

Alessandro Sussi

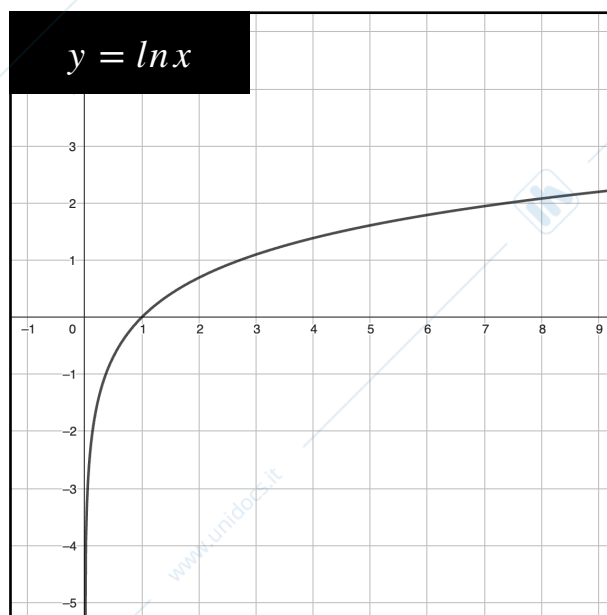
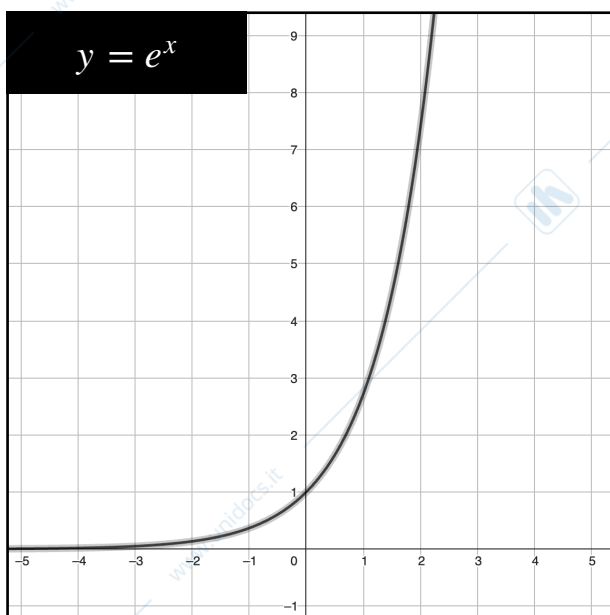
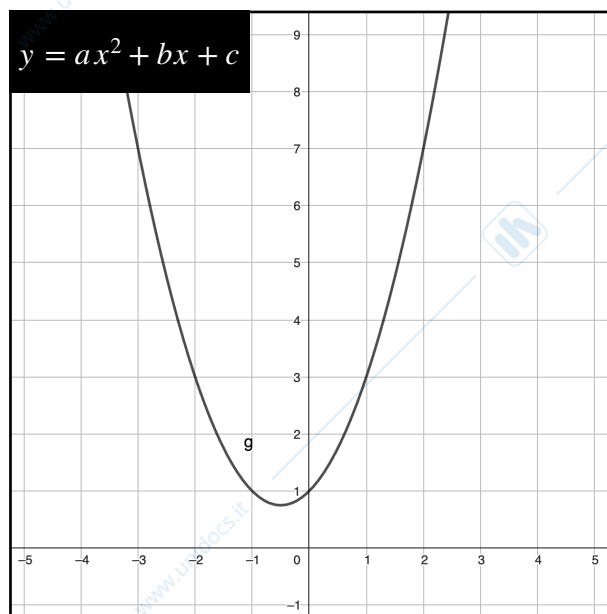
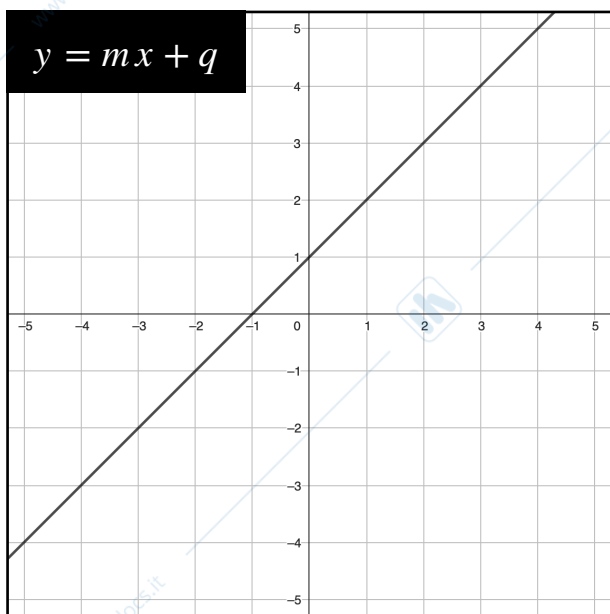
Appunti di matematica e statistica

