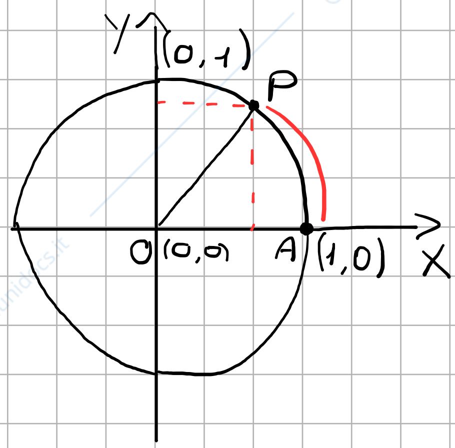
Cenni alle funzioni trigonometriche

Consideriamo nel piano cartesiano xy la circonferenza di centro (0,0) e raggio 1. Sia P un punto della circonferenza (lunghezza = 2π)



Consideriamo l'angolo x formato dalle semirette uscenti da O = (0,0) e passanti per A e per P.

Consideriamo l'arco di circonferenza $\overset{\frown}{AP}$ percorso da A a P

La misura in radianti di x è data da

+ (lunghezza $\overset{\frown}{AP}$) se l'angolo è percorso in senso antiorario

− (lunghezza $\overset{\frown}{AP}$) se l'angolo è percorso in senso orario

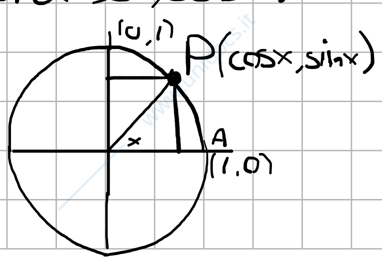
Al muoversi di P sulla circonferenza, definiamo

sinx : ordinata di P   cosx : ascissa di P

Quindi $P = (\cos x, \sin x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

↑ in cordinate (x, y)

Quali sono le caratteristiche delle funzioni sinx e cosx ?



$-1 \leq \sin x \leq 1$

$-1 \leq \cos x \leq 1$

se $P \cong A \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2\pi \ldots \end{cases}$

$\sin(0) = \sin(2\pi) = 0$

$\cos(0) = \cos(2\pi) = 1$

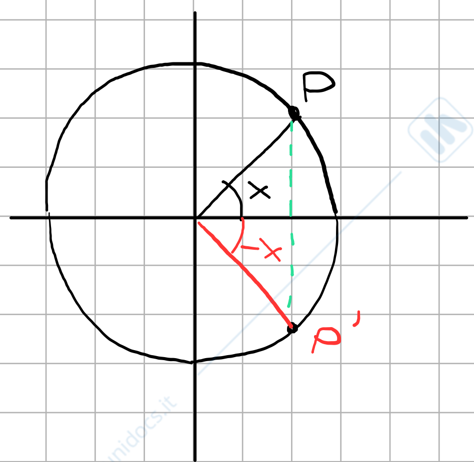
In generale $\sin(x+2\pi) = \sin x \quad \cos(x+2\pi) = \cos x$

$K \in \mathbb{Z} \quad \sin(x+2K\pi) = \sin x \quad \cos(x+2K\pi) = \cos x$

Valgono inoltre le proprietà di simmetria

$\sin(-x) = -\sin x$ (funzione dispari)

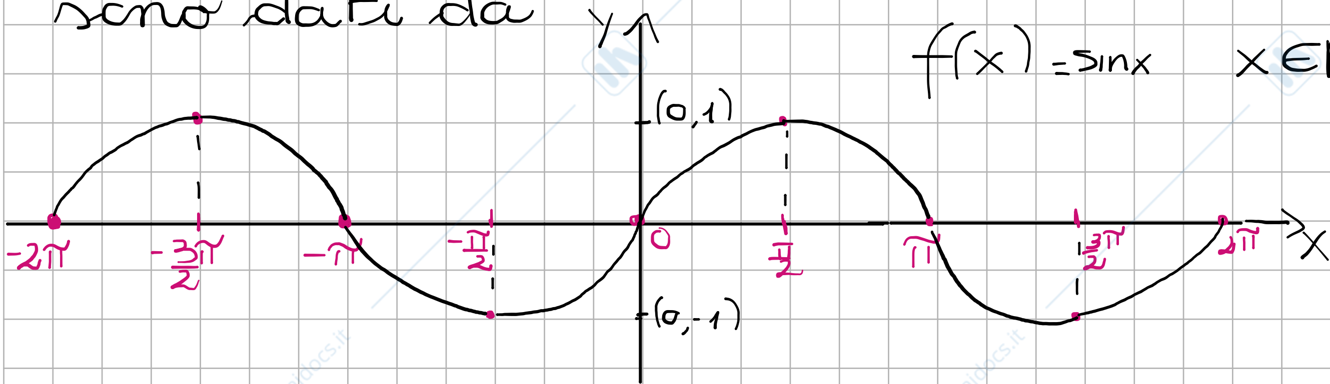
$\cos(-x) = \cos x$ (funzione pari)

