I numeri naturali: definizione assiometica

ASSIOMI DI PEANO

A1) Esiste ($\exists$) un numero naturale: 1

A2) Ogni numero naturale ha un numero successore

A3) Numeri naturali diversi hanno successori diversi

A4) 1 non è il successore di alcun numero naturale

A5) Ogni sottoinsieme di numeri naturali che contiene 1 e il successore di ogni proprio elemento coincide con l'insieme dei numeri naturali

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

Richiami sui numeri naturali / interi / razionali

Definizioni e notazioni

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \dots\}$ $\quad n \in \mathbb{N}$ numeri naturali

  n: numero generico

$$\mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

In $\mathbb{N} \cup \{0\}$ si possono introdurre le operazioni elementari di somma (+) e prodotto ($\cdot$) rispetto alle quali $\mathbb{N} = \{0\}$ è chiuso nella somma e prodotto

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

$a+b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
$a \cdot b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $\quad \forall a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

PROPRIETÀ $\quad a, b, c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

P1) Proprietà commutativa della somma

$$a+b=b+a$$

P2) Proprietà associativa della somma

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

P3) $\exists$ elemento neutro della somma

$$a+0=0+a=a$$

P4) Proprietà commutativa del prodotto

$$a \cdot b = b \cdot a \qquad a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

P5) Proprietà associativa del prodotto

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

P6) 1 è l'elemento neutro del prodotto

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

P7) Proprietà distributiva della somma rispetto al prodotto

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$

numeri pari: $\{x = 2n \quad n \in \mathbb{N}\}$

numeri dispari: $\{x = 2n+1 \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$
$\{x = 2n-1 \quad n \in \mathbb{N}\}$

- $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} = \{\dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots\}$

$= \{\pm n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ numeri interi (con segno)

identifichiamo: $\underset{\mathbb{Z}}{\underset{n}{+n}} \longleftrightarrow \underset{\mathbb{N}}{\underset{n}{n}}$ $\qquad \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

In $\mathbb{Z}$ si possono introdurre le operazioni di somma e prodotto, ci si muove nell'altra direzione (precedente)

P8) $\exists$ l'elemento opposto della somma

$a + b = b + a = 0$

$b = -a$ $\quad$ b è unico

Ex: l'opposto di $+2$ è -2
l'opposto di -3 è $+3$
l'opposto di 0 è 0

grazie alle proprietà in $\mathbb{Z}$ si ha:

- $-(-a) = a$
- $a + c = b + c \Rightarrow a = b$ (vale anche in $\mathbb{N}$)
- $(-a) \cdot b = -a \cdot b$
- $(-a)(-b) = a \cdot b$

$\mathbb{Z}$ è chiuso rispetto alle operazioni di somma, prodotto e differenza

$a - b = a + (-b)$
$2 - 3 = 2 + (-3) = -1$

- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$ numeri razionali

I numeri razionali hanno 3 tipologie di rappresentazione

- FRAZIONARIA
- DECIMALE → FINITA / INFINITA E PERIODICA
- PUNTO DI UNA RETTA

1) Si introduce una relazione di equivalenza

$$\frac{m}{n} = \frac{Km}{Kn} \quad \forall K \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \; m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$$

Ex: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{-8}{-12}$ DIVERSE RAPPRESENTAZIONE

Scegliamo per ogni classe di equivalenza in $\mathbb{Q}$ un rappresentante che chiamiamo frazione ridotte ai minimi termini, ovvero:

$$q = \pm \frac{m}{n} \qquad q \in \mathbb{Q}$$

$$m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$n \in \mathbb{N}$$

$$M.C.D.(m, n) = 1$$

Ex $\frac{2}{3}$ Si, $-\frac{4}{5}$ si, $\frac{4}{8}$ NO!!

la classe di equivalenza di $\frac{4}{8}$ ha come rappresentante $\frac{1}{2}$

$q = 0$ è il rappresentante di $\pm \frac{0}{n}$, $n \in \mathbb{N}$

identifico $\frac{m}{1} \rightsquigarrow m$ $\boxed{N \subset Z \subset Q}$

$Q \quad Z$

Q è chiuso rispetto alle operazioni di somma, prodotto e differenza.
Inoltre è chiuso rispetto alla divisione:

$$\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{mq}{np} \in Q \qquad m, n, p, q \in Z$$

$$n, p, q \neq 0$$

P9) Esiste l'elemento reciproco di $\alpha \in Q$ e $\beta \in Q$ diversi da 0

$$\forall \alpha \in Q \setminus \{0\} \quad \exists \beta \in Q \setminus \{0\} : \alpha\beta = \beta\alpha = 1$$

$$\alpha = \frac{m}{n} \quad \beta = \frac{n}{m} \quad \text{in } m, n \neq 0$$

$$\beta = \alpha^{-1}$$

P1 -> P9 rendono Q algebricamente un campo