www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

$\mathbb{Q}$: rappresentazione decimale

è un algoritmo di cifre decimale di nome allineamento decimale

grazie all'algoritmo euclideo della divisione tra numeri naturali che si basa su:

Dati $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $n \in \mathbb{N}$ esistono e sono unici q e $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tali che

$m = nq + r$

m = dividendo, n = divisore, q = quoziente, r = resto

ogni elemento di $\mathbb{Q}$ ammette rappresentazione decimale

q < finita / infinita periodica

Ex: $\frac{3}{2} = 1,5$ — 1: cifra intera; 5: cifra decimale

Ex: $\frac{5}{6} = 0,8333... = 0,8\bar{3}$ — 0: cifra intera; 8333...: cifra decimale

Vale anche il viceversa: ogni allineamento decimale < finito / infinito periodico

si può scrivere nella forma $q = \pm \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$

Ex: $2,7 = \frac{27}{10}$ $\quad 0,\overline{32} = \frac{32 - 0}{99}$ $\quad -2,8\bar{3} = -\frac{283 - 28}{90}$

9 quanti i periodici

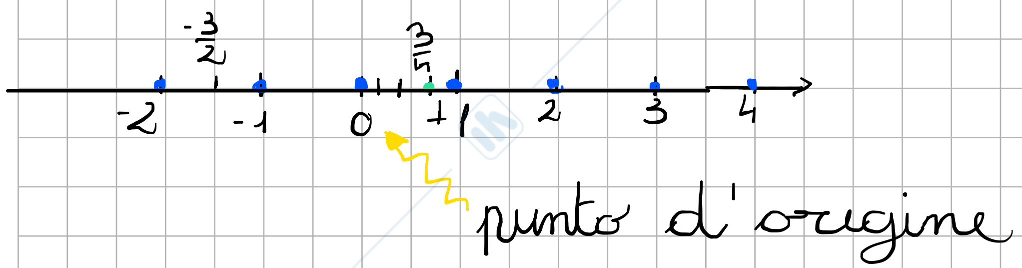
28: numeri no periodo

0: numeri dopo la virgola no periodo

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

- $\mathbb{Q}$: rappresentazione come punti di una retta



- Relazione d'ordine in $\mathbb{Q}$

$p, q \in \mathbb{Q}$ p È MINORE O UGUALE A q $\quad p \leq q$

SE p PRECEDE q SULLA RETTA ORIENTATA OPPURE SE $p = q$

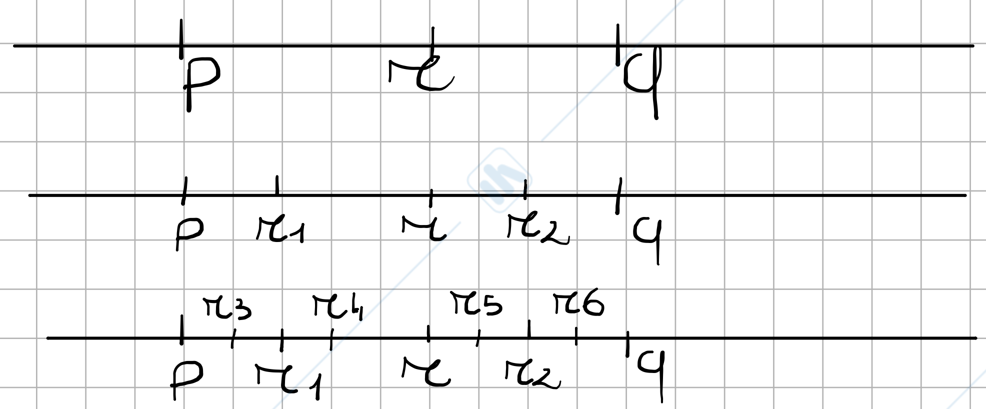
p È MINORE DI q $\quad p < q$ SE p PRECEDE q SULLA RETTA ORIENTATA $(p \neq q)$

- $\mathbb{Q}$ È DENSO: $\forall p, q \in \mathbb{Q}$ CON $p<q$ ESISTE $r \in \mathbb{Q}$:

proprietà densità

$p < r < q$

Ex: $r = \frac{(p+q)}{2}$



www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

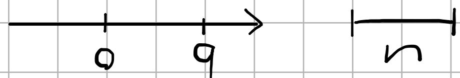
IL CAMPO DEI NUMERI $\mathbb{Q}$ È ORDINATO, OVVERO $(\forall a, b \in \mathbb{Q})$