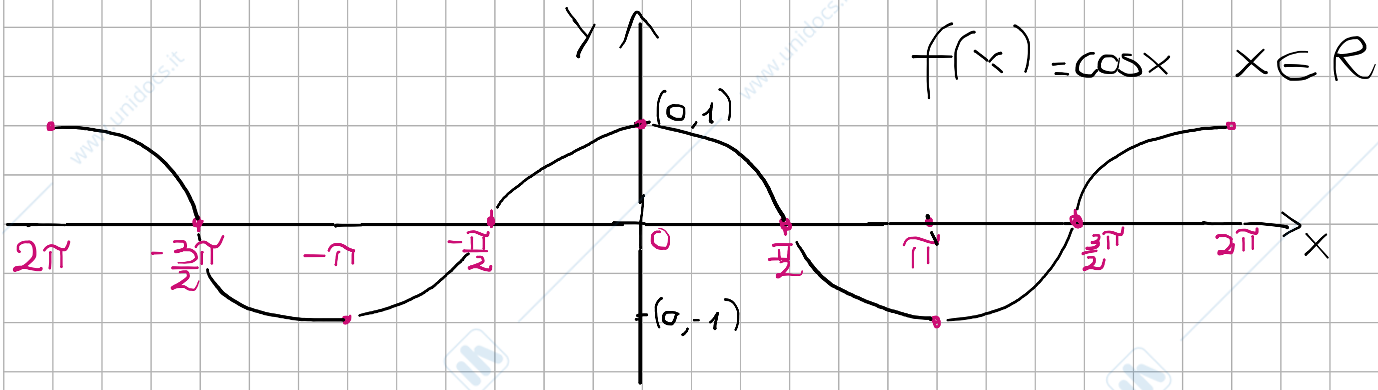


$$\boxed{\begin{array}{l} \sin(-x) = -\sin x \\ \cos(-x) = \cos x \end{array}}$$

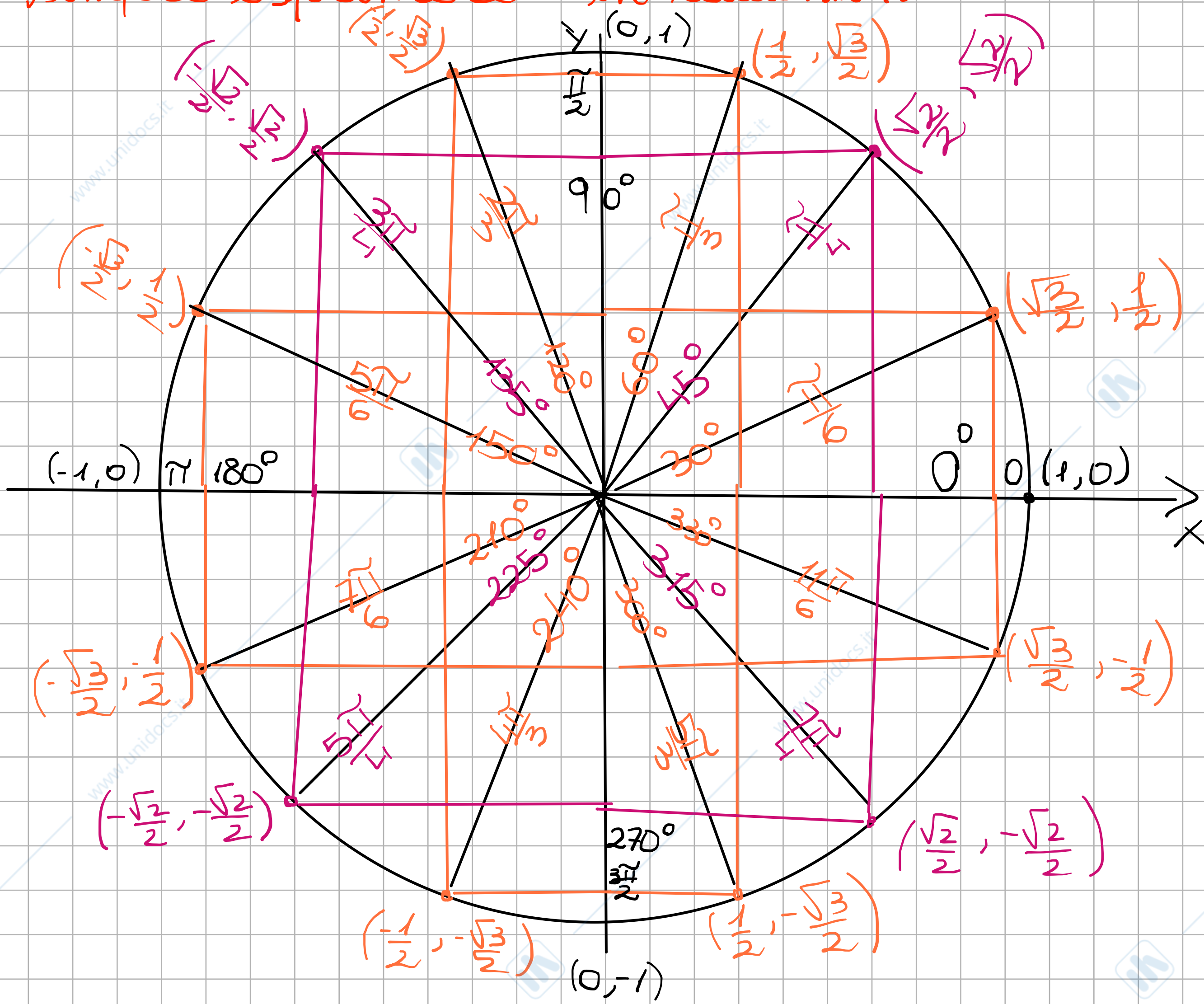
I grafici delle funzioni $\sin x$ e $\cos x$ sono dati da

$f(x) = \sin x \quad x \in \mathbb{R}$





Alcuni valori di $\sin x$ e $\cos x$ da ricordare
sempre esprimere x in radianti !!



Poiché P appartiene alla circonferenza centrata in (0,0) e raggio 1 nelle coordinate xy e $P = (\cos x, \sin x)$, allora vale la relazione fondamentale della trigonometria

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

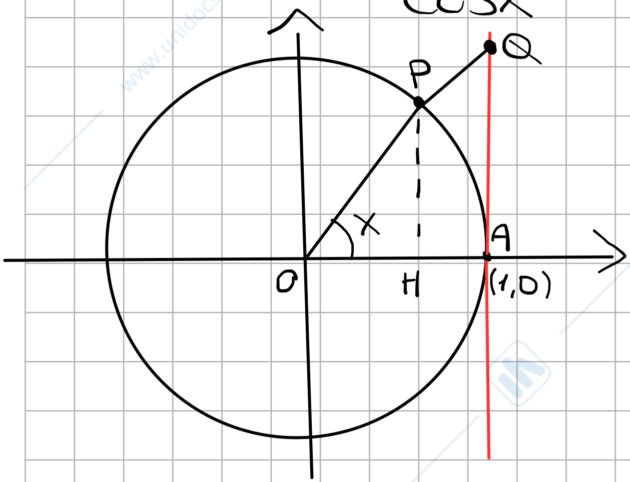
Da questa relazione si possono ricavare le formule trigonometriche

- $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \begin{cases} 2\cos^2 x - 1 \\ 1 - 2\sin^2 x \end{cases}$