UNIFI - CdL SFA-CQ

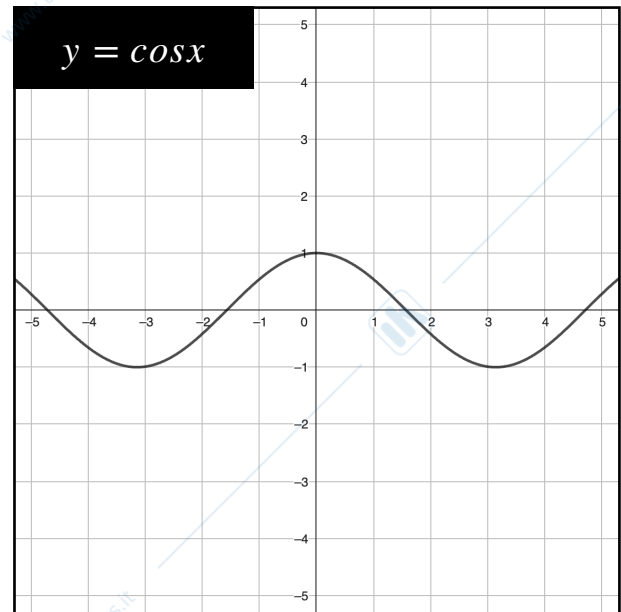
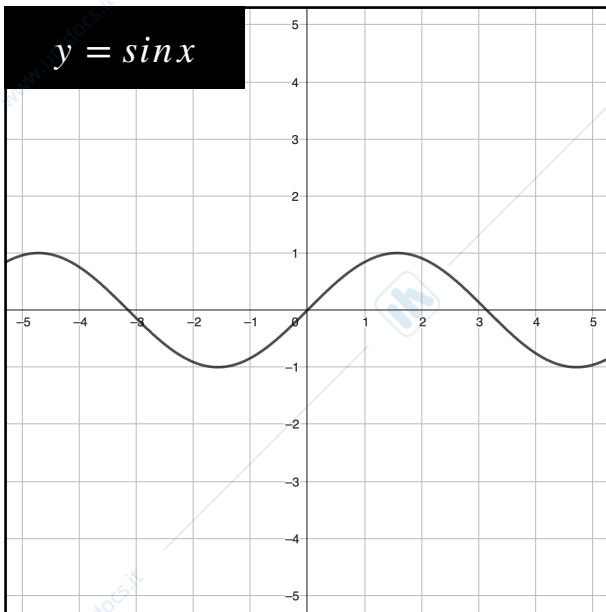
Indice:

1. Grafici delle funzioni elementari e note
2. Proprietà delle potenze
3. Proprietà dei logaritmi
4. Forme di indeterminazione dei limiti
5. Derivazione
6. Algoritmo per studio di funzioni
7. Integrazione
8. Statistica

1. Grafici delle funzioni elementari e note



Alessandro Sussi



2. Proprietà delle potenze

- Prodotti di potenze con stessa base: $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$
- Quoziente di potenze con stessa base: $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$
- Potenza di una potenza: $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$
- Prodotto di potenze con stesso esponente: $x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n$
- Quoziente di potenze con stesso esponente: $\frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n$

3. Proprietà dei logaritmi

- Definizione di logaritmo: $\log_a(x) = n$ dove $a^n = x$
- Logaritmo di un prodotto: $\log(x \cdot y) = \log x + \log y$
- Logaritmo di un quoziente: $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$
- Logaritmo di una potenza: $\log x^n = n \cdot \log x$
- Somma di logaritmi con base uguale: $\log_a(x) + \log_a(y) = \log_a(x \cdot y)$
- Sottrazione di logaritmi con base uguale: $\log_a(x) - \log_a(y) = \log_a\left(\frac{x}{y}\right)$

Alessandro Sussi

4. Forme di indeterminazione dei limiti

- Le forme di indeterminazione si hanno quando il risultato di un limite è:
 - $\infty - \infty$
 - $\frac{\infty}{\infty}$ si può utilizzare il teorema di De l'Hôpital
 - $\frac{0}{0}$ si può utilizzare il teorema di De l'Hôpital
 - $\infty \cdot 0$

5. Derivazione

- **Derivate fondamentali:**

- $f(x) = k \rightarrow f'(x) = 0$
- $f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1$
- $f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
- $f(x) = a^x \rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$
- $f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$
- $f(x) = \ln(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = \log_a(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$
- $f(x) = |x| \rightarrow f'(x) = \frac{|x|}{x}$
- $f(x) = \sqrt[n]{x^m} \rightarrow f'(x) = \frac{m}{n} \cdot \sqrt[n]{x^{m-n}}$
- $f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = -\sin x$

- **Le regole di derivazione sono le seguenti:**

- Somma di funzioni: $D : f(x) + g(x) = f'(x) + g'(x)$
- Prodotto di funzioni: $D : f(x) \cdot g(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- Quoziente di funzioni: $D : \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$
- Funzioni composte: $D : f[g(x)] = f'[g(x)] \cdot g'(x)$

Alessandro Sussi

6. Algoritmo per lo studio di funzioni

• Studio del dominio:

- Il dominio indica i valori di x per i quali la funzione non esiste. Fare attenzione a:
 - Frazioni \rightarrow il denominatore deve essere diverso da 0
 - Radici \rightarrow l'argomento deve essere positivo
 - Logaritmi \rightarrow l'argomento deve essere positivo

• Studio di parità e disparità (simmetria):

- Le funzioni pari: sono caratterizzate da $f(-x) = f(x)$, e quindi sono simmetriche rispetto all'asse y .
- Le funzioni dispari: sono caratterizzati da $f(-x) = -f(x)$, e quindi sono simmetriche rispetto all'origine.

