CENNI DI TEORIA DEGLI INSIEMI

Un insieme è una collezione di enti.

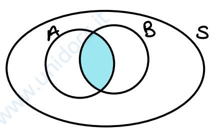
- $x \in S$ x è un elemento di S
- $x \notin S$ x non è un elemento di S

L'insieme vuoto $\emptyset$ è l'insieme che non ha elementi.
Un insieme A è sottoinsieme di S se ogni elemento di A è anche elemento di S: $A \subseteq S$
Un insieme A è contenuto propriamente in S se esiste un elemento di S che non è elementi di A: $A \subsetneq S$ ma $k \in S : k \notin A$
Due insiemi S e T coincidono se hanno gli stessi elementi, si scrive S=T $\Leftrightarrow$ $S \subseteq T,\ T \subseteq S$
S insieme, l'insieme dei sottoinsiemi di S si chiama insieme delle parti di S ed è indicato con P(S)

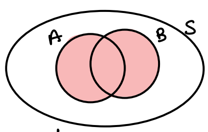
$S = \{1;2\} \quad P(S) = \{\{1\};\{2\};\{1;2\};\emptyset\}$

Operazioni

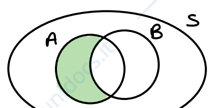
- Intersezione
- Unione:
- Complementare:
- Complemento:



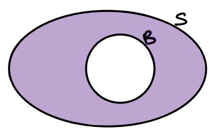
$A \cap B = \{q \in S \mid q \in A \text{ e } q \in B\}$



$A \cup B = \{q \in S \mid q \in A \text{ o } q \in B\}$



$A / B = \{q \in S \mid q \in A,\ q \notin B\}$
→ di B rispetto ad A



$B^c = \{q \in S \mid q \notin B,\ q \in S\}$

Regole di calcolo

1. $A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$ (quello che non sta in A non sta in B e viceversa)
2. $(A^c)^c = A$ (doppia negazione = affermazione)
3. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
4. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Il prodotto cartesiano fra A e B, indicato con AxB, è l'insieme delle coppie ordinate (a, b) dove $a \in A$ e $b \in B$

$A = \{s;t\} \quad A^2 = \{(t,t);(s,s);(s,t);(t,s)\}$

Relazioni

S insieme, una relazione su S è un sottoinsieme R di S=SxS. Si scrive aRb.
Una relazione di equivalenza su S è una relazione, indicate con a~b che soddisfa le seguenti proprietà:

1. $a \sim a$ riflessiva
2. se $a \sim b$ anche $b \sim a$ simmetrica
3. se $a \sim b$ e $b \sim c$ allora $a \sim c$ transitiva

$a \in S$, La classe di equivalenza è l'insieme di tutti gli elementi di S equivalenti ad a: $[a] = \{b \in S \mid a \sim b\} \subseteq S$
Una relazione d'ordine su S è una relazione che soddisfa le seguenti proprietà

1. $a \preceq a$ riflessiva
2. se $a \preceq b$ e $b \preceq a$, allora $a = b$ antisimmetrica
3. se $a \preceq b$ e $b \preceq c$, allora $a \preceq c$ transitiva

Una relazione è di ordine totale se vale:

4. $a \preceq b$ oppure $b \preceq a$ dicotomia

INSIEME DEI NUMERI REALI E ASSIOMI

R è un insieme non vuoto con le seguenti proprietà:

Operazioni: *addizione* e *somma* + e *moltiplicazione* o *prodotto* * con le seguenti proprietà:

1) Associativa: $(a+b)+c=a+(b+c)$; $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
2) Commutativa: $a+b=b+a$; $a\cdot b=b\cdot a$
3) Distributiva: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$
4) Esistenza degli elementi neutri: esistono due numeri distinti e neutri $\rightarrow a+0=a$ e $a\cdot 1=a$
5) Esistenza degli elementi opposti e inversi: opposto $(-a)$: $a+(-a)=0$; inverso/reciproco (a^{-1}): $a\cdot(a^{-1})=1$

Ordinamento: relazione d'ordine *minore o uguale* $\leq$ con le seguenti proprietà:

6) Dicotomia: $\forall a,b\in R$ si ha $a\geq b$ oppure $b\leq a$
7) Se $a\leq b$ allora $a+c\leq b+c$
8) Se $a\geq 0$ e $b\geq 0$ allora $a+b\geq 0$ e $a\cdot b\geq 0$
9) Assioma di completezza: $A,B\subseteq R$: $a\leq b$ $(a\in A, b\in B)$ allora esiste un numero c (elemento separatore) tale che $a\leq c\leq b$

Gli assiomi dall'1 al 5 dicono che R è un "campo"; dall'1 all'8 dicono che R è un "campo ordinato"; dall'1 al 9 dicono che R è un "campo ordinato e completo".

Esempio: $3x+2=0$

assiomi 1 e 4: $3x+2+(-2)=0+(-2)$

assioma 5: $3x+0=-2$

assioma 4: $3x\cdot(3^{-1})=-2\cdot(3^{-1})$

$$x=-\frac{2}{3}$$

Notazioni:
- $a\geq b$ se $b\leq a$
- $a>b$ se $a\geq b$ e $a\neq b$ (maggiore stretto)
- $a<b$ se $a\leq b$ e $a\neq b$ (minore stretto)
- $a>0$ => a è positivo
- $a<0$ => a è negativo
- $a\geq 0$ => a è non negativo
- $a\leq 0$ => a è non positivo

Regole di calcolo

Le seguenti regole sono **conseguenze degli assiomi**:

R1: $a\leq b \Leftrightarrow b-a\geq 0$; $a<b \Leftrightarrow b-a>0$ $\longrightarrow$ se $b=0$: $a\leq 0 \Leftrightarrow -a\geq 0$; $a<0 \Leftrightarrow -a>0$

R2: $a+\cancel{c}=b+\cancel{c} \Leftrightarrow a+b$

R3: $a\cdot c=b\cdot c$ $(c\neq 0)$ => $a=b$

R4: $a\cdot b=0 \Leftrightarrow$ almeno uno tra a e b è zero

R5: $a\cdot(-1)=-a$; $(-a)\cdot b=-ab$

Legge di annullamento del prodotto

R6: $a\geq 0$ e $b\geq 0$ => $ab\geq 0$ $(+\cdot+=+)$

$a\geq 0$ e $b\leq 0$ => $ab\leq 0$ $(+\cdot-=-)$

$a\leq 0$ e $b\geq 0$ => $ab\geq 0$ $(-\cdot+=-)$

Regole di segno

R7: Sia $a\leq b$ allora:

$c\geq 0$ => $c\cdot a\leq c\cdot b$

$c\leq 0$ => $c\cdot a\geq c\cdot b$

INSIEME N

N={1,2,3…} Numeri naturali

Su questo insieme si può sommare e moltiplicare; non ci sono lo zero, l'opposto e gli inversi.

INSIEME Z

Z={0,±1,±2…} Numeri interi

In questo insieme ci sono lo zero, l'opposto ma non c'è l'inverso.

INSIEME Q

Q={m/n; m*n^-1} Numeri razionali

Su questo insieme valgono tutti gli assiomi dall'1 all'8. L'insieme Q è un campo ordinato ma non completo.

Densità di Q e di R\Q

Teorema:

Q e R\Q sono densi in R, cioè $\forall a,b \in R$ con $a>b$

$$\exists q \in Q : a<q<b \quad \text{ed} \quad \exists r \in R \setminus Q : a<r<b$$

Teorema:

Esiste un unico numero C positivo appartenente ad R tale che $C^2=\sqrt{2}$

$$\sqrt{2} \notin Q \quad \text{ma} \quad \sqrt{2} \in R \setminus Q$$

PRINCIPIO DI INDUZIONE

È una tecnica di dimostrazione che consente di dimostrare la validità di una tesi dalla verifica di due condizioni: la validità del *passo uno* e la validità del *passo induttivo*.

Sia P(n) una proposizione dipendente dall'indice n. Supponiamo che P(n) soddisfi:

a) P(1) è vera *(base d'induzione)*

b) se P(n) è vera, allora anche P(n+1) è vera *(passo induttivo)*

Esempi:

- $\forall n>1$ dimostrare 10^n-1 é divisibile per 9

$P(1) = 10^1-1 = 9$ ✓ per induzione

$P(n-1) \Rightarrow P(n) \qquad 10^{n-1}-1 = 9\ell$

$$10^n-1 = (10^{n-1})\cdot 10 - 1 = (10^{n-1})(9+1)-1 = 9\cdot 10^{n-1} + \overbrace{10^{n-1}-1}^{9\ell} = 9(\underbrace{10^{n-1}+\ell}_{k}) = 9k$$

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$P(1) \Rightarrow 1^2 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$$

$$1=1 \checkmark$$

$$P(n+1) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n+1} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n+1}{6}\left[n(2n+1)+6(n+1)\right] =$$

$$= \frac{n+1}{6}\left[2n^2+7n+6\right] = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

INTERVALLI, MASSIMI-MINIMI, MAGGIORANTI-MINORANTI, ESTREMI

Intervalli:

- **limitati**:
  - chiuso $a \le x \le b$
  - aperto $a < x < b$
  - semiaperto a destra $a \le x < b$
  - semiaperto a sinistra $a < x \le b$
  - degenere $[a,a] = \{a\}$
- **illimitati**
  - chiuso, illimitato a destra $[a;+\infty)$ cioé $x \ge a$
  - aperto, illimitato a destra $(a;+\infty]$ cioé $x > a$
  - chiuso, illimitato a sinistra $(-\infty; a]$ cioé $x \le a$
  - aperto, illimitato a sinistra $[a;-\infty)$ cioé $x < a$
- **illimitato a dx e a sx** $(-\infty;+\infty)$: R

Massimi e minimi

$A \subseteq R, \ A \neq 0$

A ammette massimo se esiste M appartenente ad A tale che $\forall a \in A, a \le M \Rightarrow M = \max A$

A ammette minimo se esiste m appartenente ad A tale che $\forall a \in A, a \ge m \Rightarrow M = \min A$

Questi non sempre esistono. Ma quando esistono sono unici.

