SUCCESSIONI

$f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad f(n): \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ $\quad a_n$

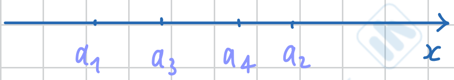
$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{array}$$

successione num. reali

es. • $a_n = \frac{n-1}{n}$ $\qquad n$: $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{2}{3}$

• $a_n = \ln(1+n^2)$ $\qquad a_1 = \ln 2 \qquad a_2 = \ln 5 \dots$

• $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $\qquad a_1 = -1 \qquad a_2 = \frac{1}{2} \qquad a_3 = -\frac{1}{3}$



S. LIMITATA, ILLIMITATA

↓

- SUPERIORMENTE $\quad \exists K \in \mathbb{R} \mid K \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$
- INFERIORMENTE $\quad \exists h \in \mathbb{R} \mid h < a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

es. $a_n = \frac{1}{n}$ $\qquad 0 \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \quad 1$

successione che tende a 0.

LIMITATA SUP E INF.
es. $K=2$ e $h = 0, -1 \dots$

- $b_n = \sqrt{n}$ $1 \quad \sqrt{2} \quad \sqrt{3} \quad 2$

ILLIMITATA SUP.
LIMITATA INF.

$\forall K \in \mathbb{R} \quad \exists\, a_n \mid a_n > K$

esiste sempre un termine delle successione magg. del K scelto

S. CONVERGENTE

- sottinteso $+\infty$, n naturale, assume valori positivi
- ℓ reale.

$a_n \quad \lim_{n \to \infty} a_n = \ell \longrightarrow$ a_n si avvicina al valore ℓ all'aumentare di n.

DEFINIZIONE

$$\boxed{\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, P > 0 \text{ T.C. } n > P \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon}$$

cioè

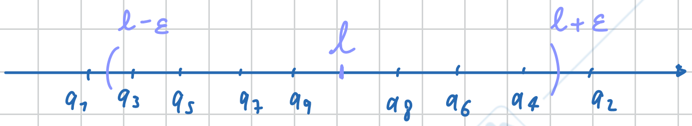
$$\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$$

P dipende da ε

$P = \boxed{n(\varepsilon)}$

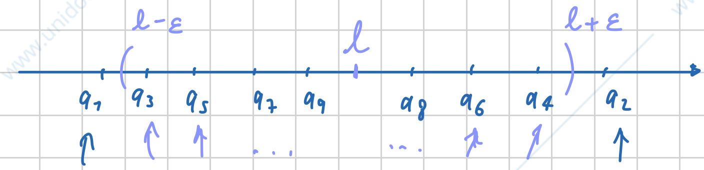
SCELTO UN QUASIASI NUMERO ε, >0, È POSSIBILE DETERMINARE UN NUMERO POSITIVO P T.C. QUANDO n È $>$ DEL NUMERO POSITIVO, ALLORA $|a_n - \ell|$ È $<$ ε.

CIOÉ TUTTI I VALORI a_n, (con $n > P$) SARANNO COMPRESI NELLA STRISCIA TRA $\ell - \varepsilon$ e $\ell + \varepsilon$



: valori si avvicinano a ℓ. all'aumentare di n.

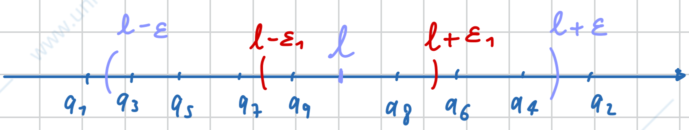
scegli ε.
ε. Immagina sia un raggio, una certa ampiezza da L



esiste quindi, un numero positivo t.c. per $n > p$ i termini della successione a_n stanno all'interno delle striscie $l-\varepsilon$ e $l+\varepsilon$?

es. $n=1$, $n=2$ no. ma per $n \geq 3$ tutti i termini staranno fra $l-\varepsilon$ e $l+\varepsilon$

scegliamo un altro valore ε.



per $n > 6$ saranno contenuti nella striscia...
e così all'infinito scegliendo valori sempre più piccoli di ε, (cioè avvicinandosi a l)

esisteranno sempre termini contenuti nell'intervallo

esempi

$a_n = \frac{2n+1}{n}$ $\qquad \lim_{n \to \infty} \frac{2n+1}{n} = 2$ → verificare.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists p_\varepsilon > 0 \;|\; n > p_\varepsilon \quad \left| \frac{2n+1}{n} - \overset{l}{2} \right| < \varepsilon$$

$\frac{1}{n} < \varepsilon \rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} = p$ il numero p dipende da ε

→ quindi, se scegliessi $\varepsilon = 1$
per $n > \frac{1}{1}$ (a partire dal 2° indice) $a_2, a_3, a_4 \dots$ saranno
compresi tra $\underset{\uparrow \atop l}{2} - 1$ e $\underset{\uparrow \atop l}{2} + 1$

→ se scegliessi $\varepsilon = 0{,}1$
per $n > \frac{1}{0.1} = n > \underbrace{10}_{n(\varepsilon)}$, termini tra tra $\overset{1,9}{2 - 0{,}1}$ e
$\underset{2,1}{2 + 0{,}1}$ saranno quelli con indice n maggiore di 10
$(a_{11}, a_{12}, a_{13} \dots)$

S. DIVERGENTE

a_n $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$

!! nel caso $+\infty \to a_n > +k$
$-\infty \to a_n < -k$

$$\boxed{\forall k > 0 \quad \exists\, P_k > 0 \quad T.C. \quad n > P_k \Rightarrow |a_n| > k}$$

SCELTO UN NUMERO K POSITIVO ARBITRARIO, ALLORA ESISTE SEMPRE UN NUMERO POSITIVO P T.C.

PER TUTTI GLI INDICI > P IL VALORE ASS. DI a_n SARÀ SEMPRE MAGGIORE DI K

es. scelgo $k = 10$ allora al di là di un certo p. (es. dal 12° indice in poi) succederà che $a_{12}, a_{13}, \dots$ saranno > 10.

es. scelgo $k = 100$. in questo caso esiste un indice oltre il quale tutti i termini sono maggiori di 100?
sì

esempi

$a_n = \sqrt{n} - n$ dimostrare $\lim_{n \to \infty} \sqrt{n} - n = -\infty$.

$\forall K > 0 \quad \exists P > 0 \mid n > P \quad a_n < -K$

$\sqrt{n} - n < -K$

$(-1) \; \sqrt{n} - n + K < 0 \; (-1)$ cambio segni

$n - \sqrt{n} - K > 0$ risolvi con $n = t^2$

$\sqrt{n} > \frac{1 + \sqrt{1+4K}}{2}$

$n > \underbrace{\left(\frac{1 + \sqrt{1+4K}}{2}\right)^2}_{P}$

$\downarrow$ dipende da k

scelto k
per $n > p$, il valore della successione saranno maggiori $> K$
(per il primo indice intero)
es. cioè 18,5 è il 19°

5. INDETERMINATA

a_n $\quad \lim_{n \to \infty} a_n \nexists$

es. $1 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad \frac{1}{3} \quad 1 \quad \frac{1}{4} \quad 1$

POSTI PARI : $\frac{1}{n}$

POSTI DISPARI : 1

non converge né diverge.

SUPPONIAMO CONVERGE A 0,

$\ell = 0$

- $|a_n - 0| < \varepsilon$ $\longrightarrow$ $0 < \varepsilon < 1$

ℓ

es. $\varepsilon = 0.1$

$|1-0| < 0.1$ NO

scegliendo valore di ε positivo ma < 1, i termini a_n di posto dispari (1) sono $\geq \varepsilon$.

↓

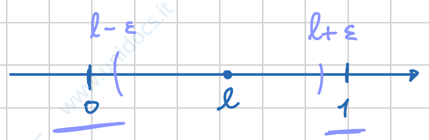
0 NON PUÓ ESSERE LIMITE

seguendo la stessa logica, NON PUÓ CONVERGERE A 1.

$\ell = 1$

- $|a_n - 1| < \varepsilon$

- $0 < \ell < 1$ supponiamo limite compreso tra 0 e 1



all' aumento di n, valori non si avvicinano ad ℓ (non son più contenuti tra $\ell - \varepsilon$ e $\ell + \varepsilon$) ma ci si avvicina a 0!

↓

non potrá mai convergere ad un limite L compreso tra 0 e 1.

da un certo indice in poi dovrei trovarmi nell' intervallo ma accade l'opposto.

SUCCESSIONI MONOTONE CRESCENTI / DECRESCENTI

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

$\underbrace{a_{n+1}}_{\text{termine successivo}} > a_n$ CRESCENTE

$a_{n+1} \geq a_n$ CRESCENTE IN SENSO LATO $\rightarrow$ in modo debole

$a_{n+1} < a_n$ DECRESCENTE

$a_{n+1} \leq a_n$ DECRESCENTE IN SENSO LATO

se la SUCCESSIONE CRESCE E POI DECRESCE (o viceversa) NON e' MONOTONA

es. $a_n = \ln(n^2+1)$ applichiamo la definizione $a_{n+1} \overset{?}{>} 0$

$\ln[(n+1)^2+1]$ sostituisci n con n+1.

$\ln[n^2+2n+2] \overset{?}{>} \ln(n^2+1)$ $\forall n$

$n^2+2n+2 \overset{?}{>} n^2+1$

$2n > -1 \rightarrow$ vale $\forall n$: sempre maggiore di -1.

considerazioni. se risulta per esempio $n>5$ non va bene. sarebbe crescente per $n>5$! e decrescente per i valori $n<5$ 1, 2, 3, 4

es. $a_n = \frac{1}{n+2}$ $a_{n+1} \overset{?}{<} a_n$

$\frac{1}{(n+1)+2} \overset{?}{<} \frac{1}{n+2} \rightarrow \cancel{n}+3 > \cancel{n}+2$? $3>2$ si $\forall n$.