

# Lezione 1

Alessandro Ardizzoni

Una **proposizione** è un'affermazione a cui è possibile attribuire un unico valore di verità:

Vero (V) o Falso (F).

Affermare una proposizione significa dichiarare che è vera.

Negarla vuol dire dichiarare che è falsa.

Non considereremo affermazioni del linguaggio comune che non siano trattabili attraverso dimostrazioni matematiche, come quelle di carattere estetico.

## Esempio

- $A$ : "7 è un numero dispari" (proposizione vera).
- $B$ : "7 è un numero pari" (proposizione falsa).
- $C$ : "7 è un" (non è una proposizione).
- $D$ : "7 è un numero bello" (è una proposizione nel linguaggio comune ma non in quello matematico).

I **connettivi logici** sono simboli che servono per costruire delle nuove proposizioni a partire da proposizioni date ed il cui valore di verità dipende esclusivamente da quello delle proposizioni di partenza.

I più usati sono

$$\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow.$$

Più precisamente, date due proposizioni  $A$  e  $B$ , definiamo le seguenti proposizioni composte:

Simbolo	Nome	Si legge
$A \wedge B$	congiunzione	$A$ e $B$
$A \vee B$	disgiunzione	$A$ o $B$
$\neg A$	negazione	non $A$
$A \Rightarrow B$	implicazione	$A$ implica $B$
$A \Leftrightarrow B$	doppia implicazione (o bi-implicazione)	$A$ se e solo se $B$

Un modo meccanico per descrivere i possibili valori di verità di una proposizione è attraverso la sua **tavola di verità**.

Ad esempio  $A \wedge B$  è definita come quella proposizione che

**è vera esclusivamente quando  $A$  e  $B$  sono entrambe vere.**

La sua tavola di verità si ottiene considerando tutti i valori di verità di  $A$  e  $B$  ed il conseguente valore di verità di  $A \wedge B$ .

$A$	$B$	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

In modo analogo le altre tabelle definiscono le altre proposizioni composte.

$A$	$B$	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

$A$	$\neg A$
V	F
F	V

$A$	$B$	$A \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

$A$	$B$	$A \Leftrightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Dalle tabelle di sopra che qui riportiamo,

$A$	$B$	$A \vee B$	$A$	$\neg A$	$A$	$B$	$A \Rightarrow B$	$A$	$B$	$A \Leftrightarrow B$
V	V	V	V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F	V	V	F	V	F
F	F	F	F	V	F	F	V	F	F	V

deduciamo che

- $A \vee B$  è vera solo quando  $A$  è vera oppure  $B$  è vera (basta che sia vera una delle due).
- $\neg A$  è vera soltanto quando  $A$  è falsa.
- $A \Rightarrow B$  è falsa solo quando  $A$  è vera e  $B$  è falsa.
- $A \Leftrightarrow B$  è vera solo se  $A$  e  $B$  hanno lo stesso valore di verità (entrambe vere o entrambe false).

Nella proposizione  $A \Rightarrow B$  a volte  $A$  è detto l'**antecedente** mentre  $B$  è detto il **conseguente**.

La tavola di verità ci dice che per dichiarare che  $A \Rightarrow B$  sia vera basta supporre vera  $A$  e controllare che in tal caso sia vera anche  $B$ : infatti quando  $A$  è falsa allora  $A \Rightarrow B$  è automaticamente vera. Cerchiamo di capirlo meglio con un esempio.

### Esempio

Consideriamo la frase

se  $\underbrace{n \text{ è pari}}_A$  allora  $\underbrace{3n \text{ è pari}}_B$ .

In simboli, questa frase diventa  $A \Rightarrow B$  che è ovviamente vera. Non controlliamo cosa succede se  $n$  non è pari (cioè se  $A$  è falsa): la frase non richiede nulla in tale circostanza e quindi resta vera.

### Esempio

Nell'esempio precedente, allora  $\neg A$  significa " $n$  non è pari" cioè " $n$  è dispari".