Esempio: $B=(2;3]$ max $= 3$, min = non esiste oppure $B=[2;+\infty)$ min $=2$, max $= \nexists$

Maggioranti e minoranti

$A \subseteq R, \ A \neq 0$

Un numero reale L appartenete a R è maggiorante di A se $\forall a \in A, a \le L$

Un numero reale l appartenente a R è minorante di A se $\forall a \in A, a \ge \ell$

Se L esiste diciamo che A è limitato superiormente. Se l esiste diciamo che A è limitato inferiormente.

Se esistono entrambi allora diciamo che A è limitato. Esempio: $A=(-2;5]$ $\forall \ell \le -2$ é minorante $(-\infty;-2]$, $\forall L \ge 5$ é maggiorante $[5;+\infty)$

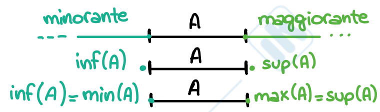
Estremo superiore e inferiore

$A \subseteq R,\ A \neq 0$

Se A è limitato superiormente allora esiste in R il minimo dell'insieme dei maggioranti di A e tale numero si chiama estremo superiore di A. $\sup A = \min\{L \in R:\ L \text{ maggiorante di } A\}$; se A NON È limitato superiormente: $\sup A = +\infty$

Se A è limitato inferiormente allora esiste in R il massimo dell'insieme dei minoranti di A è tale numero si chiama estremo inferiore di A. $\inf A = \max\{\ell \in R:\ \ell \text{ minorante di } A\}$; se A NON È limitato inferiormente: $\inf A = -\infty$

Osservazioni:
- se $\sup A \in A \Rightarrow \sup A = \max A$ (se $\exists \max A \Rightarrow \sup A = \max A$)
- se $\inf A \in A \Rightarrow \inf A = \min A$ (se $\exists \min A \Rightarrow \inf A = \min A$)
- se $\nexists \max A \Rightarrow \sup A \notin A$
- se $\nexists \min A \Rightarrow \inf A \notin A$



Teorema:
- $\sup N = +\infty$, N è ben ordinato, ovvero $\forall A \subseteq N,\ A \neq \emptyset$, ammette il minimo.
- $\sup N < +\infty$, N è ben ordinato, ovvero $\forall A \subseteq N,\ A \neq \emptyset$, ammette il massimo.

NUMERI COMPLESSI

per risolvere le equazioni di 3° grado: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$
ci si accorse compariva spesso la $\sqrt{-1}$, venne poi chiamata **parte immaginaria**, usata per semplificare e trovare soluzioni reali.
I numeri complessi sono un'estensione di quelli reali.

esempio: $x^2 - 1 = 0$ non ha soluzioni reali
$x^2 = -1$
$x = \sqrt{-1}$ (formalmente)

Per costruire i numeri complessi si introduce l'**unità immaginaria**: $i = \sqrt{-1} \longrightarrow i^2 = -1$

I numeri complessi sono definiti come l'insieme $C = \{a + ib \mid a, b \in R\}$ "a" si chiama **parte reale**
"ib" si chiama **parte immaginaria**

SOMMA

$z = (a+ib)$
$z' = (c+id)$ $\Rightarrow z + z' = (a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d)$

PRODOTTO

$z = (a+ib)$
$z' = (c+id)$ $\Rightarrow z \cdot z' = (a+ib)(c+id) = ac + ibc + iad + \underbrace{i^2}_{i^2=-1}bd = (ac - bd) + i(bc + ad)$

$\longrightarrow$ **COMPLESSO CONIUGATO**: $\bar{z} = (a - ib)$ è l'opposto del numero z

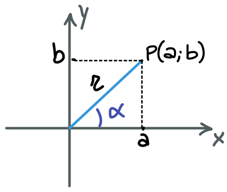
$z \cdot \bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$

DIVISIONE

$z = (a+ib)$
$z' = (c+id)$ $\Rightarrow \dfrac{z}{z'} = \dfrac{(a+ib)}{(c+id)} \cdot \dfrac{(c-id)}{(c-id)} = \dfrac{ac - iad + ibc - i^2bd}{c^2 + d^2} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + \dfrac{i(bc-ad)}{c^2+d^2}$

Rappresentazione trigonometrica

Nel piano un numero complesso è un vettore di coordinate (a; b) dove 'a' è l'ascissa e 'b' è l'ordinata. La lunghezza del vettore è detto "modulo" e si ottiene dal teorema di Pitagora.



$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Usando le coordinate polari:
- $a = r\cos\alpha$
- $b = r\sin\alpha$

$\Rightarrow z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ forma trigonometrica

$$\alpha = \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{a}{r} \\ \sin\alpha = \dfrac{b}{r} \end{cases}$$

PRODOTTO

$$z_1 = r_1(\cos\alpha_1 + i\,\text{sen}\,\alpha_1) \qquad z_2 = r_2(\cos\alpha_2 + i\,\text{sen}\,\alpha_2)$$
$$\Rightarrow z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2\Big[\big(\overbrace{\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \text{sen}\,\alpha_1\,\text{sen}\,\alpha_2}^{\cos(\alpha_1+\alpha_2)}\big) + i\big(\overbrace{\cos\alpha_1\,\text{sen}\,\alpha_2 + \text{sen}\,\alpha_1\cos\alpha_2}^{\text{sen}(\alpha_1+\alpha_2)}\big)\Big] =$$
$$= r_1 r_2\left[\cos(\alpha_1+\alpha_2) + i\,\text{sen}(\alpha_1+\alpha_2)\right]$$

ESPONENZIALI

$$z^n = r^n\left[\cos(n\alpha) + i\,\text{sen}(n\alpha)\right]$$

RADICI ENNESIME

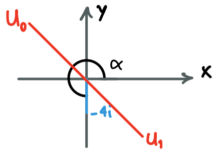
Dato un numero complesso Z diverso da zero, una radie n-esima di Z è un numero complesso U tale che: $U^n = z$
Ogni numero complesso, diverso da zero, ha n radici n-esime distinte.

$$z = r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$$
$$U_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}\cdot k\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}\cdot k\right)\right] \qquad k = 0, 1 \dots n-1$$

esempio:

$z = -4i \qquad |z| = r = 4$

$\alpha = \frac{3}{2}\pi$



- Radici seconde:

$$\frac{\alpha}{n} = \frac{3\pi}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4}\pi;\ \sqrt[2]{r} = \sqrt[2]{4} = 2 \Rightarrow U_0 = 2\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\,\text{sen}\frac{3}{4}\pi\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$
$$U_1 = -U_0 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

- Radici terze:

$$\frac{\alpha}{n} = \frac{3\pi}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{\pi}{2};\ \sqrt[3]{r} = \sqrt[3]{4} \Rightarrow U_0 = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt[3]{4}\cdot i \qquad k=0$$
$$U_1 = \sqrt[3]{4}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right)\right] = \sqrt[3]{4}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) \qquad k=1$$
$$U_2 = \sqrt[3]{4}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\cdot 2\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\cdot 2\right)\right] = \sqrt[3]{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - i\frac{1}{2}\right) \qquad k=2$$

CALCOLO COMBINATORIO

è quella branca della matematica che si occupa di capire in quanti e quali modi si possono disporre gli oggetti che appartengono a una collezione.

Permutazioni semplici

esempio: si hanno 4 sfere di colori diversi e 4 caselle. Per riempire la prima casella si hanno 4 possibilità, per la seconda se ne hanno 3, la terza 2 e infine la quarta una sola possibilità. Alla fine si hanno 4*3*2*1=24 possibilità.
Stesso ragionamento per gli anagrammi di parole in cui le lettere sono distinte tra loro.

Consideriamo un insieme generico di **n** elementi distinti. Abbiamo **n** caselle e le vogliamo riempire. La prima casella avrà **n** possibilità, la seconda ne avrà **n-1**, la terza ne avrà **n-2** e così via fino ad arrivare all'ultima casella in cui è rimasta una sola possibilità. Quindi, in generale, diremo che abbiamo n*(n-1)*(n-2)*…*1 possibilità. Questo numero si indica con **n!** e si chiama **fattoriale** di n. $P_n = n!$

Permutazioni con ripetizioni

esempio: si hanno una sfera verde, una sfera blu, 3 sfere viola e 2 sfere arancioni. Di nuovo si hanno 7 caselle; se si vogliono disporre le sfere nelle caselle, si avranno 7! possibilità. **Si osserva** però, che due configurazioni in cui ad esempio le 2 sfere arancioni cambiano di posto, di fatto sono la stessa combinazione; lo stesso vale con le 3 sfere viola.
Quindi alle 7! possibilità si deve dividere il numero delle permutazioni dei due e di tre oggetti.
Questo ragionamento è applicabile anche per creare gli anagrammi di parole contenti delle parole ripetute più volte, ad esempio la parola 'mamma' ha in totale 10 anagrammi, perché: mamma 5 lettere, 3 m e 2 a $\Rightarrow \frac{5!}{2!3!} = \frac{120}{12} = 10$
In generale si applica la formula: $P_n^* = \frac{n!}{k_1!\cdots k_r!}$

Disposizioni semplici

<u>esempio</u>: si hanno 4 sfere diverse e soltanto 2 caselle. Per la prima casella si hanno 4 possibilità, mentre per la seconda ne sono rimaste 3. Il risultato è che le disposizioni semplici di 4 oggetti a 2 a 2 sono 4*3 cioè 12.

In generale la formula che dà le disposizioni semplici di **n oggetti** a **k a k** è: $D_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Combinazioni semplici

<u>esempio</u>: si hanno 4 sfere, 2 caselle e le disposizioni a due sono 12. Ma, se si suppone che non ci sia l'interesse dell'ordine, bisognerà dividere per 2. Si ottengono così le combinazioni semplici di 4 oggetti a 2 a 2.

In generale il numero che si ottiene dalle combinazioni semplici si chiama **coefficiente binomiale**. La formula che si applica per trovare tale numero è: $C_{n,k} = \dfrac{D_{n,k}}{k!} = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$

Disposizioni con ripetizioni

<u>esempio</u>: si hanno 4 sfere colorate, distinte pescate da un sacchetto e 3 caselle. Per la prima casella si avranno 4 possibilità, considerando che poi la sfera viene rimessa nel sacchetto, anche per la seconda casella si avranno 4 possibilità; lo stesso per la terza. Il numero delle disposizioni con le ripetizioni sarà 4*4*4 cioè 4^3 ovvero 64.

In generale il numero delle disposizioni con ripetizioni di **n oggetti** a **k a k** è: $D_{n,k} = n^k$

BINOMIO DI NEWTON

Teorema: per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $a,b \in \mathbb{R}$ si ha:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

esempi:

$n=2$ $\quad (a+b)^2 = \binom{2}{0}a^2b^k + \binom{2}{1}a^1b^1 + \binom{2}{2}a^0b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$n=3$ $\quad (a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3b^k + \binom{3}{1}a^2b^1 + \binom{3}{2}a^1b^2 + \binom{3}{3}a^0b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$n=4$ $\quad (a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4b^k + \binom{4}{1}a^3b^1 + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}a^1b^3 + \binom{4}{4}a^0b^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

FUNZIONI ELEMENTARI

Dati due insiemi A e B, una funzione è una legge f che associa ad ogni elemento di A uno e un solo elemento f(x) di B.
$f: A \rightarrow B$ è una funzione, il cui **dominio** è A cioè l'insieme di partenza sui cui gli elementi ha senso valutare la funzione. Invece l'insieme B è detto **codominio**, cioè l'insieme in cui sono contenute le immagini della funzione (coincide con l'insieme d'arrivo).
y = f(x)
L'**immagine** di una funzione è l'insieme dei valori assunti da y. Invece la **controimmagine** è l'insieme di tutte le x che oca come immagine y.

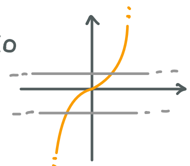
↳ come si calcola? ex: $f(x) = 2x-1$, la controimmagine di 7 è: $2x-1=7$

Funzione iniettiva (f :A ⟶B)

Una funzione è iniettiva se solo se per ogni y di B esiste al massimo una soluzione di y = f(x) in A.

↳ proprietà caratteristica: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

esempio

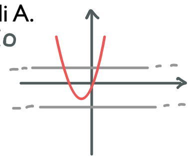


Una funzione iniettiva NON ha rette orizzontali che la intersecano <u>in più di un punto</u>.

Funzione suriettiva (f :A ⟶B)

Una funzione è suriettiva se per ogni y di B esiste un x in A tale che f(x) = y, cioè ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A.

esempio



Una funzione NON suriettiva ha delle rette che non intersecano con la curva della funzione.

Se una funzione è iniettiva e suriettiva contemporaneamente allora si dice che è biiettiva o biunivoca.

Funzione invertibile / inversa (f: A⟶B)

Se una funzione è biunivoca allora è invertibile o inversa: $f^{-1}(x)$

Una funzione si dice invertibile se esiste una funzione g: B⟶A tale che:
- $g(f(x)) = x$ per ogni x in A
- $f(g(x)) = y$ per ogni by in B

$\hookrightarrow f(y) = x$

Per calcolare l'inversa bisogna esplicitare la x e invertirla con y.

esempio: $f(x) = \log(x^3)$

$$y = \log(x)^3$$
$$e^y = x^3$$
$$e^{\frac{y}{3}} = x \rightarrow y = e^{\frac{x}{3}} \rightarrow f^{-1}(x) = e^{\frac{x}{3}}$$

Funzione composta [(f o g) oppure (g o f)]

Una funzione composta è una funzione che ha per argomento un'altra funzione:

$f: A \rightarrow B$; $g: B \rightarrow C$ $\quad (g \circ f) = g(f(x))$ $\quad x \rightarrow f(x) \rightarrow g(f(x))$

esempio: $f(x) = \log(x)$

$g(x) = 3x^2 + 2$

$g \circ f = g(f(x)) = 3(\log(x))^2 + 2$ ma $f \circ g = f(g(x)) = \log(3x^2+2)$

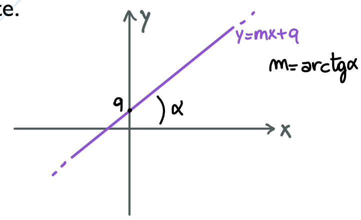
Funzione monotona

Una funzione è <u>monotona</u> se per ogni x_1, x_2 appartenenti ad A è:
- Crescente: $x_1; x_2 \in A$: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- Decrescente: $x_1; x_2 \in A$: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Una funzione è <u>strettamente monotona</u> se per ogni x_1, x_2 appartenenti ad A è:
- Strettamente crescente: $x_1; x_2 \in A$: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Strettamente decrescente: $x_1; x_2 \in A$: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

FUNZIONE LINEARE

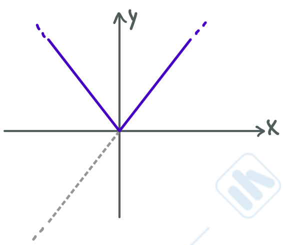
La sua equazione è: $y = mx + q$, dove m è il coefficiente angolare e q è il termine noto.
Una funzione di questo tipo è sempre una <u>retta</u> ed è una funzione sempre monotona. Se $m \neq 0$ è strettamente monotona, invece se $m=0$ la funzione è costante.



Se m è positivo, la funzione è strettamente crescente; se m è negativo la funzione è strettamente decrescente.

FUNZIONE VALORE ASSOLUTO

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



Il grafico della funzione $f(x) = |x|$ è il grafico di una retta con la parte di y negativa ribaltata nel quadrante positivo.

<u>Proprietà del valore assoluto:</u>
- $|x| \geq 0 \quad \forall x$
- $|x| = 0$ se $x = 0$
- $|-x| = |x| \quad \forall x$
- $|x_1 \cdot x_2| = |x_1| \cdot |x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in R$
- $\left|\frac{x_1}{x_2}\right| = \frac{|x_1|}{|x_2|} \quad \forall x_1, x_2 \in R - \{0\}$
- $|x| \leq r \rightarrow -r \leq x \leq r$
- DISUGUAGLIANZA TRIGONOMETRICA

$|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2| \rightarrow |x_1 + x_2| < |x_1| + |x_2|$ se segno $\neq$

$\downarrow$

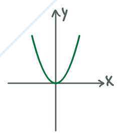
$|x_1 + x_2| = |x_1| + |x_2|$ se stesso segno

FUNZIONE POTENZA e RADICE ENNESIMA

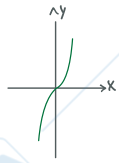
$f(x)=x^n$ funzione potenza

Le funzioni di questo tipo che sono strettamente crescenti in [0, +infinito) ma invece se n è dispari le funzioni sono strettamente crescenti su tutto R.

$f(x) = x^2$
strettamente decrescente in (+inf, 0]
strettamente crescente in [0, -inf)



$f(x) = x^3$
strettamente crescente su tutto R



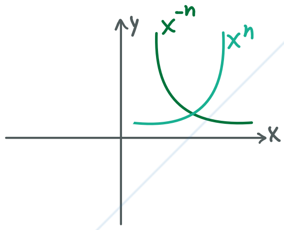
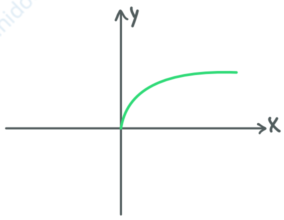


grafico di una funzione esponenziale

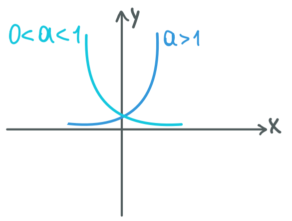
Essendo strettamente monotona è anche invertibile, la sua inversa è la:

$f(x)=\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ funzione radice ennesima



FUNZIONE ESPONENZIALE e LOGARITMO

$f(x)=a^x$ funzione esponenziale

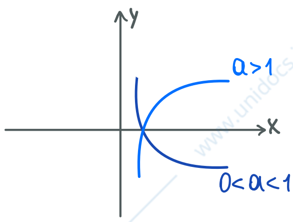


Definita da R a (0, +inf)
Se a>1 è strettamente crescente
Se 0<a<1 è strettamente decrescente
Se a = 1 è costante
In entrambi i casi la funzione è invertibile.

La funzione inversa di una funzione esponenziale è la:

$f(x)=\log_a x \rightarrow a^{f(x)}=x$ funzione logaritmo

Definita da (0, +inf) ad R
Se la base a>1 è strettamente crescente
Se la base a<1 è strettamente decrescente
La base è sempre diversa da 1



Proprietà del logaritmo:

- $\log_a b = c \quad a^c = b$
- $\log_a m + \log_a n = \log_a (m \cdot n)$
- $\log_a m - \log_a n = \log_a (m/n)$
- $\log_a m^n = n \log_a m$
- $\log_b (x) = \dfrac{\log_a (x)}{\log_a (b)}$

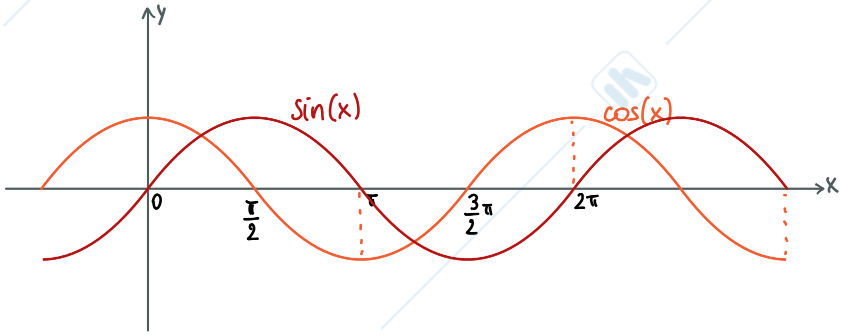
Proprietà delle potenze

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $a^{-x} = 1/a^x$
- $a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n}$

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

angoli	seno	coseno	tan
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\nexists$
π	0	-1	0
2π	0	1	0

Il sin(x) e il cos(x) rappresentano rispettivamente l'ordinata e l'ascissa di un punto x che giace sulla circonferenza goniometria di raggio 1.
Il dominio di queste funzioni è R mentre il codominio della funzione seno è -1<sinx<1 e quello della funzione coseno è -1<cosx<1. Sono delle funzioni periodiche e non monotone.



Teorema: $sen^2(x) + cos^2(x) = 1$

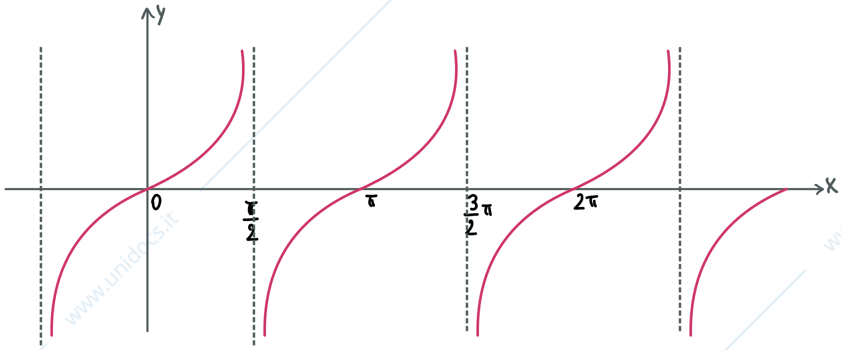
Formule di addizione:
- $sen(x_1 \pm x_2) = senx_1 cosx_2 \pm senx_2 cosx_1$
- $cos(x_1 \pm x_2) = senx_1 senx_2 \pm cosx_1 cosx_2$

Formule di sdoppiamento:
- $sen2x = 2senx cosx$
- $cos2x = cos^2x - sen^2x$

Tangente

$$tg(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$$

È definita se cos(x)≠0 cioè x≠ π/2+kπ. Il grafico della funzione tangente è periodico e ogni kπ presenta un asintoto verticale.



Il coseno negli intervalli:
- (0, π/2) è strettamente decrescente
- (π/2, π) è strettamente decrescente
- (π, 3/2π) è strettamente crescente
- (3/2π, 2π) è strettamente crescente

Il seno negli intervalli:
- (0, π/2) è strettamente crescente
- (π/2, π) è strettamente decrescente
- (π, 3/2π) è strettamente decrescente
- (3/2π, 2π) è strettamente crescente

La tangente considerata solo da (-π/2, π/2) è strettamente crescente

LIMITI DI SUCCESSIONI

Una **successione** è una funzione definita su una sequenza di infiniti numeri naturali ai quali vengono associati dei numeri reali.
Una successione si indica con

LIMITE DI UNA SUCCESSIONE

$a \in \mathbb{R}$ É IL LIMITE DELLA SUCCESSIONE $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a_n : $\lim_{n \to +\infty} a_n = a$

a_n TENDE/CONVERGE AD a : $a_n \to a$

SUCCESSIONE CONVERGENTE (converge ad un numero a)

Più n è grande, più la successione a_n si avvicina ad a. In simboli:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists r \in \mathbb{N} : \forall n > r \ \underbrace{|a_n - a| < \varepsilon}_{= a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon}$$

SUCCESSIONE DIVERGENTE (diverge a ±infinito)

ce ne sono di due tipi:

1) più n cresce, più a_n cresce

$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists r \in \mathbb{N} : \forall n > r \quad a_n > M$ => situazione: $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$

esempio: $a_n = n \to +\infty$

2) più n decresce, più a_n decresce

$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists r \in \mathbb{N} : \forall n > r \quad a_n < M$ => situazione: $\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$

esempio: $a_n = -n \to -\infty$

SUCCESSIONI LIMITATE

Una successione è limitata se $\exists M > 0 : |a_n| \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$

