rightarrow f$ è periodica

Defn

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodica   NB f la definisco su $[-\pi, \pi]$

è sviluppabile in serie di Fourier se

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right)$$

. siccome f è determinata nei suoi valori su $[-\pi, \pi]$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}}_{\pi a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \, \underbrace{{}^{1}\!\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,dx}_{=0} + b_n \, \underbrace{{}^{2}\!\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\,dx}_{=0} \right)$$

1) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,dx = \frac{\sin(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$ 2) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\,dx = -\frac{\cos(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$

$$a_0 = \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

- moltiplico per $\cos(mx)$, $m \in \mathbb{N}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cos(mx)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\cos(nx)\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\cos(mx)\,dx\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \pi & m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx = a_m\pi \Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx$$

- moltiplicando tutta la relazione per $\sin(mx)$, $m \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)\,dx = b_m\pi \Rightarrow b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)\,dx$$

Quindi, i Coefficienti di Fourier a_0, a_n, b_n sono dati da

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

Teorema

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π periodica e continua in $\mathbb{R}$
Allora la serie di Fourier associata converge in ogni punto alla funzione somma di f.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx)\,dx + b_n\sin(nx)\,dx$$ con a_0, a_n, b_n precedentemente trovati

Esercizio

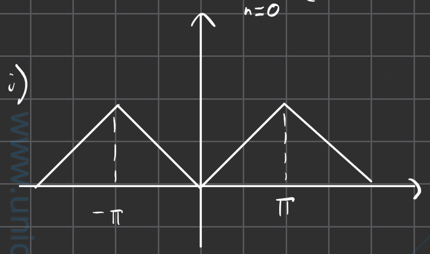
Sia f: 2π periodica che su $[-\pi, \pi]$ è definita come $f(x) = |x|$

i) determinare la serie di Fourier associata

ii) calcolare $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

f continua su $\mathbb{R}$ → serie F converge

i)



$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \pi$$

$|x|$ è ≥ 0

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \cos(nx)\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{x \sin(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n}\, dx \right) = \frac{2}{\pi} \frac{\cos(nx)}{n^2} \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \frac{\cos(n\pi) - 1}{n^2}$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ pari} \\ -\dfrac{4}{\pi n^2} & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin(nx)\, dx = 0 \quad f \text{ dispari}$$

Serie F

$$\frac{1}{2}\pi + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \underbrace{b_n \sin(nx)}_{=0}$$

• n pari: $\Rightarrow 0$

• n dispari:

$$= \frac{1}{2}\pi + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k+1} \cos[(2k+1)x] + b_{2k+1} \sin[(2k+1)x]$$

$$= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{4}{\pi} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos[(2k+1)x]$$

f continua $\forall x \in [-\pi, \pi] \Rightarrow f(x)$ è la serie di Fourier

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \underbrace{\cos[(2k+1)x]}_{=1}$$

scelgo $x = 0$

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \quad = \quad \frac{\pi^2}{8}$$

Defin

Sia $f: [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è detta continua a tratti se è continua in tutti i punti $\in [a,b]$ tranne un numero finito di punti $x_1, x_2, \dots, x_n$ per i quali

se $x_i \neq a, b$

• $\exists \lim_{x \to x_i^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_i^+} f(x)$ notazione: $f(x_i^-)$ $f(x_i^+)$

se $x_i = b$

• $\exists \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b^-)$

se $x_i = a$

• $\exists \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a^+)$

NB

f continua a tratti $\Rightarrow f$ Riemann Integrabile su $[a,b]$

Teorema

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π periodica, continua a tratti su $[-\pi, \pi]$

$\Rightarrow$ la serie di Fourier converge

con somma
$$\begin{cases} \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2} & \text{se } f \text{ è discontinua in } x \\ f(x) & \text{se } f \text{ è continua in } x \end{cases}$$

oss

- se f è pari

$$b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = 0$$

- se f è dispari

$$a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = 0$$