Due proposizioni  $A$  e  $B$  che abbiano gli stessi valori di verità in tutti i casi si dicono **logicamente equivalenti** e scriveremo in tal caso  $A \equiv B$ .

### Osservazione

Allora  $A \equiv B$  esattamente quando  $A \Leftrightarrow B$  è vera.

### Esercizio

Scrivere la tavola di verità di  $(\neg A) \vee B$  e stabilire  $(\neg A) \vee B \equiv A \Rightarrow B$ .

### Soluzione

Scriviamo le colonne di  $A$  e  $B$ , poi quella di  $\neg A$  ed infine quella di  $(\neg A) \vee B$  sfruttando le due colonne precedenti:

$A$	$B$	$\neg A$	$(\neg A) \vee B$	$A$	$B$	$A \Rightarrow B$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	V	F	V	V
F	F	V	V	F	F	V

Confrontando le tavole di verità, è chiaro che  $(\neg A) \vee B \equiv A \Rightarrow B$ .

## Osservazione

Per l'esercizio precedente le proposizioni  $(\neg A) \vee B$  e  $A \Rightarrow B$  sono logicamente equivalenti. Pertanto  $\Rightarrow$  si poteva definire usando  $\neg$  e  $\vee$ .

## Osservazione

Notiamo che abbiamo usato delle parentesi per non confondere  $(\neg A) \vee B$  con  $\neg(A \vee B)$ . In realtà esistono regole di precedenza tra gli operatori in base alle quali  $\neg A \vee B$  significa  $(\neg A) \vee B$ : l'operatore  $\neg$  ha la precedenza su  $\wedge$  e  $\vee$  cioè si applica per primo.

## Esempio

Una frase come "ho studiato ma non ho superato l'esame" può essere espressa attraverso i connettivi che abbiamo introdotto. Ad esempio indicando con  $A$  l'affermazione "ho studiato" e con  $B$  l'affermazione "ho superato l'esame", potremmo scrivere  $A \wedge (\neg B)$ . Chiaro però che abbiamo perso completamente la delusione espressa da quel "ma" dell'affermazione originale. Un discorso analogo si può fare per altre congiunzioni come "eppure" o "sebbene".

## Esercizio (per casa)

Se  $A, B$  e  $C$  sono proposizioni, dimostrare le seguenti equivalenze.

- 1  $\neg(\neg A) \equiv A$  (legge della doppia negazione);
- 2  $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \equiv (A \Leftrightarrow B)$ ;
- 3  $(A \Rightarrow B) \equiv (\neg B \Rightarrow \neg A)$  (legge di contrapposizione);
- 4  $A \wedge B \equiv B \wedge A$  (proprietà commutativa);
- 5  $A \vee B \equiv B \vee A$  (proprietà commutativa);
- 6  $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$  (proprietà associativa);
- 7  $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$  (proprietà associativa);
- 8  $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$  (proprietà distributiva);
- 9  $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$  (proprietà distributiva);
- 10  $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$  (legge di De Morgan);
- 11  $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$  (legge di De Morgan).

**Dimostrazione per contrapposizione:** l'equivalenza 3 mostra che dimostrare che vale  $A \Rightarrow B$  è come dimostrare che vale  $\neg B \Rightarrow \neg A$ .

Le proposizioni possono contenere variabili. Consideriamo le seguenti frasi.

- $P(x)$ :  $x$  è un numero dispari.
- $P(x,y)$ :  $x \leq y$ .

Queste frasi non sono vere oppure false: dipende dal valore assunto dalle variabili. Non sono quindi proposizioni. Definiamo i **quantificatori**  $\forall, \exists$ .

Simbolo	Nome	Si legge
$\forall$	quantificatore universale	per ogni
$\exists$	quantificatore esistenziale	esiste (almeno un)

Mostriamo l'uso dei quantificatori sui due esempi di sopra.

