INTEGRAZIONE PER PARTI

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx$$

ESEMPIO 1

$$\int \underbrace{x}_{f}\,\underbrace{\cos x}_{g'}\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x$$

$f = x \qquad f' = 1$

$g' = \cos x \qquad g = \sin x$

ESEMPIO 2

$$\int \underbrace{x}_{f}\,\underbrace{e^x}_{g'}\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + c$$

$f = x \qquad f' = 1$

$g' = e^x \qquad g = e^x$

ESEMPIO 3

$$\int \underbrace{x^2}_{f}\,\underbrace{e^x}_{g'}\,dx = x^2 e^x - \int 2xe^x\,dx = x^2e^x - 2\boxed{\int xe^x\,dx} = x^2e^x - 2\left(xe^x - e^x\right) + c$$

vedi esempio 2

$f = x^2 \qquad f' = 2x$

$g' = e^x \qquad g = e^x$

ESEMPIO 3

$$\int \underbrace{x^2}_{f}\underbrace{e^x}_{g'}dx = x^2 \cdot e^x - \int 2xe^x dx = x^2e^x - 2\boxed{\int xe^x dx} = x^2e^x - 2(xe^x - e^x) + c$$

vedi esempio 2

$f = x^2 \qquad f' = 2x$

$g' = e^x \qquad g = e^x$

$$\int x^\alpha e^x dx \qquad \int x^\alpha \cos x\, dx \qquad \int x^\alpha \sin x\, dx \qquad \alpha \in \mathbb{N}$$

ESEMPIO 4

$$\int (x^4 + 3x^2 - 6)e^x dx = \int x^4 e^x dx + \int 3x^2 e^x dx + \int (-6)e^x dx = \underbrace{\int x^4 e^x dx}_{\text{PARTI}} + 3\underbrace{\int x^2 e^x dx}_{\text{PARTI}} - 6\underbrace{\int e^x dx}_{\text{IMMEDIATO}}$$

$$\int p(x)\, e^x dx \qquad \int p(x) \cos x\, dx \qquad \int p(x) \sin x\, dx$$

ESEMPIO 5

$$\int \underbrace{x}_{g'}\underbrace{\ln x}_{f}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^{\cancel{2}}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2 + c = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + c$$

$f = \ln x \qquad f' = \frac{1}{x}$

$g' = x \qquad g = \frac{x^2}{2}$

INTEGRAZIONE PER PARTI: MOLTIPLICAZIONE PER 1 E INTEGRALI "CICLICI"

ESEMPIO 1

$$\int \ln x\,dx = \int \underbrace{\ln x}_{f}\cdot \underbrace{1}_{g'}\,dx = x\ln x - \int \frac{1}{\cancel{x}}\cdot\cancel{x}\,dx = x\ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c$$

$f = \ln x \quad f' = \frac{1}{x}$

$g' = 1 \quad g = x$

ESEMPIO 2

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = \int \underbrace{\operatorname{arctg} x}_{f}\cdot \underbrace{1}_{g'}\,dx = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + c$$

$f = \operatorname{arctg} x \quad f' = \frac{1}{1+x^2}$

$g' = 1 \quad g = x$

ESEMPIO 3

$$\int x\,dx = \int \underbrace{x}_{f}\cdot \underbrace{1}_{g'}\,dx = x^2 - \int x\,dx$$

$f = x \quad f' = 1$

$g' = 1 \quad g = x$

$$2\int x\,dx = x^2$$

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$$

ESEMPIO

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \underbrace{\cos x}_{f} \cdot \underbrace{\cos x}_{g'}\,dx$$

$f = \cos x$ $\quad f' = -\sin x$

$g' = \cos x$ $\quad g = \sin x$

$$= \sin x\cos x - \int(-\sin x)\sin x\,dx$$

$$= \sin x\cos x + \int \sin^2 x\,dx$$

$$= \sin x\cos x + \int(1-\cos^2 x)\,dx$$

$$= \sin x\cos x + x - \int \cos^2 x\,dx$$

$$\int \cos^2 x\,dx + \int \cos^2 x\,dx = \sin x\cos x + x$$

$$2\int \cos^2 x\,dx = \sin x\cos x + x$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}(\sin x\cos x + x) + c$$

ESEMPIO 5

$$\int \underbrace{e^x}_{f} \underbrace{\sin x}_{g'}\,dx = -\cos x\, e^x - \int \underbrace{(-\cos x)}_{g'} \underbrace{e^x}_{f}\,dx$$

$f = e^x$ $\quad f' = e^x$

$g' = \sin x$ $\quad g = -\cos x$

$$= -\cos x\, e^x - \left[-\sin x\, e^x - \int(-\sin x\, e^x)\,dx\right]$$

$f = e^x$ $\quad f' = e^x$

$g' = -\cos x$ $\quad g = -\sin x$

$$= -\cos x\, e^x + \sin x\, e^x - \int \sin x\, e^x\,dx$$

$$\int e^x \sin x\,dx + \int e^x \sin x\,dx = e^x(\sin x - \cos x)$$

$$\int e^x \sin x\,dx = \frac{1}{2} e^x(\sin x - \cos x) + c$$

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

ESEMPIO 1

$$\int \sin(e^x)\, e^x\, dx = \int \sin y \, dy = -\cos y + c = -\cos(e^x) + c$$

Derivata di quello che ho chiamato y

$y = e^x$
$dy = e^x\,dx$

⟶ sostituzione
⟶

$y = g(x)$
$dy = g'(x)\,dx$
$a \longrightarrow g(a)$
$b \longrightarrow g(b)$

ESEMPIO 2

$$\int \cos x \cdot \sin(\sin x)\,dx = \int \sin y\, dy = -\cos y + c = -\cos(\sin x) + c$$

$y = \sin x$
$dy = \cos x\, dx$

ESEMPIO 3

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \int \frac{e^x\,dx}{1+(e^x)^2} = \int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \operatorname{arctg} y + c = \operatorname{arctg}(e^x) + c$$

$y = e^x$
$dy = e^x\,dx$

ESEMPIO 4

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos(x^2)\,dx = \int_0^{\pi} \cos y \,\frac{dy}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos y\,dy = \frac{1}{2}\left[\sin x\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}(\sin\pi - \sin 0) = 0$$

$y = x^2$

$dy = 2x\,dx$

$0 \to 0^2 = 0$

$\sqrt{\pi} \to (\sqrt{\pi})^2 = \pi$

Sostituisco I vecchi estremi [0 e sqrt(pi)] in y=x^2 e trovo i nuovi estremi.

ESEMPIO 5

$$\int \frac{1}{x(\ln x+1)}\,dx = \int \frac{1}{\ln x+1}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \int \frac{1}{y}\,dy = \ln|y| + c = \ln|\ln x+1| + c$$

$y = \ln x + 1$

$dy = \frac{1}{x}\,dx$

ESEMPIO 6

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\sin^2 y}\cdot\cos y\,dy = \int \cos y\cdot\cos y\,dy = \int \cos^2 y\,dy$$

PARTI

$\cos(2y) = \dots$

$x = \sin y$

$dx = \cos y\,dy$

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE (PARTE 2)

→ meglio ricavare dx o dy ??
→ alcuni esempi più complicati

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$$

PRIMA POSSIBILITÀ: $y=e^x$, $dy=e^x dx$

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{dy}{y^2+1} = \operatorname{arctg}(y)+c = \operatorname{arctg}(e^x)+c$$

ALTERNATIVA EQUIVALENTE: $y=e^x$, $x=\ln y$, $dx=\frac{1}{y}dy$

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{\cancel{y}}{y^2+1}\cdot\frac{1}{\cancel{y}}dy = \int\frac{dy}{y^2+1} = \dots = \operatorname{arctg}(e^x)+c$$

QUALE METODO USARE ?? ⇒ QUANDO NON CI SONO PROBLEMI A TROVARE dy NELL'INTEGRALE CONVIENE IL PRIMO; SE INVECE dy E' NASCOSTO BENE MEGLIO USARE IL SECONDO

↪ CMQ è QUESTIONE DI GUSTI

ESEMPIO 1

$$\int \sin^4 x\cos^3 x\,dx = \int \sin^4 x\,\underbrace{\cos^2 x}_{=1-\sin^2 x}\cdot\cos x\,dx = \int dy\; y^4(1-y^2) = \int (y^4-y^6)dy = \int y^4 dy - \int y^6 dy$$

$y=\sin x$
$dy=\cos x\,dx$

$$= \frac{y^5}{5}-\frac{y^7}{7}+c = \frac{\sin^5 x}{5}-\frac{\sin^7 x}{7}+c$$

ESEMPIO 2

$$\int \frac{x-1}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{y^2-1}{1+y}\cdot 2y\,dy = \int \frac{(y+1)(y-1)}{y+1}2y\,dy = \int 2y^2dy - \int 2y\,dy$$

$y=\sqrt{x}$ → $x=y^2$
$dy=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ $dx=2y\,dy$

$$= \frac{2}{3}y^3-y^2+c = \frac{2}{3}(\sqrt{x})^3-x+c$$

DOVE GIRANO RADICI, CONVIENE INVERTIRE LA SOSTITUZIONE E TROVARE dx = ...

⇒ SCORCIATOIA

$$\int\frac{x-1}{1+\sqrt{x}}dx = \int\frac{(\sqrt{x}-1)\cancel{(\sqrt{x}+1)}}{\cancel{1+\sqrt{x}}}dx = \int(\sqrt{x}-1)dx = \int\sqrt{x}\,dx-\int dx = \frac{2}{3}(\sqrt{x})^3-x+c$$

ESEMPIO 3

$$\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx = \int 2dy\,(y^2+1) = 2\int y^2 dy + 2\int dy = \frac{2}{3}y^3 + 2y + c$$

$y = \sqrt{x-1}$

$dy = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\,dx$

$y^2 = x-1$

$x = y^2+1$

$$= \frac{2}{3}(\sqrt{x-1})^3 + 2\sqrt{x-1} + c$$

$$= 2\sqrt{x-1}\left[\frac{(x-1)}{3} + 1\right] + c$$

$$= 2\sqrt{x-1}\,\frac{x+2}{3} + c$$

LIKE !! ☺

INTEGRAZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI : INTRODUZIONE E PRIMI ESEMPI

o nota 05/01/2014

$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ CON $P(x)$ E $Q(x)$ POLINOMI ($Q(x) \neq$ POLINOMIO NULLO)

→ FUNZIONI RAZIONALI IN CUI IL POLINOMIO AL NUMERATORE E' LA DERIVATA DEL DENOMINATORE

BASTA RICORDARE CHE $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$ E SI VINCE SUBITO ☺

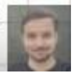
ESEMPIO 1 $\int \frac{2x}{x^2-5}\,dx = \ln|x^2-5| + c$

ESEMPIO 2 $\int \frac{x^3}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{4}\ln(x^4+1) + c$

→ FUNZIONI RAZIONALI AVENTI PER NUMERATORE UNA COSTANTE E DENOMINATORE DI I° GRADO

STESSA STRATEGIA RISOLUTIVA DEL CASO PRECEDENTE

ESEMPIO 3 $\int \frac{3}{2x-1}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2}{2x-1}\,dx = \frac{3}{2}\ln|2x-1| + c \implies \int \frac{K}{ax+b}\,dx = \frac{K}{a}\ln|ax+b| + c$



→ FUNZIONI RAZIONALI AVENTI PER NUMERATORE UNA COSTANTE E PER DENOMINATORE UN QUADRATO

BASTA RICORDARE CHE $\frac{1}{[f(x)]^2} = [f(x)]^{-2}$ E CHE $\int f'(x)\,[f(x)]^m dx = \frac{[f(x)]^{m+1}}{m+1}$

ESEMPIO 4 $\int \frac{5}{(2x-1)^2}\,dx = \frac{5}{2}\int 2(2x-1)^{-2}dx = \frac{5}{2}\frac{(2x-1)^{-1}}{-1} + c = -\frac{5}{4x-2} + c$

→ FUNZIONI RAZIONALI DEL TIPO $\frac{dx+e}{ax^2+bx+c}$ CON $\overbrace{b^2-4ac}^{\Delta} < 0$

BISOGNA RICONDURSI, FACENDO I DOVUTI RIMANEGGIAMENTI, AD INTEGRALI DEL TIPO

$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\,dx = \operatorname{arctg}[f(x)] + c$ E $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$

ESEMPIO 5 $\int \frac{3x+1}{x^2+1}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{3}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg}(x) + c$

ESEMPIO 6 $\int \frac{18x \overset{+6-3}{+3}}{9x^2+6x+2}dx = \underbrace{\int \frac{18x+6}{9x^2+6x+2}dx} - \underbrace{\int \frac{3}{1+(3x+1)^2}dx} = \underbrace{\ln|9x^2+6x+2|} - \underbrace{\arctan(3x+1)} + c$

$(9x^2+6x+2)' = 18x+6$

$9x^2+6x+2 = 9x^2+6x+1+1 = (3x+1)^2+1$

$(3x)^2 \quad 2\cdot 3x \cdot 1 \quad 1^2$

INTEGRAZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI

$$y = \frac{n(x)}{d(x)}$$

1. DIVISIONE TRA NUMERATORE E DENOMINATORE ⟿ se grd $d(x) >$ grd $n(x)$ salto questo passaggio
2. FATTORIZZARE IL DENOMINATORE, ovvero scomporre il denominatore in un prodotto di fattori di primo grado e/o di secondo grado non ulteriormente scomponibili
3. DECOMPORRE LA FRAZIONE IN FRATTI SEMPLICI
4. INTEGRAZIONE DEI VARI PEZZETTINI :)

ESEMPIO 1

$$\int \frac{x^3-3x-1}{x^2-x-2}\,dx$$

①
$$\begin{array}{r|l} x^3-3x-1 & x^2-x-2 \\ \cline{2-2} -x^3+x^2+2x & x+1 \\ \cline{1-1} // +x^2-x-1 & \\ -x^2+x+2 & \\ \cline{1-1} // \; // \; 1 & \end{array}$$

$$\frac{x^3-3x-1}{x^2-x-2} = x+1+\frac{1}{x^2-x-2}$$

② $x^2-x-2 = (x-2)(x+1)$

③ $$\frac{1}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} = \frac{Ax+A+Bx-2B}{(x-2)(x+1)} = \frac{(A+B)x+A-2B}{(x-2)(x+1)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-2B=1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} A=-B \\ -B-2B=1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} A=\frac{1}{3} \\ B=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\frac{1}{(x-2)(x+1)} = \frac{1}{3}\frac{1}{x-2} - \frac{1}{3}\frac{1}{x+1}$$

④ $$\int \frac{x^3-3x-1}{x^2-x-2}\,dx = \int \left[x+1+\frac{1}{3}\frac{1}{x-2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}\right]dx$$
$$= \int x\,dx + \int dx + \frac{1}{3}\int\frac{1}{x-2}\,dx - \frac{1}{3}\int\frac{1}{x+1}\,dx$$
$$= \frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{3}\ln|x-2| - \frac{1}{3}\ln|x+1| + c = \frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+c$$

ESEMPIO 2

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$$

① non serve

② $x^2-1 = (x-1)(x+1)$

③ $$\frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{Ax-A+Bx+B}{(x+1)(x-1)} = \frac{(A+B)x+B-A}{(x-1)(x+1)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ B-A=1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} A=-B \\ B+B=1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{2} \\ B=\frac{1}{2} \end{cases}$$

④ $\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \int \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1}\right]dx = -\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}\,dx$

$= -\frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + c$

$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c$

INTEGRAZIONE DELLE FUNZIONI RAZIONALI - SECONDA PARTE

ESEMPIO 1

$\int \frac{1}{x^3+x}\,dx$

① non serve

② $x^3+x = x(x^2+1)$

③ $\frac{1}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+c}{x^2+1} = \frac{Ax^2+A+Bx^2+cx}{x(x^2+1)} = \frac{(A+B)x^2+cx+A}{x(x^2+1)}$

$\begin{cases} A+B=0 \\ c=0 \\ A=1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ c=0 \end{cases}$

④ $\int\frac{1}{x^3+x}\,dx = \int\frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}\,dx$

$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + c = \ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| + c$

ESEMPIO 2

$\int \frac{x+1}{x^3-2x^2+x}\,dx$

① non serve

② $x^3-2x^2+x = x(x^2-2x+1) = x(x-1)^2$

③ $\frac{x+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx}{x(x-1)^2} = \frac{(A+B)x^2+(C-2A-B)x+A}{x(x-1)^2}$

$\begin{cases} A+B=0 \\ C-2A-B=1 \\ A=1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=2 \end{cases}$

④ $\int\frac{x+1}{x(x-1)^2}\,dx = \int\frac{1}{x}\,dx - \int\frac{1}{x-1}\,dx + 2\int\frac{1}{(x-1)^2}\,dx$

$= \ln|x| - \ln|x-1| + 2\,\frac{(x-1)^{-1}}{-1} + c$

$= \ln\left|\frac{x}{x-1}\right| - \frac{2}{x-1} + c$

INTEGRALI: ESERCIZI SVOLTI :)

$$\int \left(2-\frac{x}{2}-\frac{2}{x}\right)dx \qquad \int \frac{\ln x}{x^2}\,dx \qquad \int_{-b}^{b} |x-a|\,dx \quad \text{con } 0<a<b \qquad \int \frac{e^x}{e^{2x}-3e^x+2}\,dx$$

ESERCIZIO 1

$$\int \left(2-\frac{x}{2}-\frac{2}{x}\right)dx = \int 2\,dx - \int \frac{x}{2}\,dx - \int \frac{2}{x}\,dx$$

$$= 2\int dx - \frac{1}{2}\int x\,dx - 2\int \frac{1}{x}\,dx$$

$$= 2x - \frac{1}{4}x^2 - 2\ln|x| + c$$

ESERCIZIO 2

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \int \underbrace{\ln x}_{f} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{g'}\,dx$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{x}}_{g}\underbrace{\ln x}_{f} - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'}\underbrace{\left(-\frac{1}{x}\right)}_{g}dx$$

$$= -\frac{1}{x}\ln x + \int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + c$$

$f = \ln x \qquad f' = \frac{1}{x}$

$g' = \frac{1}{x^2} \qquad g = -\frac{1}{x}$

ESERCIZIO 3

$$\int_{-b}^{b} |x-a|\,dx \quad \text{con } 0<a<b \quad = \int_{-b}^{a} (a-x)\,dx + \int_{a}^{b} (x-a)\,dx$$

$$= \left[ax - \frac{x^2}{2}\right]_{-b}^{a} + \left[\frac{x^2}{2} - ax\right]_{a}^{b}$$

$$= a^2 - \cancel{\frac{a^2}{2}} + \cancel{ab} + \frac{b^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \cancel{ab} - \cancel{\frac{a^2}{2}} + \cancel{a^2}$$

$$= a^2 + b^2$$

$$|x-a| = \begin{cases} x-a & x \geq a \\ a-x & x<a \end{cases}$$

ESERCIZIO 4

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}-3e^x+2}\,dx = \int \frac{dy}{y^2-3y+2} = \int \frac{1}{y-2}\,dy - \int \frac{1}{y-1}\,dy$$

CHIAMO $y=e^x$
$dy=e^x dx$

$$= \ln|y-2| - \ln|y-1| + c$$

$$= \ln|e^x-2| - \ln|e^x-1| + c$$

VINTO! :)

$$y^2-3y+2 = (y-2)(y-1)$$

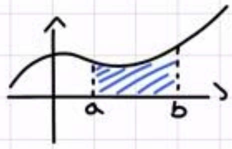
$$\frac{1}{y^2-3y+2} = \frac{A}{y-2} + \frac{B}{y-1} = \frac{(A+B)y-A-2B}{(y-2)(y-1)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A-2B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}$$

INTEGRALI IMPROPRI : INTRODUZIONE

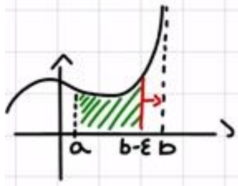
Titolo nota 10/05/2015

NEGLI INTEGRALI PROPRI
- LA ZONA DI INTEGRAZIONE E' LIMITATA
- LA FUNZIONE INTEGRANDA E' LIMITATA



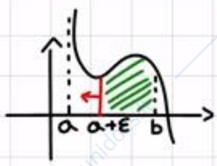
SE LA FUNZIONE INTEGRANDA O LA ZONA DI INTEGRAZIONE (O EVENTUALMENTE ENTRAMBE) NON SONO LIMITATE SI PARLA DI INTEGRALE IMPROPRIO O GENERALIZZATO

INTEGRAZIONE DI FUNZIONI ILLIMITATE



SIA $f(x):[a,b)\to\mathbb{R}$ CONTINUA E ILLIMITATA A SINISTRA DI b (OVVERO $\lim_{x\to b^-} f(x)=\pm\infty$)

IN QUESTO CASO SI DEFINISCE $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \boxed{\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx}$ INTEGRALE PROPRIO, SI PROCEDE COME AL SOLITO (IMMEDIATI, PARTI ...)

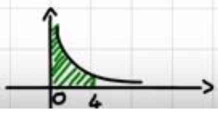


SIA $f(x):(a,b]\to\mathbb{R}$ CONTINUA E ILLIMITATA A DESTRA DI a (OVVERO $\lim_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$)

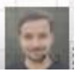
IN QUESTO CASO SI DEFINISCE $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \boxed{\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx}$ INTEGRALE PROPRIO, SI PROCEDE COME AL SOLITO (IMMEDIATI, PARTI ...)

IN ENTRAMBI I CASI:
- SE IL LIMITE ESISTE ED E' FINITO $f(x)$ SI DICE INTEGRABILE IN $[a,b]$ O CHE $\int_a^b f(x)\,dx$ CONVERGE
- SE IL LIMITE RISULTA $+\infty$ OPPURE $-\infty$ SI DICE CHE L'INTEGRALE IMPROPRIO DIVERGE (A $+\infty$ O $-\infty$)
- SE IL LIMITE NON ESISTE SI DICE CHE L'INTEGRALE IMPROPRIO NON ESISTE O E' INDETERMINATO

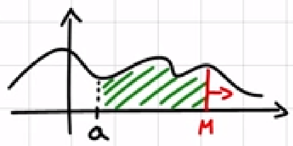
ESEMPIO 1 CALCOLARE $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{0+\varepsilon}^{4} \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\sqrt{x}\right]_\varepsilon^4 = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\sqrt{4} - \cancel{\sqrt{\varepsilon}}^{\,0}\right] = 2$



$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty$

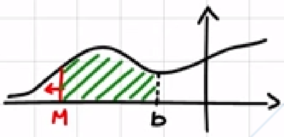


INTEGRALI CON ZONA D'INTEGRAZIONE ILLIMITATA



SIA $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ UNA FUNZIONE CONTINUA

IN QUESTO CASO SI DEFINISCE $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{M\to+\infty}\int_a^M f(x)dx$



SIA $f:(-\infty;b]\to\mathbb{R}$ UNA FUNZIONE CONTINUA

IN QUESTO CASO SI DEFINISCE $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{M\to-\infty}\int_M^b f(x)dx$

ESEMPIO 2: CALCOLARE $\int_4^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{M\to+\infty}\int_4^M \frac{1}{x^2}dx = \lim_{M\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_4^M = \lim_{M\to+\infty}\left[\cancel{-\frac{1}{M}}^{\,0}+\frac{1}{4}\right]=\frac{1}{4}$

INTEGRALI IMPROPRI ADVANCED: ESEMPI PIÚ ELABORATI

lo nota 01/06/2015

ESEMPIO 1: CALCOLARE $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}dx$

N.B.: Funzione integranda è d[-1/ln x] integrale immediato.

Volendo procedere per sostituzione:

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}dx = \lim_{M\to+\infty}\int_2^M\frac{1}{x\ln^2 x}dx = \lim_{M\to+\infty}\int_{\ln 2}^{\ln M}\frac{1}{y^2}dy = \lim_{M\to+\infty}\left[-\frac{1}{y}\right]_{\ln 2}^{\ln M} = \lim_{M\to+\infty}\left[-\frac{1}{\ln M}^{\,0}+\frac{1}{\ln 2}\right]=\frac{1}{\ln 2}$$

CHIAMO $y=\ln x$

DUNQUE $dy=\frac{1}{x}dx$

E $2\to\ln 2$

$M\to\ln M$

ESEMPIO 2: CALCOLARE $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ $\xrightarrow{\text{SCORCIATOIA}}$ $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx \overset{\text{ESSENDO } f(x) \text{ PARI}}{=} 2\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{3} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{3}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

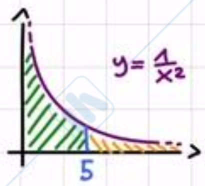
3 usato per estremo di integrazione, poteva essere qualunque altro

$$= \lim_{M\to-\infty} \int_{M}^{3} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \lim_{M\to+\infty} \int_{3}^{M} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \lim_{M\to-\infty} \left[\operatorname{arctg} x\right]_{M}^{3} + \lim_{M\to+\infty} \left[\operatorname{arctg} x\right]_{3}^{M}$$

$$= \lim_{M\to-\infty} \left[\operatorname{arctg}(3) - \underbrace{\operatorname{arctg}(M)}_{-\frac{\pi}{2}}\right] + \lim_{M\to+\infty} \left[\underbrace{\operatorname{arctg}(M)}_{\frac{\pi}{2}} - \operatorname{arctg}(3)\right] = \pi$$

ESEMPIO 3: CALCOLARE $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$



$$\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{0}^{5} \frac{1}{x^2}\,dx + \int_{5}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0^+} \int_{0+\varepsilon}^{5} \frac{1}{x^2}\,dx + \lim_{M\to+\infty} \int_{5}^{M} \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0^+} \left[-\frac{1}{x}\right]_{\varepsilon}^{5} + \lim_{M\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_{5}^{M} = \underbrace{\lim_{\varepsilon\to0^+} \left[-\frac{1}{5} + \overset{+\infty}{\frac{1}{\varepsilon}}\right]}_{+\infty} + \underbrace{\lim_{M\to+\infty} \left[-\overset{0}{\frac{1}{M}} + \frac{1}{5}\right]}_{\frac{1}{5}} = +\infty$$

SE L'INTEGRALE IMPROPRIO PRESENTA PIÙ DI UN PROBLEMA PER RISOLVERLO BASTA:

1. SPEZZARLO NELLA SOMMA DI PIÙ INTEGRALI IMPROPRI AVENTI UN SINGOLO PROBLEMA
2. RISOLVERLI
3. DEDURRE IL COMPORTAMENTO DI QUELLO GLOBALE SOMMANDO I RISULTATI DEI VARI PEZZI

NB: SE ALMENO UN PEZZO DIVERGE A $+\infty$ E ALMENO UN PEZZO DIVERGE A $-\infty$ ALLORA L'INTEGRALE DI PARTENZA SI DICHIARA INDETERMINATO