Altra funzione trigonometrica

$f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ tangente di x

$x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

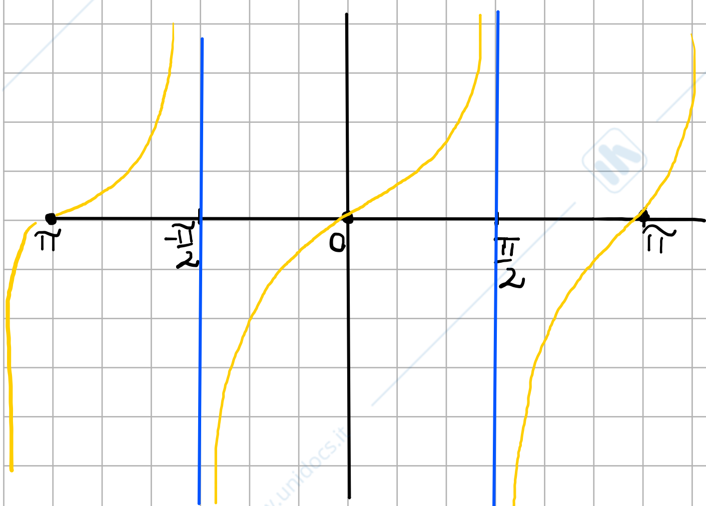


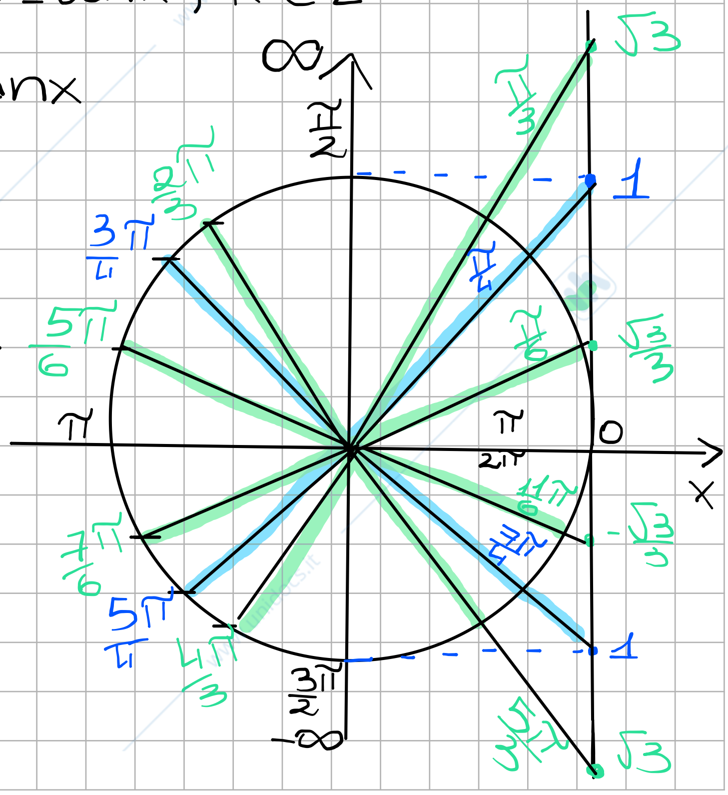
$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$: ordinata di Q

proprietà e grafico di $f(x) = \tan x$

π - periodica $\tan(x + k\pi) = \tan x$, $k \in \mathbb{Z}$

dispari $\tan(-x) = -\tan x$



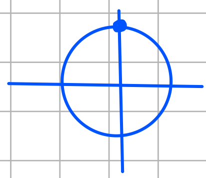


Qualche semplice esercizio

Risolvere le seguenti disequazioni

1) $\sin x < 1$

$x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$



2) $\cos x + 2 < 0$

$\cos x < -2$ nessuna soluzione

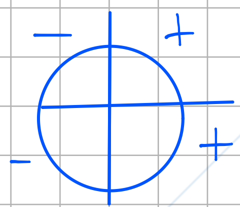
3) $\cos^2 x + \cos x \geq 0$

$\underbrace{\cos x}_{F1} \underbrace{(\cos x + 1)}_{F2} \geq 0$

$F2 \geq 0 \quad \cos x + 1 \geq 0 \ \forall x$

$\cos x + 1 = 0 \iff \cos x = -1 \iff \boxed{x = \pi + 2k\pi}$

• segno di $\cos x$:



<u>Soluzioni:</u> $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \cup \ x = \pi + 2k\pi$
$k \in \mathbb{Z}$

4) $1 - 2\cos^2 x + \sin x \geq 0$

$1 - 2(1 - \sin^2 x) + \sin x \geq 0$

$1 - 2 + 2\sin^2 x + \sin x \geq 0$

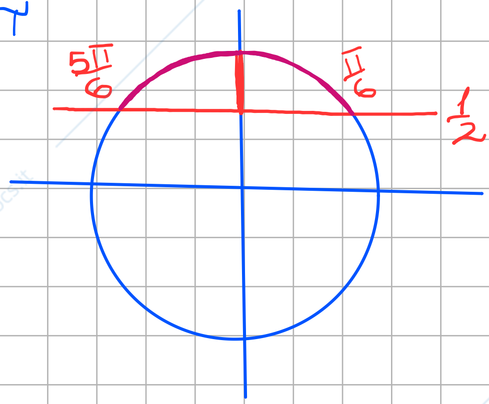
$2\sin^2 x + \sin x - 1 \geq 0 \quad [\sin x = t]$

$2t^2+t-1 \geq 0 \qquad \Delta = 1+8 = 9$

$t_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{4} \left\langle \begin{array}{l} -1 \\ \frac{1}{2} \end{array} \right.$

$t \leq -1 \,,\; t \geq \frac{1}{2} \qquad \sin x \leq -1 \,,\; \sin x \geq \frac{1}{2}$

$\sin x \leq -1 \qquad x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$



$\sin x \geq \frac{1}{2}$

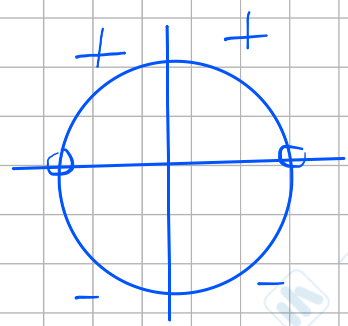
$$\boxed{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5}{6}\pi + 2k\pi}$$

$$\boxed{x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi}$$

5) $\sin(2x) + \sin x < 0$

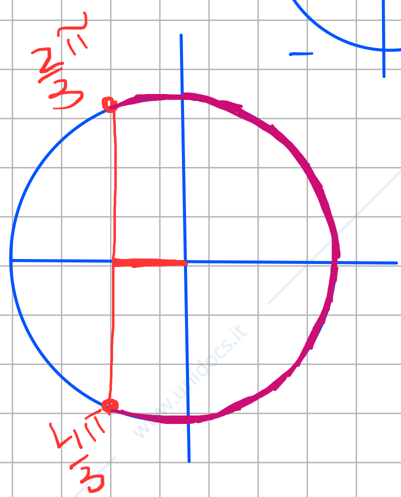
$2\sin x \cos x + \sin x < 0$

$\underbrace{\sin x}_{F1}\underbrace{(2\cos x + 1)}_{F2} < 0 \qquad \sin x :$

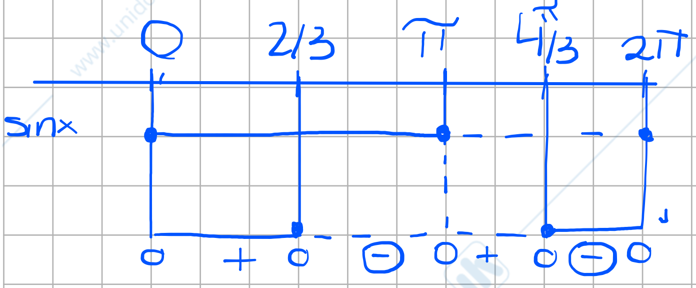


$F2 > 0 \quad 2\cos x + 1 > 0$

$\cos x > -\frac{1}{2}$



Quindi se consideriamo il periodo $[0, 2\pi]$



questo è un grafico che considera il segno dei singoli fattori e del prodotto

Sol.

$\frac{2}{3}\pi + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$, $\quad \frac{4}{3}\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$

$k \in Z \qquad\qquad k \in Z$