Proprietà	Si legge	valore di verità
$\forall x P(x)$	per ogni $x$ si ha che $x$ è un numero dispari	F
$\exists x P(x)$	esiste $x$ tale che $x$ è un numero dispari	V
$\forall x \exists y P(x,y)$	per ogni $x$ , esiste $y$ tale che $x \leq y$	V
$\exists y \forall x P(x,y)$	esiste $y$ tale che per ogni $x$ si abbia $x \leq y$	F

La prima affermazione significa che "tutti i numeri sono dispari" e la seconda che "almeno un numero è dispari". Le ultime dicono che il significato può cambiare se si cambia l'ordine dei quantificatori.

### Esercizio (per casa)

Stabilire il significato e, se possibile, il valore di verità delle espressioni

$$\forall x \exists y P(x,y) \quad \text{e} \quad \exists y \forall x P(x,y)$$

nei casi seguenti.

- $P(x,y)$ :  $x - y = 3$ .
- $P(x,y)$ :  $x$  è il padre di  $y$ .
- $P(x,y)$ :  $x$  ha votato  $y$  alle elezioni.

Il seguente esercizio mostra come  $\neg$  scambi i quantificatori  $\forall$  ed  $\exists$ .

### Esercizio (per casa)

Data l'espressione  $P(x)$  dimostrare le seguenti equivalenze.

- $\neg(\forall x P(x)) \equiv \exists x (\neg P(x))$ ;
- $\neg(\exists x P(x)) \equiv \forall x (\neg P(x))$ .

### Esempio

Consideriamo la frase

- $P(x)$ :  $x$  ha superato l'esame.

Allora  $\forall x P(x)$  si legge "tutti hanno superato l'esame".

Invece  $\neg(\forall x P(x))$  si legge "non è vero che tutti hanno superato l'esame"

cioè "esiste qualcuno che non ha superato l'esame" vale a dire

$\exists x (\neg P(x))$ .

I concetti di insieme, elemento di un insieme ed appartenenza di un elemento ad un insieme saranno da noi considerati come primitivi, acquisiti. Diciamo solo intuitivamente che un **insieme** è una collezione di oggetti che chiameremo **elementi** dell'insieme. Noi ci occuperemo solo di insiemi definibili attraverso il linguaggio matematico.

#### Esempio

La collezione di tutti i numeri interi divisibili per 3 è un esempio di insieme.

#### Esempio

La collezione di tutti i film belli non è un insieme matematico.

Notazione per gli insiemi:  $A, B, C, \dots$  (lettere maiuscole).

Notazione per gli elementi:  $a, b, c, \dots$  (lettere minuscole).

Se  $a$  è elemento dell'insieme  $A$ , scriveremo  $a \in A$  e diremo " $a$  appartiene ad  $A$ "

In luogo di  $\neg(a \in A)$  scriveremo  $a \notin A$  e diremo " $a$  non appartiene ad  $A$ ".

### Esempio

Alcuni esempi noti (che per ora prendiamo per acquisiti):

- $\mathbb{N}$  = insieme dei numeri naturali,
- $\mathbb{Z}$  = insieme dei numeri interi,
- $\mathbb{Q}$  = insieme dei numeri razionali,
- $\mathbb{R}$  = insieme dei numeri reali.

Un insieme può essere dato elencando i suoi elementi tra parentesi graffe.

### Esempio

Ad esempio  $A = \{0, 1\}$  oppure  $B = \{\mathbb{Z}, \emptyset, 1, \pi, \clubsuit, \star\}$ .

Oppure si può formare un insieme scegliendo elementi di un altro insieme (a volte sottinteso, se chiaro dal contesto) che soddisfano certe proprietà.

### Esempio

$P = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è multiplo di due}\} = \text{numeri pari}$ . La barra verticale si legge "tale che". Sta ad indicare che si suppone vera l'affermazione seguente. A volte viene sostituita con i due punti.

Scriveremo  $A = B$  se gli insiemi  $A$  e  $B$  contengono gli stessi elementi. Diremo in tal caso che " $A$  è uguale a  $B$ ". In simboli

$$\forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

In luogo di  $\neg(A = B)$  scriveremo  $A \neq B$  e diremo " $A$  è diverso da  $B$ ".

### Esempio

Valgono le seguenti uguaglianze

$$\{1, 1, 2\} = \{1, 2\} = \{2, 1\}.$$

Quindi in un insieme non si contano le ripetizioni (possiamo eliminare i doppi e l'insieme resta lo stesso) e non conta l'ordine dei suoi elementi.

Diremo che un "*insieme è vuoto*" se non contiene elementi. C'è un unico insieme vuoto. Infatti se  $A$  e  $B$  sono insiemi vuoti allora hanno entrambi gli stessi elementi, cioè nessuno, e quindi  $A = B$ . L'unico insieme vuoto si indica con  $\emptyset$  oppure con  $\{ \}$ . L'affermazione  $\exists x, x \in \emptyset$  è falsa.

Equivalentemente  $\forall x, x \notin \emptyset$  è vera. In effetti

$$\neg(\exists x, x \in \emptyset) \equiv (\forall x, \neg(x \in \emptyset)) \equiv (\forall x, x \notin \emptyset).$$

### Esempio

L'insieme  $\{n \in \mathbb{N} \mid n+1 = 0\}$  è vuoto.

Scriveremo  $A \subseteq B$  se tutti gli elementi di  $A$  stanno anche in  $B$ , in simboli

$$\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Diremo in tal caso che “ $A$  è *sottoinsieme di*  $B$ ” oppure che “ $A$  è *contenuto in*  $B$ ” o ancora che “ $B$  *contiene*  $A$ ”.

Il simbolo  $\subseteq$  prende il nome di **inclusione**.

Invece di  $\neg(A \subseteq B)$  scriveremo  $A \not\subseteq B$  e diremo “ $A$  *non è contenuto in*  $B$ ”.

### Esempio

Si ha che  $\{1, 5, 7\} \subseteq \{1, 2, 5, 7, 8\}$ .

### Esempio

Notiamo la differenza tra i simboli di appartenenza ed inclusione:

$1 \in \{1, 2\}$ ,  $1 \notin \{1, 2\}$ ,  $\{1\} \subseteq \{1, 2\}$ ,  $\{1\} \not\subseteq \{1, 2\}$ ,  $\{1\} \in \{1, \{1\}\}$ ,  $\{1\} \subseteq \{1, \{1\}\}$ .

### Esempio

Notiamo che  $\emptyset \subseteq A$  per ogni insieme  $A$ . Infatti ciò significa  $\forall x(x \in \emptyset \Rightarrow x \in A)$ . Siccome l'antecedente  $x \in \emptyset$  è sempre falsa, allora l'implicazione è vera a prescindere dalla veridicità del conseguente  $x \in A$ .

### Esempio

Per ogni insieme  $A$  si ha  $A \subseteq A$ .

Quindi ogni insieme  $A$  ha almeno due sottoinsiemi, cioè  $\emptyset$  e  $A$ .

### Lemma

Si ha che

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \quad (\text{criterio della doppia inclusione}).$$

### Proof.

$A = B$  significa che vale  $\forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$  cioè  $\forall x((x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A))$ , cioè  $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$ .  $\square$

Diremo che "A è un sottoinsieme proprio di B" se  $A \subsetneq B$  e  $A \neq B$ . In questo caso scriveremo  $A \subsetneq B$  oppure  $A \subset B$ . ESEMPLI:  $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$ .

Definiamo l'**insieme delle parti** di un insieme A come l'insieme

$$P(A) := \{S \mid S \subseteq A\}.$$

Quindi è l'insieme formato da tutti i sottoinsiemi di A.

#### Osservazione

Siccome  $\emptyset \subseteq A$  e  $A \subseteq A$ , abbiamo  $\emptyset \in P(A)$  e  $A \in P(A)$ .

Ecco alcuni esempi di un insieme A e del suo insieme delle parti P(A).

A	P(A)
$\emptyset$	$\{\emptyset\}$
$\{1\}$	$\{\emptyset, \{1\}\}$
$\{1, 2\}$	$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
$\{1, 2, 3\}$	$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

In tutti questi casi, se A contiene n elementi distinti allora P(A) ne contiene  $2^n$ . Vedremo che è un fatto generale.