C1) $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$

C2) $a \leq b$ e $c > 0 \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$

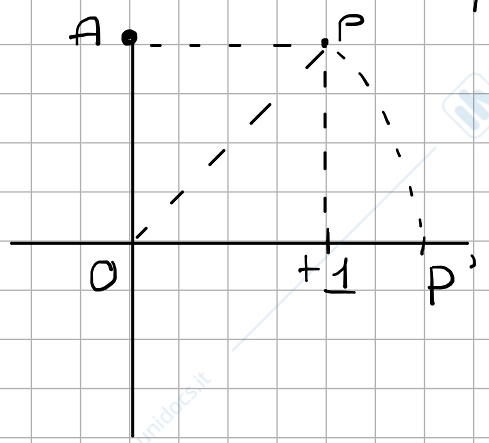
C3) $a \leq b$ e $c < 0 \Rightarrow a \cdot c \geq b \cdot c$

• Abbiamo visto che $\forall q \in \mathbb{Q}$ esiste un punto sulla retta orientata che rappresenta q



vale il viceversa?
Ovvero ogni punto della retta rappresenta un $q \in \mathbb{Q}$?
la risposta è NO!

vediomo un esempio:



$|\overline{OA}| = 1$

$|\overline{OP}| = |\overline{OP'}|$

$\exists q \in \mathbb{Q}$ con $0 < q$ che è rappresentato dal punto P'?

↳ la risposta è no. Dimostrazione:

Dal teorema di Pitagora sappiamo che

$|\overline{OP}|^2 = 1^2 + 1^2 = AO^2 + 1P^2 = 2$

$|\overline{OP'}|^2 = 2$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

(Dimostrazione per assurdo)

Per assurdo $\exists q \in \mathbb{Q} : q^2 = 2$.
Allora esiste una frazione ridotta ai minimi termini

$\frac{m}{n} = q$ con $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ tale che

$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \Rightarrow \frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2$

numeri pari $\Rightarrow m^2$ è pari

$\boxed{m \text{ è pari}}$

$m = 2K$ con $K \in \mathbb{N}$ opportuno
$\Rightarrow (2K)^2 = 2n^2 \Rightarrow 4K^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2K^2 \Rightarrow n^2$ è pari

$\boxed{n \text{ è pari}}$

quindi $\frac{m}{n}$ non è ridotta ai minimi termini $(M.C.D(m,n) \neq 1)$

ASSURDO!

dati 2 numeri dispari, il loro prodotto non sarà mai pari
$\hookrightarrow (2n+1)(2m+1) = 4nm + 2m + 2n + 1 =$

$= 2\underbrace{[2nm + m + n]}_{\in \mathbb{N}} + 1$

Come colmare le "lacune" lasciate sulla retta dai numeri razionali?
Torniamo alla rappresentazione decimale dei numeri razionali.
Questi si scrivono come allineamenti decimali finiti oppure infiniti periodici
$\mathbb{Q}$: RAZIONALI

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

$$(\pm)\ c_0, \underbrace{c_1, c_2, c_3 \dots}_{\text{cifre decimali}} \qquad c_0 \in \mathbb{N}$$

cifra intera

$$c_i \in \{0,1,2,\dots 9\} \quad i \in \mathbb{N}$$

Consideriamo ora l'insieme di tutti i possibili allineamenti decimali:
finiti, infiniti periodici, infiniti non periodici e chiamiamo $\mathbb{R}$ questo insieme.
Allora si ha:

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}}$$

Ex: $1{,}0100100100001\ldots \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$\pi = 3{,}14\ldots$ RAPPORTO TRA LUNGHEZZA DELLA CIRCONFERENZA E IL SUO DIAMETRO CHE HA INFINITE CIFRE NON PERIODICA $\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

L'insieme $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è detto insieme dei numeri irrazionali.

Quindi $\mathbb{R}$ è dato dall'unione dell'insieme dei numeri razionali ($\mathbb{Q}$) e dei numeri irrazionali ($\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$)

razionali ↓ finiti, infiniti periodici

irrazionali ↓ infiniti non periodici

Si può dimostrare che $\exists$ di una corrispondenza biunivoca tra i punti della retta orientata e i numeri reali (pur di identificare $0,\bar{9} = 1$)
quindi le "lacune" sulla retta lasciate da $\mathbb{Q}$ si "chiudono" con i numeri irrazionali

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

• Identifico R con i punti di una retta ordinata

In R si possono introdurre le operazioni di +, -, ·, : grazie alle quali R è un campo anche in R si introduce relazione d'ordine e rispetto alla quale R è un campo ordinato

Inoltre è proprietà denso

- R è denso: $\forall r_1, r_2 \in R$ con $r_1 < r_2$ $\exists r \in R: r_1 < r < r_2$
- Q è denso in R: $\forall r_1, r_2 \in R$ con $r_1 < r_2$ $\exists q \in Q: r_1 < q < r_2$

tra due numeri reali esiste sempre un razionale.

Inoltre possiamo approssimare i numeri reali per eccesso e per difetto con numeri razionali con un errore piccolo a piacere.

Procediamo per semplicità:

NUMERO IRRAZIONALI/RAZIONALI $\alpha > 0$

$\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \dots$ $\quad \alpha_0 \in N$ CON $\alpha \in R \setminus Q$

$\alpha_j \in \{0, 1, 2, \dots 9\}$

Allora

$P_0 = \underset{\in Q}{\alpha_0} \leq \underset{\in R\setminus Q}{\alpha} \leq \underset{\in Q}{\alpha_0 + 1} = q_0$ $\quad (0 \leq E \leq 1)$

errore che compio approssimando α tra 0 e 1

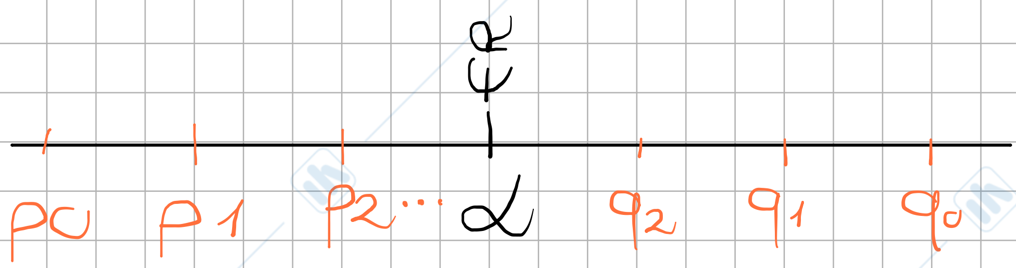
$P_1 = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} \leq \alpha \leq \alpha_0 + \frac{\alpha_1 + 1}{10} = q_1$ $\quad \left(0 \leq E \leq \frac{1}{10}\right)$

errore compreso tra 0 e $\frac{1}{10}$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

$$p_2 = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{100} \le \alpha \le \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2+1}{100} = q_2 \qquad 0 \le E \le \frac{1}{100}$$



Qualunque strumento di calcolo non simbolico utilizza questa approssimazione dei numeri reali con un errore che dipende dal cosiddetto numero macchina

Differenza tra Q e R

Quanti sono gli elementi di Q?

Quanti sono gli elementi di R?

Sono entrambi infiniti ma di natura diversa

Un insieme infinito si dice numerabile se può essere messa in corrispondenza biunivoca con N

- NUMERI PARI: $\{x = 2n,\ n \in \mathbb{N}\} = A$ $\quad A \subset \mathbb{N}$

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 4 & 6 & 8 & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \end{array}$$

A e numerabile

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

$\mathbb{Q}$ è numerabile - dimostrazione

per semplicità considero solo i $q \in \mathbb{Q}$ con $q > 0$

$$\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \rightarrow & \frac{1}{4} \; \dots \\
\frac{2}{1} & & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & & \frac{2}{4} \; \dots \\
\frac{3}{1} & & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & & \frac{3}{4} \\
\frac{4}{1} & & & & &
\end{array}$$

PERDIONALIZZAZIONE

↳ partendo da $\frac{1}{1}$ e seguendo le frecce dispongo tutti i razionali in sequenza (eliminando tutte le frazioni non ridotte ai minimi termini).

Ottengo così una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{N}$

- $\mathbb{R}$ non è numerabile (idea della dimostrazione)

limitiamoci per semplicità a tutti i numeri reali in cifre binarie $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$

$$A = \{ \alpha \in \mathbb{R} : 0 \leq \alpha < 1 \}$$

Posso quindi disporre tutti gli allineamenti decimali con cifre 0 e 1 in sequenza $S_1, S_2, \dots$ e inserirli nella tabella costruisco l'allineamento S cambiando la cifra sulla diagonale:

se è 0 metto 1

se è 1 metto 0

$S_1 = 000000000$

$S_2 = 111111111$

$S_3 = 010101010$

$S_4 = 101010101$

$S_5 = 110101101$

$S_6 = 001101101$

$S_7 = 100010001$

$S_8 = 001100110$

$S_9 = 11001001$

$S = 101110100$

l'allineamento S non compare in tabella

ASSURDO!

$\mathbb{R} > \mathbb{Q}$

MA NON NUMERAB.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari