Lezione 2

Alessandro Ardizzoni

Introduciamo le principali operazioni sugli insiemi.
Si dice unione di A e B l'insieme

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \ \vee \ x \in B\}.$$

Si dice intersezione di A e B l'insieme

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\}.$$

Si dice differenza di A e B l'insieme

$$A \setminus B = A - B = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

Vediamo con un esempio come rappresentare queste operazioni attraverso i diagrammi di Eulero-Venn.

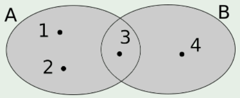
Esempio

Se $A=\{1,2,3\}$ e $B=\{3,4\}$, allora

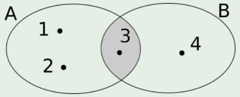
$$A\cup B=\{1,2,3,4\},\quad A\cap B=\{3\},\quad A\setminus B=\{1,2\},\quad B\setminus A=\{4\}.$$

Rappresentiamo queste operazioni tramite i diagrammi di Eulero-Venn.

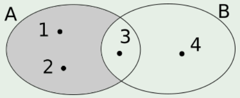
$A\cup B=\{1,2,3,4\}$



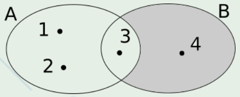
$A\cap B=\{3\}$



$A\setminus B=\{1,2\}$



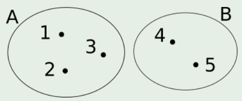
$B\setminus A=\{4\}$



Due insiemi A e B si dicono disgiunti se $A \cap B = \emptyset$.

Esempio

Se $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{4,5\}$, allora A e B sono disgiunti.



Esercizio (1)

Se A e B sono insiemi, verificare che $A \subseteq A \cup B$ e $B \subseteq A \cup B$.

SOLUZIONE: Se $x \in A$ si ha in particolare $x \in A \vee x \in B$ cioé $x \in A \cup B$. Questo dimostra che $A \subseteq A \cup B$. Similmente si dimostra che $B \subseteq A \cup B$.

Esercizio (2)

Se A e B sono insiemi, verificare che $A \cap B \subseteq A$ e $A \cap B \subseteq B$.

SOLUZIONE: Se $x \in A \cap B$ allora $x \in A \wedge x \in B$. In particolare $x \in A$. Questo dimostra che $A \cap B \subseteq A$. Similmente si dimostra che $A \cap B \subseteq B$.

Esercizio

Se A e B sono insiemi, verificare che $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$.

Soluzione

Sappiamo che la doppia implicazione $\Leftrightarrow$ si può spezzare nelle due implicazioni $\Rightarrow$ e $\Leftarrow$.
($\Rightarrow$). Vediamo prima che $A \cup B = A \Rightarrow B \subseteq A$:

$$B \overset{\text{Esercizio (1)}}{\subseteq} A \cup B \overset{\text{ipotesi}}{=} A.$$

($\Leftarrow$). Viceversa, dimostriamo $B \subseteq A \Rightarrow A \cup B = A$. Dobbiamo dimostrare che $A \cup B = A$. Per la doppia inclusione, ciò equivale a dimostrare $A \cup B \supseteq A$ e $A \cup B \subseteq A$. La prima segue da Esercizio (1). Per la seconda:

$$x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \vee x \in B \overset{B \subseteq A}{\Rightarrow} x \in A.$$

Esercizio

Se A e B sono insiemi, verificare che $A \cup B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset \wedge B = \emptyset$.

Soluzione

Spezziamo $\Leftrightarrow$ nelle due implicazioni $\Rightarrow$ e $\Leftarrow$.
($\Rightarrow$). Dimostriamo $A \cup B = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset \wedge B = \emptyset$ cioé, per contrapposizione

$$\neg(A = \emptyset \wedge B = \emptyset) \Rightarrow \neg(A \cup B = \emptyset). \qquad (*)$$

Per la legge di De Morgan, $\neg(A = \emptyset \wedge B = \emptyset) \Leftrightarrow \neg(A = \emptyset) \vee \neg(B = \emptyset)$.
Pertanto, l'implicazione $(*)$ diventa $A \neq \emptyset \vee B \neq \emptyset \Rightarrow A \cup B \neq \emptyset$. Ora

$$A \neq \emptyset \Rightarrow \exists a \in A \overset{A \subseteq A \cup B}{\Rightarrow} \exists a \in A \cup B \Rightarrow A \cup B \neq \emptyset.$$

Similmente anche $B \neq \emptyset \Rightarrow A \cup B \neq \emptyset$.
($\Leftarrow$). Dimostriamo ora l'implicazione $A = \emptyset \wedge B = \emptyset \Rightarrow A \cup B = \emptyset$. Per contrapposizione, basta dimostrare che $A \cup B \neq \emptyset \Rightarrow A \neq \emptyset \vee B \neq \emptyset$. Ma

$$A \cup B \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow A \neq \emptyset \vee B \neq \emptyset.$$

Esercizio

Se A, B e C sono insiemi, verificare le seguenti proprietà.

1. $A \cap B = B \cap A$. *(Proprietà commutativa di $\cap$)*
2. $A \cup B = B \cup A$. *(Proprietà commutativa di $\cup$)*
3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. *(Proprietà associativa di $\cap$)*
4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. *(Proprietà associativa di $\cup$)*
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. *(Proprietà distributiva di $\cap$ rispetto a $\cup$)*
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. *(Proprietà distributiva di $\cup$ rispetto a $\cap$)*
7. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. *(Legge di De Morgan)*
8. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. *(Legge di De Morgan)*
9. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.
10. $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

Diamo una soluzione solo ad alcuni dei punti di questo esercizio.

Dimostriamo la commutatività di $\cap$ usando la commutatività di $\wedge$:

$$x \in \boxed{A \cap B} \overset{\text{def.}\cap}{\Leftrightarrow} (x \in A) \wedge (x \in B) \overset{\text{com.}\wedge}{\Leftrightarrow} (x \in B) \wedge (x \in A) \overset{\text{def.}\cap}{\Leftrightarrow} x \in \boxed{B \cap A}.$$

Dimostriamo ora la proprietà distributiva di $\cup$ usando quella di $\vee$.

$$x \in \boxed{A \cup (B \cap C)} \overset{\text{def.}\cup}{\Leftrightarrow} (x \in A) \vee (x \in (B \cap C))$$

$$\overset{\text{def.}\cap}{\Leftrightarrow} (x \in A) \vee ((x \in B) \wedge (x \in C)) \overset{\text{dist.}\vee}{\Leftrightarrow} ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge ((x \in A) \vee (x \in C))$$

$$\overset{\text{def.}\cup}{\Leftrightarrow} (x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C) \overset{\text{def.}\cap}{\Leftrightarrow} x \in \boxed{(A \cup B) \cap (A \cup C)}.$$

In alternativa, possiamo dimostrare $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ contemplando tutti i casi possibili. Per la doppia inclusione, basta dimostrare $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e $A \cup (B \cap C) \supseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Dimostriamo ad esempio la prima delle due. Se $x \in A \cup (B \cap C)$ allora abbiamo due casi: $x \in A$ oppure $x \in B \cap C$. Nel primo caso

$$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \ \wedge \ x \in A \cup C \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Nel secondo caso:

$$x \in B \cap C \Rightarrow x \in B \wedge x \in C \Rightarrow x \in A \cup B \ \wedge \ x \in A \cup C \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Dimostriamo ora la Legge di De Morgan per gli insiemi tramite la sua analoga nel calcolo proposizionale:

$$
\begin{aligned}
x \in \boxed{A \setminus (B \cup C)} &\overset{\text{def.}\setminus}{\Leftrightarrow} x \in A \wedge x \notin B \cup C \\
&\overset{\text{def.}\notin}{\Leftrightarrow} x \in A \wedge \neg(x \in B \cup C) \\
&\overset{\text{def.}\cup}{\Leftrightarrow} x \in A \wedge \neg(x \in B \vee x \in C) \\
&\overset{\text{De Morgan.}}{\Leftrightarrow} x \in A \wedge \neg(x \in B) \wedge \neg(x \in C) \\
&\overset{\text{def.}\notin}{\Leftrightarrow} x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \wedge x \in A \wedge x \notin C \\
&\overset{\text{def.}\setminus}{\Leftrightarrow} x \in A \setminus B \wedge x \in A \setminus C \\
&\overset{\text{def.}\cap}{\Leftrightarrow} x \in \boxed{(A \setminus B) \cap (A \setminus C)}.
\end{aligned}
$$

Esercizio

Se A e B sono insiemi, verificare che $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$ e stabilire se vale l'uguaglianza.

Soluzione

Dobbiamo dimostrare che $\forall S, (S \in P(A) \cup P(B) \Rightarrow S \in P(A \cup B))$. *Ora*

$$S \in P(A) \cup P(B) \Rightarrow (S \in P(A)) \vee (S \in P(B)) \Rightarrow (S \subseteq A) \vee (S \subseteq B)$$
$$\Rightarrow S \subseteq A \cup B \Rightarrow S \in P(A \cup B).$$

Vediamo che la disuguaglianza in generale è stretta. Per farlo, dobbiamo dare un controesempio. Si consideri il caso in cui $A = \{1\}$ *e* $B = \{2\}$. *Si osservi allora che* $\{1,2\} \in P(A \cup B)$ *ma* $\{1,2\} \notin P(A) \cup P(B)$.

Esercizio (per casa)

Se A e B sono insiemi, verificare che

- $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B) \Leftrightarrow (A \subseteq B) \vee (B \subseteq A)$;
- $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.

Intersezioni ed unioni arbitrarie

Consideriamo un insieme di insiemi $\mathscr{F}$ cioé un insieme i cui elementi siano a loro volta degli insiemi.
L'unione degli insiemi di $\mathscr{F}$ è l'insieme

$$\bigcup_{A\in\mathscr{F}} A := \{x \mid \exists A \in \mathscr{F}, x \in A\}.$$

In modo analogo l'intersezione degli insiemi di $\mathscr{F}$ è l'insieme

$$\bigcap_{A\in\mathscr{F}} A := \{x \mid \forall A \in \mathscr{F}, x \in A\}.$$

Esempio

Se A un insieme, qualunque $\mathscr{F} \subseteq P(A)$ è esempio di insieme di insiemi.

Esempio

Vediamo alcuni esempi in cui $\mathscr{F}$ è finito (cioè con un numero finito di elementi[a]).

$\mathscr{F}$	$\bigcup_{A\in\mathscr{F}} A$	$\bigcap_{A\in\mathscr{F}} A$
$\{A_1\}$	A_1	A_1
$\{A_1, A_2\}$	$A_1 \cup A_2$	$A_1 \cap A_2$
$\{A_1, A_2, A_3\}$	$A_1 \cup A_2 \cup A_3$	$A_1 \cap A_2 \cap A_3$

Possiamo scrivere $\{A_1, A_2, A_3\}$ in modo più compatto come $\{A_i \mid i \in \{1,2,3\}\}$.
Più in generale, se $\mathscr{F}$ è della forma $\mathscr{F} = \{A_i \mid i \in I\}$ dove I è un insieme di indici, allora useremo indistintamente le seguenti notazioni

$$\bigcup_{A\in\mathscr{F}} A = \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup\{A_i \mid i \in I\} \quad \text{e} \quad \bigcap_{A\in\mathscr{F}} A = \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap\{A_i \mid i \in I\}.$$

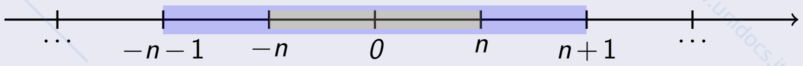
[a] Tratteremo questo concetto in modo più approfondito in seguito.

Esercizio

Sia $A_n := [-n, n] = \{r \in \mathbb{R} \mid -n \leq r \leq n\}$. *Individuare* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *e* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Soluzione

Disegnando questi intervalli sulla retta reale



sembra intuitivo che $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0\}$ *e* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}$. *Dimostriamolo.*

INTERSEZIONE. Notiamo che $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq A_0 = \{0\}$. *Viceversa,*

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \in A_n \Rightarrow 0 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \Rightarrow \{0\} \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

UNIONE. Sappiamo che per ogni $r \in \mathbb{R}$ *esiste* $t \in \mathbb{N}$ *tale che* $-t \leq r \leq t$ *(basta scegliere* $t \geq |r|$, *dove* $|r|$ *è il valore assoluto di* r*). Pertanto* $r \in A_t$ *per tale* t. *Quindi* $r \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *per ogni* $r \in \mathbb{R}$. *Dunque* $\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. *L'altra inclusione è sempre vera e quindi* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}$.

Esercizio (per casa)

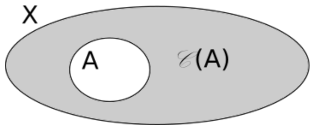
Sia $A_n := (-n, n) = \{r \in \mathbb{R} \mid -n < r < n\}$. *Individuare* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *e* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Esercizio (per casa)

Sia $A_n := (-\infty, n] = \{r \in \mathbb{R} \mid r \leq n\}$. *Individuare* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *e* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. *Individuare poi* $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} A_n$ *e* $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} A_n$.

Complementare.

Se A è un sottoinsieme di un insieme X definiamo il complementare (o complemento) di A in X come l'insieme $X \setminus A$. Lo indicheremo con il simbolo $\mathscr{C}_X(A)$.
Se X è chiaro dal contesto, scriveremo semplicemente $\mathscr{C}(A)$ oppure $\overline{A}$.



Le leggi di De Morgan ci dicono che, se A e B sono sottoinsiemi di X

$$\mathscr{C}(A \cup B) = \mathscr{C}(A) \cap \mathscr{C}(B) \qquad \mathscr{C}(A \cap B) = \mathscr{C}(A) \cup \mathscr{C}(B) \tag{1}$$

Una formula del tutto simile vale per intersezioni ed unioni arbirarie. Infatti, se $\mathscr{F}$ è un insieme di sottoinsiemi di X, allora

$$\mathscr{C}\left(\bigcup_{A \in \mathscr{F}} A\right) = \bigcap_{A \in \mathscr{F}} \mathscr{C}(A) \qquad \mathscr{C}\left(\bigcap_{A \in \mathscr{F}} A\right) = \bigcup_{A \in \mathscr{F}} \mathscr{C}(A).$$

Esercizio (per casa)

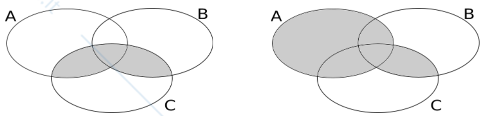
Dimostrare che se A, B e C sono degli insiemi:

- $A \setminus \emptyset = A$ *(cioé* $\mathscr{C}_A(\emptyset) = A$*),*
- $A \subseteq B \Rightarrow C \setminus B \subseteq C \setminus A$,
- $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$ *(cioé* $\mathscr{C}_A(A \setminus B) = A \cap B$*).*

Esercizio

Stabilire se $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$ *è vera.*

<u>SOLUZIONE.</u> Facciamoci un'idea tramite i diagrammi di Eulero-Venn:



Basta che A contenga un elemento che non sta in C perché i due insiemi siano diversi. Ecco controesempio (cioé un esempio che non verifica l'uguaglianza): $A = \{1\}$, $B = \emptyset$ e $C = \emptyset$. Infatti $(A \cup B) \cap C = A \cap C = \emptyset$ ed $A \cup (B \cap C) = A = \{1\}$.

Osservazione

Nel ricavare alcune proprietà degli insiemi abbiamo spesso applicato delle analoghe proprietà del calcolo proposizionale. Questo mette in luce un collegamento tra i seguenti simboli.

Operazioni e relazioni insiemistiche	*Connettivi logici*
$\subseteq$	$\Rightarrow$
$=$	$\Leftrightarrow$
$\cap$	$\wedge$
$\cup$	$\vee$
$\mathscr{C}$	$\neg$

Prodotto cartesiano.

Denoteremo una coppia ordinata di elementi a e b con il simbolo (a,b). L'elemento a è detto primo elemento della coppia e l'elemento b secondo elemento.

Osservazione

Il concetto di coppia ed insieme differiscono in quanto $\{a,b\}=\{b,a\}$ vale sempre, mentre $(a,b)\neq(b,a)$ se $a\neq b$. Pertanto l'ordine degli elementi è importante (da cui la definizione di coppia "ordinata").

All'inizio del novecento, alcuni filosofi e matematici si posero come obiettivo quello di fondare tutta la matematica a partire dalla nozione di insieme. In quest'ottica, K. Kuratowski nel 1921 ha definito:

$$(a,b) := \{\{a\},\{a,b\}\}.$$

Esercizio

Dimostrare che con la definizione di Kuratowski si ha che $(a,b)=(a',b') \Leftrightarrow a=a' \ \wedge \ b=b'$.

Se A e B sono insiemi, definiamo il loro prodotto cartesiano come l'insieme

$$A \times B := \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Vediamo alcuni esempi.

1) Se $A = \{a,b,c\}$ e $B = \{1,2\}$, allora

$$A \times B = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\},$$

$$B \times A = \{(1,a),(2,a),(1,b),(2,b),(1,c),(2,c)\}.$$

Questo ci dice che $A \times B \neq B \times A$ in generale.

2) Più in generale, se $A = \{a_1,a_2,\dots,a_m\}$ e $B = \{b_1,b_2,\dots,b_n\}$ allora

$$A \times B = \left\{ \begin{array}{cccc} (a_1,b_1), & (a_1,b_2), & \cdots & (a_1,b_n), \\ (a_2,b_1), & (a_2,b_2), & \cdots & (a_2,b_n), \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_m,b_1), & (a_m,b_2), & \cdots & (a_m,b_n) \end{array} \right\}.$$

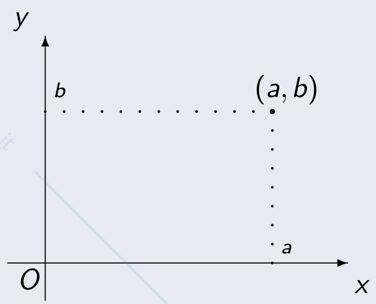
3) Se $A = B$ scriveremo A^2 in luogo di $A \times A$.

4) Si possono comporre insiemi noti per ottenerne altri:

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad \mathbb{N} \times \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}.$$

Osservazione

Come caso particolare, consideriamo $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, *il piano reale. Ogni coppia ordinata* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *si identifica con un punto in un sistema di assi cartesiani in cui* a *prende il nome di* ascissa *e* b *di* ordinata.



Esercizio (per casa)

Dimostrare che $A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = B$.

Esercizio

Dimostrare che $A \times B = \emptyset \Leftrightarrow (A = \emptyset \vee B = \emptyset)$.

SOLUZIONE. Per contrapposizione, basta dimostrare che

$$\neg(A \times B = \emptyset) \Leftrightarrow \neg(A = \emptyset \vee B = \emptyset).$$

Per le Leggi di De Morgan, questa diventa

$$\neg(A \times B = \emptyset) \Leftrightarrow \neg(A = \emptyset) \wedge \neg(B = \emptyset)$$

vale a dire

$$A \times B \neq \emptyset \Leftrightarrow A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset.$$

In effetti:

$A \times B \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists (a, b) \in A \times B \Leftrightarrow (\exists a \in A) \wedge (\exists b \in B) \Leftrightarrow (A \neq \emptyset) \wedge (B \neq \emptyset)$.

Se $A_1, \ldots, A_n$ sono insiemi, possiamo definire

$$A_1 \times A_2, \quad (A_1 \times A_2) \times A_3, \quad ((A_1 \times A_2) \times A_3) \times A_4, \quad \cdots$$

e così via fino a n. Per semplicità togliamo tutte le parentesi e scriviamo

$$A_1 \times \cdots \times A_n.$$

Questo insieme è detto ancora prodotto cartesiano. Un elemento di questo insieme si indica con il simbolo $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e prende il nome di n-upla ordinata (o successione finita o stringa). Talvolta, per semplicità diremo solo n-upla senza aggiungere "ordinata". Quando $n = 2$ si ricade nella nozione di coppia. Quando $n = 3, 4, 5, 6$ si parla rispettivamente di terna, quadrupla (o quaterna), quintupla e sestupla.

Esercizio (per casa)

Sia $A_n := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = nx\}$. *Individuare* $\bigcap_{n\in\mathbb{R}} A_n$ *e* $\bigcup_{n\in\mathbb{R}} A_n$.

Esercizio (per casa)

Sia $A_n := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid nx \leq y < (n+1)x\}$. *Individuare* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *e* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. *Individuare poi* $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} A_n$ *e* $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} A_n$.

Esercizio (per casa)

Verificare le seguenti proprietà.

1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;
2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;
3. $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$;
4. $(A \setminus B) \times (C \setminus D) = (A \times C) \setminus ((B \times C) \cup (A \times D))$.