(praticamente una successione è limitata se sta sempre in un intervallo [-M; M] per ogni n poichè $|a_n| \leq M \Rightarrow -M \leq a_n \leq M$).

esempio: $a_n = (-1)^n$ se n pari $a_n = 1$
se n dispari $a_n = -1$

↳ è limitata ma non convergente

Operazioni coi limiti

limite della somma se $a_n \to a$, $b_n \to b$ allora $a_n + b_n \to a + b$

limite del prodotto se $a_n \to a$, $b_n \to b$ allora $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$

limite del quoziente se $a_n \to a$, $b_n \to b$ allora $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$

Operazioni coi limiti per successioni divergenti

$a_n \to a$, $b_n \to \pm\infty$

limite della somma $a_n + b_n \to \pm\infty$

limite del prodotto $a_n \cdot b_n \to \pm\infty$ se $a \neq 0$

limite del quoziente $\frac{a_n}{b_n} \to 0$; $\frac{b_n}{a_n} \to \pm\infty$ $\left(\frac{\ell}{\infty} = 0 ; \frac{\ell}{0} = \infty \right)$

$a_n \to a$, $b_n \to 0$ $\quad \frac{a_n}{b_n} \to \pm\infty$ se $b_n \neq 0$

$a_n \to \pm\infty$, $b_n \to \pm\infty$

limite della somma $a_n + b_n \to \pm\infty$

limite del prodotto $a_n \cdot b_n \to \pm\infty$

FORME INDETERMINATE

$[+\infty - \infty]$; $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ e $[0 \cdot \infty]$; $\left[\frac{0}{0}\right]$ e $[0^0]$; $[\infty]^0$; 1^∞

raccolgo grado max

scompongo e semplifico

$(a_n)^x = e^{\log(a_n) \cdot x}$

LIMITI NOTEVOLI

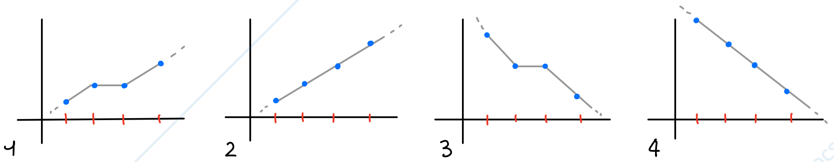
- $\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & a>1 \\ 1 & a=1 \\ 0 & a<1 \end{cases}$

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \begin{cases} 0 & a=0 \\ 1 & a>1 \end{cases}$ poiché $\lim a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{\infty}} = a^0 = 1$ ($=$ se $\sqrt[n]{a^b}$)

- $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$ • $\lim_{n\to\infty} \log(n) = +\infty$; $\lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{1}{n}\right) = -\infty$

se $a_n \to 0$:
- $\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(a_n) = 0$ • $\lim_{n\to 0} \frac{\operatorname{sen}(a_n)}{a_n} = 1$
- $\lim_{n\to\infty} \cos(a_n) = 1$ • $\lim_{n\to 0} \frac{1-\cos(a_n)}{(a_n)} = 0$; • $\lim_{n\to 0} \frac{1-\cos(a_n)}{(a_n)^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg}(a_n)}{a_n} = 1$

Successioni monotone
$a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \to +\infty$
1. a_n è crescente se $a_n \le a_{n+1}$
2. a_n è strettamente crescente se $a_n < a_{n+1}$
3. a_n è decrescente se $a_n \ge a_{n+1}$
4. a_n è strettamente decrescente se $a_n > a_{n+1}$



<u>Teorema delle successioni monotone</u>
- se una successione è crescente e limitata allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup\{a_n : n\in\mathbb{N}\}$
- se una successione è decrescente e limitata allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = \inf\{a_n : n\in\mathbb{N}\}$
- se una successione è crescente e illimitata allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$
- se una successione è decrescente e illimitata allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$

NUMERO DI NEPERO (e)
Presa una successione:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Questa è strettamente crescente e limitata, in particolare $2 \le a_n < 3 \quad \forall n\in\mathbb{N}$
Dal teorema delle successioni monotone si deduce che

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \to \text{NUMERO DI NEPERO } (e = 2{,}7\ldots)$$

<u>Teorema</u>
- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \to \pm\infty$ allora $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$
- $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $b_n \to a$ allora $\lim_{n\to\infty} (1+b_n)^{1/b_n} = e$

CRITERIO DI RAPPORTO

a_n è una successione di termini positivi

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

se $b_n \to b$ e $b<1$ allora $a_n \to 0$

Applicando il criterio del rapporto alle seguenti successioni; allora:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n)}{n^b} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^b}{a^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^m} = 0$$

Si parla di infiniti di ordine crescente, i rapporti risultano zero perché i denominatori posti nell'ordine presentato tendono a infinito più velocemente di quello che li precede, cioè:

$\log(n) \ll n^b \ll a^n \ll n! \ll n^m$ GERARCHIA DEGLI INFINITI