# Limiti

**Definizione** Il limite per x che tende a $x_0$ di $f(x)$ è il valore c, e scriviamo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = c$$

$x_0$ → punto di accumulazione

se $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta(\varepsilon) > 0$ t.c. $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow c - \varepsilon < f(x) < c + \varepsilon$

**Convergenza** Si dice che $f(x)$ è convergente a $l \in \mathbb{R}$ per $x \to x_0$ se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

**Divergenza positiva** Si dice che $f(x)$ diverge positivamente per $x \to x_0$ se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

**Divergenza negativa** Si dice che $f(x)$ diverge negativamente per $x \to x_0$ se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

**Def. funzione continua** Si dice che una funzione è continua in $x_0 \in D$ se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

**Tipi di discontinuità**

1ª specie: limite dx e sx in $x_0$ sono diversi ma finiti

2ª specie: almeno uno dei due limiti (dx e sx) è infinito o non esiste

eliminabile: limite dx e sx coincidono ma sono diversi da $f(x_0)$

**Asintoti**

- **verticali** Si ha un asintoto verticale in $x = x_0$ se $\lim_{x \to x_0^-, x_0^+, x_0} f(x) = +\infty, -\infty$

- **orizzontali** Si ha un asintoto orizzontale in $y = L$ se $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L$

- **obliqui** Si ha un asintoto obliquo in $y = mx + q$ se ① $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

② $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = L \neq 0, \in \mathbb{R} = m$ ③ $q = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - mx = L \in \mathbb{R}$

**Teorema del confronto**

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni tali che

$$f(x) \geq g(x) \text{ in un intorno di } x_0 \text{ (o di } \pm\infty)$$

e sia $g(x)$ divergente positivamente per $x \to x_0$ (oppure $\pm\infty$) allora anche $f(x)$, come maggiorante di $g(x)$, diverge positivamente. Se invece $f(x)$ diverge negativamente, allora anche $g(x)$, come minorante di $f(x)$, diverge negativamente.

**Teorema dei carabinieri**

Siano $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ tre funzioni definite in un intorno di $x_0$ (oppure $\pm\infty$) e siano tali che

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \text{ per le } x \text{ di tale intorno,}$$

e sia inoltre soddisfatta la seguente condizione

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) \qquad (\text{oppure } x \to \pm\infty)$$

Allora anche $g(x)$ ha lo stesso comportamento, cioè esiste il limite di $g(x)$ e coincide con quello di $f(x)$ e $h(x)$.

**Definizione di infinitesimo**

Una funzione $f(x)$ si dice infinitesimo per $x \to \begin{smallmatrix} +\infty \\ x_0 \\ -\infty \end{smallmatrix}$ se

$$\lim_{x \to \begin{smallmatrix} x_0 \\ +\infty \\ -\infty \end{smallmatrix}} f(x) = 0$$

**Infinitesimi simultanei e dello stesso ordine**

Due infinitesimi si dicono simultanei se convergono a 0 per la stessa $x$, e se lo sono possono essere dello stesso ordine se

$$\lim_{x \to \begin{smallmatrix} x_0 \\ +\infty \\ -\infty \end{smallmatrix}} \frac{f(x)}{g(x)} = m \neq 0$$

e quindi scriveremo $\quad f(x) \sim m \cdot g(x)$ per $x \to \begin{smallmatrix} +\infty \\ x_0 \\ -\infty \end{smallmatrix}$

**Confronto tra infiniti di ordini diversi**

Se invece $\lim_{x \to \begin{smallmatrix} x_0 \\ +\infty \\ -\infty \end{smallmatrix}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, allora $f(x)$ è di ordine superiore rispetto a $g(x)$. Se $\lim_{x \to \begin{smallmatrix} x_0 \\ +\infty \\ -\infty \end{smallmatrix}} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$, allora $g(x)$ è di ordine superiore rispetto a $f(x)$.

**Ordine di un infinitesimo**

Si dice ordine di un infinitesimo la potenza a cui va innalzato l'infinitesimo campione perchè i due siano dello stesso ordine.

**Definizione di infinito**

Una funzione $f(x)$ si dice infinito per $x \to \begin{matrix} +\infty \\ x_0 \\ -\infty \end{matrix}$ se

$$\lim_{x \to \begin{matrix} x_0 \\ +\infty \\ -\infty \end{matrix}} f(x) = \pm\infty$$

Due infinitesimi si dicono simultanei se divergono per e sara

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari