Limiti di Funzioni

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ è pto di accumulazione se $\exists\, U_\delta(x_0) \cap A \setminus \{x_0\} \neq 0$

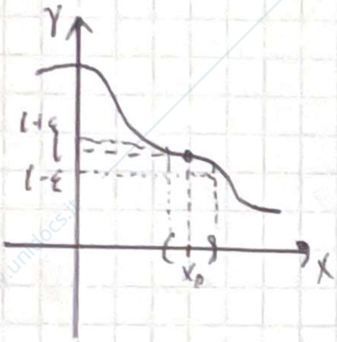
$+\infty$ è punto di accumulazione per A se $\forall M > 0$ $(M, +\infty) \cap A \neq 0$

1) **Defn:** $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione per A

Diciamo che limite per x che va x_0 di f è $l \in \mathbb{R}$ $\left[\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}\right]$

in breve se $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che

$\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ si ha $|f(x) - l| < \varepsilon$



es

$\lim_{x \to 2} 2x = 4$ 2 pto di accumulazione

x defn $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \mid 2 - \delta < f(x) < 2 + \delta \Rightarrow 4 - \varepsilon < f(x) < 4 + \varepsilon$

$\Leftrightarrow 2 - \frac{\varepsilon}{2} < x < 2 + \frac{\varepsilon}{2}$

2) **Defn** $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione per A.

Diciamo che limite per x che va a x_0 è $+\infty$ se

$\forall V(+\infty)\ \exists\, U(x_0)$ tale che $\forall x \in U(x_0) \cap A \setminus \{x_0\}$ si ha $f(x) \in V(+\infty)$

$\left[\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty\right]$

3) **Defn** $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $+\infty$ pto accumulazione per A

Diciamo che limite per $+\infty$ che va a x_0 di f è $l \in \mathbb{R}$ se $\left[\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}\right]$

$\forall V(l)\ \exists\, U(+\infty) \mid \forall x \in U(+\infty) \cap A$ si ha $f(x) \in V(l)$

oppure $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, M > 0 \mid$ se $x > M$ $(x \in (M, +\infty))$ si ha $|f(x) - l| < \varepsilon$

$\left[\lim_{x \to +\infty} f(x) = l\right]$

4 **Def.** $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $+\infty$ pto accumulazione

Diciamo che limite per $+\infty$ che va a x_0 di f è $+\infty$ se

$\forall M>0 \ \exists N>0 \mid \forall x > N$ si ha $f(x) > M$ $\left[\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\right]$

5 **Def.** $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $+\infty$ pto accumulazione

Diciamo che limite per $+\infty$ che va x_0 di f è $-\infty$ se

$\forall M>0 \ \exists N>0 \mid \forall x > N$ si ha $f(x) > -M$ $\left[\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty\right]$

Limite destro

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione $\left[\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l\right]$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \mid$ se $x \in (x_0; x_0+\delta)$ si ha

$l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon \quad \Rightarrow$

$\forall V(l) \ \exists U^+(x_0) \mid \forall x \in U^+(x_0) \cap A$ si ha $f(x) \in V(l)$

Limite sinistro

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione $\left[\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l\right]$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \mid$ se $x \in (x_0-\delta; x_0)$ si ha $l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon$

$\Rightarrow V(l) \ \exists U^-(x_0) \mid \forall x \in U^-(x_0) \cap A$ si ha $f(x) \in V(l)$

Limite per difetto

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l^-$ se

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \mid \forall x \in (x_0-\delta; x_0+\delta) \cap A \setminus \{x_0\}$ si ha $l-\varepsilon < f(x) \leq l$

Limite per eccesso

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l^+$ se

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \mid \forall x \in (x_0-\delta; x_0+\delta) \cap A \setminus \{x_0\}$ si ha $l \leq f(x) < l+\varepsilon$

Lemma se $\exists$ lim dx e sx $\Rightarrow$ lim $\exists$

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ x_0 punto di accumulazione per A

Allora $\lim_{x \to x_0} f(x)$ $\exists \iff$ esistono e sono uguali $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$

Teorema: legame tra successioni e funzioni

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione per A

Allora $\lim_{x \to x_0 (\pm\infty)} f(x) = l \, (\pm\infty) \iff \forall$ succ. $\{x_n\}_n \in A$ con $\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0$ si ha

che $\lim_{x \to +\infty} f(x_n) = l$

Valgono

1) unicità del limite
2) monotonia con l'esistenza del limite
3) teorema di permanenza del segno
4) teorema del confronto
5) operazioni e forme indeterminate
6) confronto tra infiniti, infinitesimi e limiti notevoli