• Intersezioni con gli assi:

- Per studiare le intersezione con gli assi si pone la x e la y uguali a 0, come risultato si ottiene il valore del punto dove il grafico interseca con l'asse.

• Studio del segno:

- Studiare il segno della funzione permette di capire per quali x è positiva e per quali è negativa. Per studiare il segno si pone la funzione maggiore di 0.

• Studio dei limiti:

- Si studia i limiti per $x \rightarrow \pm\infty$ e per x che si avvicina ai valori esclusi dal dominio.
- In caso il dominio identifichi dei punti di discontinuità si studia i limiti nei loro intorni.

• Derivata prima:

- $f'(x) > 0 \rightarrow$ funzione crescente.
- $f'(x) < 0 \rightarrow$ funzione decrescente.
- $f'(x) = 0 \rightarrow$ punto di massimo e minimo relativi o di flesso a tangente orizzontale.
- In seguito si confronta tutti i punti di massimo e minimo relativi per trovare gli eventuali punti di massimo e minimo assoluti.

Alessandro Sussi

- **Derivata seconda:**

- $f''(x) = 0 \rightarrow$ punti di flesso.
- $f''(x) > 0 \rightarrow$ concavità in alto.
- $f''(x) < 0 \rightarrow$ concavità in basso.

7. Integrazione

- **Integrali fondamentali:**

- $\int k dx = kx + c$

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c$

- $\int e^x dx = e^x + c$

- $\int \ln(x) dx = x \cdot \ln(x) - x + c$

- $\int \log_a(x) dx = x \cdot \log_a(x) - x \cdot \log_a(e) + c$

- $\int |x| dx = \frac{x \cdot |x|}{2} + c$

- $\int \sqrt[n]{x^m} dx = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + c$

- $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$

- $\int \cos(x) dx = \sin(x) + c$

- **Proprietà degli integrali e regole di integrazione:**

- $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

- $\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$

Alessandro Sussi

- Integrazione per parti: $\int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx$

- Funzioni composte: $\int f[g(x)] \cdot g'(x) = F[g(x)] + c$

- **Integrazione per sostituzione:**

- Formula con funzione composta esplicita: $y = g(x) \rightarrow dy = g'(x)dx$
- Formula con funzione non esplicita: $y = g(x) \rightarrow x = \dots y \rightarrow dx = D : [\dots]dy$
- Nuovi estremi di integrazione: $a \rightarrow g(a) / b \rightarrow g(b)$
- Si risolve il nuovo integrale.

Integrali immediati	Integrali con una funzione composta
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \text{ con } \alpha \neq -1$	$\int [f(x)]^\alpha f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \text{ con } \alpha \neq -1$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int f'(x) e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + c$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int f'(x) a^{f(x)} dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int f'(x) \sin f(x) dx = -\cos f(x) + c$
$\int \cos x dx = \sin x + c$	$\int f'(x) \cos f(x) dx = \sin f(x) + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$	$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = \tan f(x) + c$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$	$\int \frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)} dx = -\cot f(x) + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} dx = \arcsin f(x) + c$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$	$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2} dx = \arctan f(x) + c$

8. Statistica

Alessandro Sussi

- **Medie:**

- Media aritmetica: $\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$

- Media pesata: $\bar{X}_p = \frac{f_1 \cdot X_1 + \dots + f_n \cdot X_n}{f_1 + \dots + f_n}$

- Media geometrica: $\bar{X}_g = \sqrt[n]{X_1 \cdot \dots \cdot X_n}$

- Media armonica: $H = \frac{n}{\frac{1}{X_1} + \dots + \frac{1}{X_n}}$

- **Mediana:**

- Per una serie di "n" valori disposti in ordine crescente si ha che la mediana è

- Per n dispari → la M è la X in posizione $\frac{n+1}{2}$

- Per n pari → la M è il valore medio fra la X in posizione $\frac{n}{2}$ e quella in posizione $\frac{n}{2} + 1$

- **Moda:**

- È il valore "X" che viene ripetuto più volte all'interno di una serie di dati.

- **Intervallo di variazione:**

- $W = X_{max} - X_{min}$

- **Scarti semplici:**

- $X_1 - \bar{X}, \dots, X_n - \bar{X}$

- **Varianze:**

- Varianza: $Var(X) = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2}{n}$

- Varianza pesata: $Var(X)_p = \frac{f_1 \cdot (X_1 - \bar{X})^2 + \dots + f_n \cdot (X_n - \bar{X})^2}{f_1 + \dots + f_n}$

- **Deviazione standard:**

- $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$