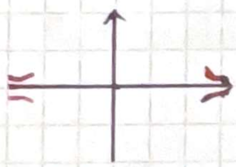
Asintoto verticale

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x_0 \in \mathbb{R}$ pto di accumulazione se $\lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = \pm\infty$

$x = x_0$ è as. verticale

Asintoto orizzontale

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\pm\infty$ pto di accumulazione se $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = y_0$



$\Rightarrow y = y_0$ è as. orizzontale

Asintoti nelle funzioni elementari

① $f(x) = \operatorname{arctg} x$ $\quad \lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}^-$ e $\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}^+$

② $f(x) = e^x$ $\quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ $\quad$ A.O. $y = 0$

③ $\lim_{x \to 0^+} \log x = -\infty$ $\quad$ A.V. $x = 0$

④ $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ $\quad \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$ $\quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$

⑤ $\frac{\cos x}{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$

$\xrightarrow[x \to 0^-]{} -\infty$

⑥ $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_{\frac{1}{2}} x}{\operatorname{arctg} x} = -\infty$

Funzioni composte

$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: f(A) \to \mathbb{R}$, x_0 pto di accumulazione per A

$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ d. accumulazione per $f(A)$

Sia $U(x_0) \cap A \setminus \{x_0\} \mid f(x) \neq y_0$

Sia $\lim_{x \to y_0} g(y) = l$

$\Rightarrow \lim_{x \to y_0} g(f(x)) = l$

Continuità di una funzione

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ e pto di accumulazione

f si dice continua in x_0 se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

NB $x_0 \in A$ pto isolato $\Rightarrow$ per convenzione f è continua in x_0

Def $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, è continua in A se è continua in ogni $x_0 \in A$

Def $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ f è continua in $[a,b]$ se

- $\forall x_0 \ (a,b)$ si ha $\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$
- $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$
- $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

Teorema : operazioni con funz. continue

Siano $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue in $x_0 \Rightarrow f+g$, $f-g$, $f \cdot g$,

se $g \neq 0$ $\frac{f}{g}$ sono a loro volta continue in x_0

NB $g(x_0) \neq 0 \Rightarrow g \neq 0$ in $U(x_0)$

Teorema : composizione

$$\begin{tikzcd} x_0 \in A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & f(A) \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Sia $f: A \to \mathbb{R}$ continua in $x_0 \in A$ pto di accumulazione $\Rightarrow g: f(A) \to \mathbb{R}$ continua in $f(x_0) \in f(A)$ pto di accumulazione e $\exists \ U(x_0) \mid f(x) \neq f(x_0)$ $\forall x \in U(x_0) \cap A \setminus \{x_0\}$

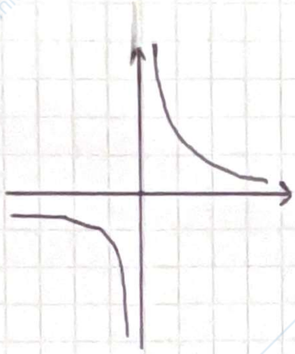
$\Rightarrow g \circ f$ è continua in x_0

Teorema: tutte le funz. elementari sono continue

x^α, a^x, $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, arc... $|x|$ sono continue

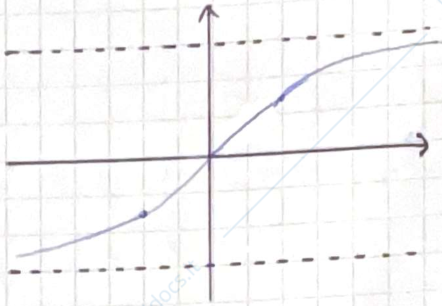
esempi

- $\frac{1}{x}$



- continua in $(0,+\infty)$
- continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

- $\lim_{x \to 1} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4}$



Limiti notevoli

1) $\lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

2) $\lim_{x \to -\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

dim cambio di variabile

$\boxed{y = -x \longrightarrow +\infty}$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y \to +\infty} \left(1+\frac{1}{-y}\right)^{-y} = \lim_{x \to +\infty} \left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \to +\infty} \left(\frac{y}{y-1}\right)^{y}$$

$y-1+1$

$$= \lim_{y \to +\infty} \left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \cdot \left(1+\frac{1}{y-1}\right) = e$$

es $\lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \log x \cdot \frac{1}{x} = -\infty$

$\lim_{x \to 0^+} x \log x \qquad y = \frac{1}{x} \longrightarrow +\infty \qquad x = \frac{1}{y}$

$\lim_{y \to +\infty} \frac{1}{y} \log \frac{1}{y} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{y}(-\log y) = 0$

Ordini di infinito, infinitesimi, simboli di Landau

$f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad p$ — x_0 di accumulazione, $+\infty$, $-\infty$ accumulazione per A

1) $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to +\infty$ $(-\infty)$

$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ f. è infinito di ordine superiore per $x \to p$

2) $f(x) \to 0$ $\quad g(x) \to 0$

$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ f. infinitesimo di ordine superiore per $x \to p$

NB vale l'ordine di $+\infty$ per $x \to +\infty$
$\log x$; $x^b, b>0$; $a^x, a>1$; x^x

3) $f(x) = o(g(x))$ per $x \to p$ se

$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

4) $f(x) \sim g(x)$ per $x \to p$ se

$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

NB $\varepsilon(x) \to 0$

$\varepsilon(x) \to 0$ $\quad \lim_{x \to p} \frac{\sin(\varepsilon(x))}{\varepsilon(x)} = 1$ $\quad \sin(\varepsilon(x)) \sim \varepsilon(x)$ $x \to p$
$\sin \varepsilon(x) = \varepsilon(x) + o(\varepsilon(x))$

Asintoti obliqui

$f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad +\infty (-\infty)$ di accumulazione

se $f(x) = mx + q + o(1)$ per $x \to \pm\infty$ con $m, q \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$

allora $y = mx + q$ è asintoto obliquo

NB La condizione è equivalente a:

1) $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R} \neq 0$

2) $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = q \in \mathbb{R}$

Punti di discontinuità

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 pto di accumulazione $\in A$

- f ha una disc. di 1ª specie (salto) in x_0 se:

$\exists$ finiti $\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$

es $f(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \neq \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$

- f ha una disc di 2ª specie in x_0 se

almeno uno tra il limite destro o sinistro non esistono o sono infiniti

es $f(x) = \begin{cases} x\, e^{\frac{1}{x}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{y} \cdot e^{y} = +\infty$ $\qquad y = \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 = f(0)$ $\qquad \Rightarrow 0$ pto disc. II^ specie

NB

se $\lim_{x \to x_0^+ (x_0^-)} f(x) = f(x_0) \Rightarrow$ f. è continua da destra (o sinistra)

- f ha una disc. di 3ª specie (eliminabile) in x_0 se

$\exists$ finito $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

es $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , x \neq 0 \\ \cancel{0}\ 1 & x = 0 \end{cases}$ $\qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{\text{limite notevole}}{=} 1$

Prolungamento con continuità

Siano $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \notin A$ pto accumulazione e $\exists$ finito $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

Allora $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , x \neq x_0 \\ l & , x = x_0 \end{cases}$ è detta prolungamento con continuità

se $x_0 \in A$ e pto accumulazione e $\exists$ finito $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ e $f(x_0) \neq l$

allora $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ l & x = x_0 \end{cases}$

Teoremi Fondamentali sulle Funzioni Continue

Teorema di permanenza del segno

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ pto di accumulazione, f continua in x_0.
Se $f(x) > 0 \Rightarrow \exists\ \mathcal{U}(x_0)$ t.c. $f(x) > 0\ \forall x \in \mathcal{U}(x_0) \cap A$

dim $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in A, |x - x_0| < \delta$
$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\varepsilon = \dfrac{|f(x_0)|}{2}$ (poiché $f(x_0) \neq 0$)

$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{|f(x_0)|}{2} \iff -\frac{|f(x_0)|}{2} < f(x) - f(x_0) < \frac{|f(x_0)|}{2}$$

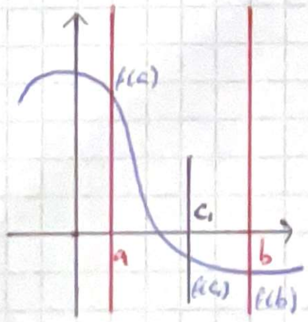
$$\iff f(x_0) - \frac{|f(x_0)|}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{|f(x_0)|}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{|f(x_0)|}{2} < |f(x)| < \frac{3|f(x_0)|}{2}$$

poiché $f(x_0)$ e $f(x)$ hanno stesso segno:
$\exists\ \mathcal{U}(x_0) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ in cui $\operatorname{sgn}(f(x)) = \operatorname{sgn}(f(x_0))$

Teorema degli zeri

Siano $a < b \in \mathbb{R}$, $f: [a;b] \to \mathbb{R}$, continua in $[a,b]$,
$f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow$ esiste almeno un $x_0 \in (a,b) \mid f(x_0) = 0$



dim supponiamo $f(a) > 0$, $f(b) < 0$
Siano $a_1 = a$ $b_1 = b$ $I_1 = [a_1; b_1]$
lunghezza intervallo $\leftarrow |I_1| = b_1 - a_1$

Sia $c_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$ in generale: $I_n = [a_n; b_n]$
$|I_n| = \dfrac{b-a}{2^n}$

- se $f(c_1) = 0$ finito. zero trovato
- se $f(c_1) > 0$ $a_2 = c_1$ $b_2 = b_1$ (lo zero è più a destra)
- se $f(c_1) < 0$ $a_2 = a_1$ $b_2 = c_1$ (lo zero è più a sinistra)

procedo fino ad aver trovato lo zero che è garantito

Andando avanti così costruiamo una successione di intervalli inscatolati.

Conseguenze

1) $a \leq a_n \leq b_n \leq b$

2) $a_n \nearrow$, $b_n \searrow$

3) $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ sono limitate

4) $f(a_n) > 0$; $f(b_n) < 0$

- per 2) & 3): $\exists$ limiti finiti $\lim_n a_n = \alpha$; $\lim_n b_n = \beta$
- per 1) & teo perm. del segno : $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$

$$\Rightarrow 0 \leq \beta - \alpha = \lim_{n\to+\infty} b_n - \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n\to+\infty} |I_n|$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0 \Rightarrow \beta = \alpha$$

- per 4 & f. continua :

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(\alpha) = \lim_{n\to+\infty} f(b_n) \leq 0$$

Quindi:

$$0 \leq f(\alpha) \leq 0 \Rightarrow f(\alpha) = 0$$

Teorema dei valori intermedi

Sia $f: [a;b] \to \mathbb{R}$, continua su $[a;b]$ allora:

f assume tutti i valori tra $f(a)$ e $f(b)$

cioè $\forall\, \gamma_0 \in [f(a); f(b)]$ $\exists$ $c \in [a,b] \mid f(c) = \gamma_0$

- se $f(a) = f(b) \Rightarrow$ ovvio
- se $f(a) < f(b) \to [f(a); f(b)]$

Sia $f(a) < \gamma_0 < f(b)$; Sia $g(x) = f(x) - \gamma_0$ (continua in $[a,b]$)

$g(a) = f(a) - \gamma_0 < 0$ $\qquad g(b) = f(b) - \gamma_0 > 0$

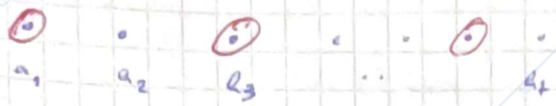
x teorema degli zeri :

$\exists\, c \in (a,b) \mid g(c) = 0$

ma $g(c) = f(c) - \gamma_0 = 0 \Rightarrow \exists\, c \mid f(c) = \gamma_0$

Sottosuccessioni e teorema Bolzano - Weierstrass

$\{a_n\}$ succ. di numeri reali:



$\{n_k\}_k$ una successione di indici, strettamente crescente

allora $\{a_{n_k}\}_k$ è detta sottosuccessione di $\{a_n\}$

$a_n = n \quad a_{2k} = 2k \quad a_{2k+1} = 2k+1$

Bolzano - Weierstrass

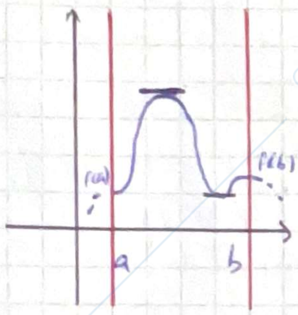
Sia $\{a_n\}$ una successione limitata. Allora esiste almeno una sotto succ. di $\{a_n\}$ che converge

$a_n = (-1)^n \quad a_{2k} = 1 \longrightarrow 1 \quad a_{2k+1} = -1 \longrightarrow -1$

Teorema di Weierstrass

$f: [a,b] \to \mathbb{R} \quad f$ continua in $[a,b]$

Allora f assume massimo e minimo assoluto in $[a,b]$



In altre parole, esistono due punti x_m e $x_M \in (a,b) \mid \min_{[a,b]} f(x) = f(x_m)$ e $\max_{[a,b]} f(x) = f(x_M)$

Conseguenze Ogni funzione definita su intervallo chiuso e limitato è limitata

dim $\sup_{[a,b]} f(x) = M \begin{cases} M \in \mathbb{R} \\ M = +\infty \end{cases}$ inoltre: $\exists \{x_n\}_n \mid \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = M$

★ • se $M = +\infty \Rightarrow f$ è illimitata

$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n \in [a,b] \mid f(x_n) > n \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{x \text{ teo confronto}} +\infty$

• se $M \in \mathbb{R}$

$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n$ in $[a,b] \mid M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M \Rightarrow \{x_n\}$ limitata

Per teo Bolzano - Weierstrass: $\exists x_{n_k} \in \{x_n\} \mid x_{n_k} \to x_0$

Per f continua $f(x_{n_k}) \longrightarrow f(x_0)$

e per ★ $M = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$

$\Rightarrow f(x_0) = M = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$

Alcune precisazioni sui precedenti teoremi

- $f: [a,b] \xrightarrow{\mathbb{R}}$ continua in $[a,b]$, allora $f([a,b]) = [\min_{[a,b]} f, \max_{[a,b]} f]$

dim x teo Weierstrass:

$\exists\, x_1, x_2 \in [a,b] \mid \underbrace{\min f}_{=m} = f(x_1)$ e $\underbrace{\max f}_{=M} = f(x_2)$

Inoltre $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a,b]$

Allora $f([a,b]) \in [m, M]$

- per il teorema dei valori intermedi $\forall\, y_0 \in [m, M]\ \exists\, x_0 \in [a,b]$ t.c. $f(x_0) = y_0$
- se l'intervallo di definizione di una funzione non è chiuso/limitato, Weierstrass non vale.

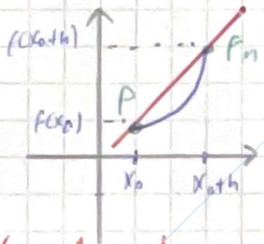
es $\text{arctg}: [0, +\infty)$ non presenta max

Introduzione alla derivata

Sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, $a<b$

Sia $x_0 \in (a,b)$, $h \neq 0$ piccolo a piacere cioè $x_0 + h \in (a,b)$

Rapporto Incrementale [RI]



defin $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \to$ coefficiente angolare per $(x_0; f(x_0))$ e $(x_0+h; f(x_0+h))$

oppure $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, $x \in U(x_0) \subset (a,b)$

Verso la derivata

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \begin{cases} \text{finito} \\ \text{infinito} \\ \nexists \end{cases}$$

$\boxed{\text{sempre F.I. } \frac{0}{0}}$

defin $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, f derivabile in x_0 se esiste finito il lim del RI

in tal caso $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ oppure $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Significato geometrico della derivata

Siano $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a,b)$ e f ~~[illegible]~~ derivabile in x_0.
Sia $P(x_0, f(x_0))$, $P_h(x_0+h; f(x_0+h))$

Allora il grafico della funzione ammette nel punto P una retta t_P di coeff. angolare $m = f'(x_0)$ e di eq. $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

La retta passante per P e P_h è $y - f(x_0) = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}(x - x_0)$

Teorema: relazione tra continuità e derivabilità

Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ f. derivabile in $x_0\in(a,b) \Rightarrow$ è continua in x_0

NB $\Leftarrow$ non è vero

dimostrazione

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\in\mathbb{R}$$

vogliamo dimostrare che $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$
ovvero f. continua

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)+f(x_0)\right)=f(x_0)$$

Derivata sinistra / destra

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$; $x_0\in(a,b)$ ammette derivata da dx se $\exists$ finito

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{oppure} \quad \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

stessa cosa per der. sinistra

Teorema $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, f. deriv. in $x_0\in(a,b) \iff$ ammette deriv. destra e sinistra e sono ugual. $\left(f'_+(x_0)=f'_-(x_0)\right)$

1 **Def.:** $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ f si dice deriv. in a se $\exists$ finito $f'_+(a)$
in b se $\exists$ finito $f'_-(b)$

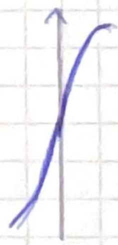
2 **Def.:** $f:I\to\mathbb{R}$, $I\subseteq\mathbb{R}$ intervallo si dice derivabile in I se f è deriv. $\forall x_0\in I$

Punti di non derivabilità

Sia $f:I\to\mathbb{R}$, $I\subseteq\mathbb{R}$ intervallo, $x_0\in I$

- x_0 è punto a tangente verticale

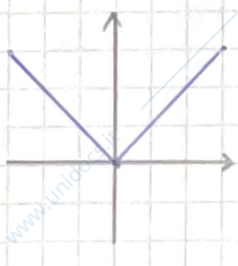
  se $\exists \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ma è infinito

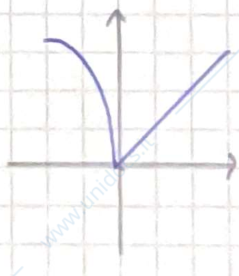


- x_0 è punto angoloso se

  i) $\exists$ $f'_+(x_0)\neq f'_-(x_0)$ finiti

  ii) $\exists$ finito $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ infinito (o viceversa)

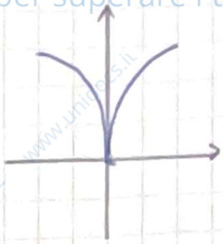


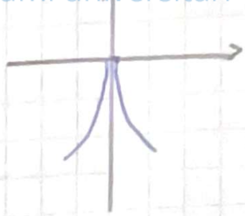


- x_0 è punto di cuspide se

$\exists\ f'_+(x_0) = +\infty$ ed $\exists\ f'_-(x_0) = -\infty$

(o viceversa)





La funzione derivata

$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, A unione di intervalli

$A' = \{ x \in A \mid f$ è deriv. in $A \}$

$f(x)$	A	$f'(x)$	A'
$c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
$a \neq 1,\ x^a$	dipende da a	$a x^{a-1}$	dip. da $a-1$
$a = 1,\ x$	$\mathbb{R}$	1	$\mathbb{R}$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$
$a>0$, $a\neq 1$, a^x	$\mathbb{R}$	$a^x \log a$	$\mathbb{R}$
$\log x$	$(0,+\infty)$	$\frac{1}{x}$	$(0,+\infty)$
$a>0$, $a\neq 1$, $\log_a x$	$(0,+\infty)$	$\frac{1}{x \log a}$	$(0,+\infty)$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tg x$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$	$\frac{1}{\cos x}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$
$\arcsin x$	$[-1,1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,1)$
$\arccos$	$[-1,1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,1)$
$\arctg x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{x^2+1}$	$\mathbb{R}$

Operazioni con derivate

Siano $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$

se f e g sono derivabili in x_0, lo sono anche: $f \pm g$; $f \cdot g$ e se $g \neq 0$ $\frac{f}{g}$

1 $(f \pm g)' = f' \pm g'$

2 $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

3 $\left(\frac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

dim 3

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(h+x) - \left(\frac{f}{g}\right)(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\,g(x) - f(x)\,g(x) + f(x)\,g(x) - f(x)\,g(x+h)}{g(x)\,g(x+h)\,h}$$

$$\lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{g(x+h)}}_{\frac{1}{g(x)}} + \underbrace{\frac{f(x)}{g(x)\,g(x+h)}}_{\frac{f(x)}{g^2(x)}} \cdot \underbrace{\frac{g(x) - g(x+h)}{h}}_{-g'(x)}$$

Derivate di funzioni composte

$f:(a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$

$g: f(a,b) \to \mathbb{R}$ si ha $y_0 = f(x_0) \in f((a,b))$

- f è derivabile in x_0 e non costante in $U(x_0)$
- g è derivabile in $y_0 = f(x_0)$

$\Rightarrow g \circ f : (a,b) \to \mathbb{R}$ è deriv. in x_0

$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

es $h(x) = \sin(x^2)$

$(\sin y)' = \cos y$

$(x^2)' = 2x$

$h'(x) = 2x \cos x^2$

1ª formula dell'incremento finito

Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ f derivabile in $x_0\in(a,b)$

$\Rightarrow f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$ per $x\to x_0$

Geometricamente: grafico di f è approssimato con un certo errore da una funz. lineare

dim f deriv. in x_0 per defin.

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+o(1)$$ moltiplicando per $x-x_0$

$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+o(1)(x-x_0)$ per $x\to x_0$ $=o(x-x_0)$

Derivate successive

$f:A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, A unione di intervalli

- Abbiamo precedentemente definito A' e $f':A'\to\mathbb{R}$

Possiamo definire $A''=\{x\in A'' \mid f' \text{ è deriv. in } x\}$

In generale:

$f^{(n)}:A^{(n)}\to\mathbb{R}$

$f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}\right)'(x)=\left(f^{(n-2)}\right)''(x)\ \dots$

Teoremi fondamentali sulle derivate

Punti estremanti locali / relativi

$f: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, I intervallo

Sia $x_0\in I$ allora:

i) x_0 è punto di massimo locale se $\exists\, U(x_0) \mid f(x_0)\geq f(x)\ \forall x\ U(x_0)\cap I$

ii) x_0 è punto di minimo locale se $\exists\, U(x_0) \mid f(x_0)\leq f(x)\ \forall x\ U(x_0)\cap I$

pti di max e min sono detti *punti estremanti*

Generalizzazione teorema degli zeri

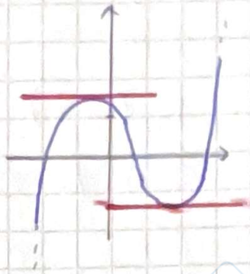
$-\infty\leq\alpha<\beta\leq+\infty$

$f>0$ in $U(\alpha)$
$f<0$ in $U(\beta)$

$\Rightarrow \exists\, x_0\in(\alpha,\beta) \mid f(x_0)=0$

Teorema di Fermat

Sia $f: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $x_0 \in I$ punto interno tale che



- x_0 è punto estremante per f
- f è derivabile in x_0

$\Rightarrow f'(x_0) = 0$

d.m

sia x_0 punto di minimo relativo, x_0 punto interno

$\Rightarrow \exists\, \delta > 0 \mid U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta ; x_0 + \delta) \subseteq I$

$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in U_\delta(x_0)$

$$RI \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \geq 0 & \text{se } x \in (x_0 ; x_0 + \delta) \\ \leq 0 & \text{se } x \in (x_0 - \delta ; x_0) \end{cases}$$

passiamo $x \to x_0^+$, x_0^- $\quad$ x_0 punto interno

f derivabile $\Rightarrow f'_+(x_0) = f'(x_0) = f'_-(x_0)$

$f'_+(x_0) \geq 0$ per teorema di permanenza del segno

NB se x_0 non è punto interno ad I allora può non valere

Teorema di Rolle

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a,b]$ deriv su (a,b) con $f(a) = f(b)$

$\Rightarrow$ esiste un punto $x_0 \in (a,b) \mid f'(x_0) = 0$

d.m

i) se f costante $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$

ii) se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a,b]$ x teo Weierstrass $\Rightarrow$

$\exists\, x_1, x_2$ t.c. $\max_{[a,b]} f = f(x_1)$

$\min_{[a,b]} f = f(x_2)$

se x_1 e $x_2 \in \{a, b\}$

$m = f(x_2) \leq f(x) \leq \underbrace{f(x_1)}_{f(a)} = M$

$f(a) \Rightarrow f$ costante

- almeno uno tra x_1 e x_2 non è a oppure b
- x_1, per esempio $\Rightarrow x_1$ è punto interno e punto estremante

Teorema di Lagrange (del valor medio)

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ t.c.

- f è continua su $[a,b]$
- f è derivabile su (a,b)

Allora $\exists\, x_0 \in (a,b)$ t.c. $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

dim $g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \right]$

$g: [a,b] \to \mathbb{R}$, continua su $[a,b]$ derivabile in (a,b)

$g(a) = 0 = g(b) = 0$

↳ siamo nell'ipotesi del Teorema di Rolle $\Rightarrow \exists\, x_0 \in (a,b)$ t.c. $g'(x_0) = 0$

$\Rightarrow 0 = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Teorema di Cauchy

Sia $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ t.c.

- f, g continue in $[a,b]$
- f, g derivabili su (a,b)
- $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

Allora $\exists\, x_0 \in (a,b)$ t.c. $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

cenni di dimostrazione

è possibile che $g(a) = g(b)$?

Se fosse vero allora per Rolle $\exists\, x_0 \in (a,b)$ t.c. $g'(x_0) = 0$

- usando $h(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)) \right]$

Conseguenze del Teorema di Lagrange

Teorema 1 funzioni con derivata = 0 su un intervallo sono costanti

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, continua su $[a,b]$ derivabile su (a,b) t.c. $f'(x)=0$

Allora $f(x) = c \in \mathbb{R}$

dim $\gamma \in (a,b]$, arbitrario. Applico Lagrange

$f: [a,\gamma] \to \mathbb{R}$, $\exists\ x_0 \in (a,\gamma)$ t.c. $f'(x_0) = \dfrac{f(\gamma)-f(a)}{\gamma-a} = 0 \Rightarrow f(\gamma) = f(a)$

Teorema 2 2 funzioni con derivate uguali su un intervallo differiscono per una costante

Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue su $[a,b]$ derivabili su (a,b) tali che

$f'(x) = g'(x)$ $\forall x \in (a,b)$. Allora $f(x) = g(x) + c$ $c \in \mathbb{R}$

dim Sia $h(x) = f(x) - g(x)$. Si ha g continua su $[a,b]$, derivabile su (a,b).

$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$

per Teorema 1 $\Rightarrow h(x) = c \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = g(x) + c$

esempio $f(x) = \arctg x + \arctg \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x>0 \\ -\frac{\pi}{2} & x<0 \end{cases}$

$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ oppure $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{x^2}{x^2+1}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 0$

per teorema 1 $\Rightarrow f(x) = \begin{cases} c & \in (-\infty,0) \\ d & \in (0,+\infty) \end{cases}$

Teorema 3 Relazione tra derivata e monotonia

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a,b]$ derivabile su (a,b). Allora valgono:

i) $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in (a,b) \iff f$ è monotona crescente

ii) $f'(x) \leq 0$ $\forall x \in (a,b) \iff f$ è monotona decrescente

iii) $f'(x) > 0$ $\forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ è strettamente crescente

iv) $f'(x) < 0$ $\forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ è strettamente decrescente

dim i) $f'(x) \geq 0$

Siano $x_1 < x_2 \in (a,b)$ arbitrari. $f: [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$, per Lagrange $\exists\ z \in (x_1;x_2)$ tale che

$f'(z) = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geq 0$ per ipotesi $\Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$

dim $\Leftarrow$ f monotona crescente su (a,b)

Sia $x_0 \in (a,b)$ si ha $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$
- se $x \geq x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$
- se $x \leq x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$

mandando $x \to x_0^+$ $\qquad$ $x \to x_0^-$

$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ $\qquad$ $f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

ma f è derivabile in x_0 $\Rightarrow$ $f'(x_0) \geq 0$.

dim $f'(x) > 0 \Rightarrow \nearrow$ strettamente, come $f'(x) \geq 0$

Teorema 4 Relazione tra segno di f'' e concavità/convessità

Sia $f: [a,b]$, derivabile su $[a,b]$, derivabile 2 volte su (a,b).

Allora valgono

i) f è convessa su $[a,b] \iff f''(x) \geq 0$ in (a,b)

ii) f è concava su $[a,b] \iff f''(x) \leq 0$ in (a,b)

dim i)

Siano $x_1 < x_2 \in (a,b)$ per Lagrange $\exists\ c \in (x_1; x_2)$ tale che

$f'(x_2) - f'(x_1) = f''(c)(x_2 - x_1)$

- $f''(c) \geq 0 \Rightarrow f'(x_2) - f'(x_1) \geq 0 \Rightarrow f'(x_2) \geq f'(x_1)$

dim ii)

Siano $x_1 < x_2 \in (a,b)$ per Lagrange $\exists\ c \in (x_1; x_2)$ dimostrazione analoga.

Teorema $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ $x_0 \in (a,b)$ tale che

- f continua in x_0
- f derivabile in $(a,b) \setminus \{x_0\}$
- $\exists \lim_{x \to x_0} f'(x)$ (oppure $\exists \lim_{x \to x_0^+} f'(x)$ oppure $\exists \lim_{x \to x_0^-} f'(x)$

Allora esiste $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ e sono uguali: