Matematica e statistica

30/09

N → insieme numeri naturali
→ 0, 1, 2, 3, ...
→ infinito, ordinato, rappresentabile su una ~~retta~~ semiretta e discreto
↓
tra due elementi non c'è un terzo detto che ci sia

→ per ogni coppia di elementi, la loro operazione dà ancora un numero naturale

→ chiuso rispetto all'operazione → se $\forall a, b \in I \; a \circ b \in I$
→ chiuso rispetto all'addizione
→ NO chiuso rispetto sottrazione
→ chiuso rispetto alla moltiplicazione
→ NO chiuso rispetto alla divisione
→ chiuso rispetto all'elevamento a potenza, ma eccezione 0^0 e x^{-n}
→ NO chiuso rispetto alla media

Numeri primi → divisibili solo per sé stesso e 1
0, 1
2
3
5 ...

→ I numeri primi sono infiniti (Euclide 300 a.C)

dim.
dimostrazione per assurdo (nego la tesi)

Osservazione $3 \cdot 5 \cdot 2 + 1 = 31$ $31:3 \; R=1$
$31:2 \; R=1$
$31:5 \; R=1$

$15 \cdot 3 + 1 = 46$ $46:3 \; R=1$
$46:15 \; R=1$

Suppongo per assurdo che i numeri primi non siano infiniti p_1, p_2, p_3, p_n

$N = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$

N

- è un numero primo. Contraddizione: ho trovato un numero primo più grande
- non è primo. Posso scomporlo in fattori primi, ma tra questi ce ne sicuramente uno più grande di p_n

Posizionale: il valore della cifra dipende dalla posizione

$303 = 3 \cdot 1 + 0 \cdot 10 + 3 \cdot 10^2$

$1274 = 4 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^3$

$122_{(4)} = 2 \cdot 4^0 + 2 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^2 = 2 + 8 + 16 = 26_{10}$

$\overset{2^4\,2^3\,2^2\,2^1\,2^0}{1010_{(2)}} = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 = 0 + 2 + 0 + 8 = 10$

la base deve essere > delle cifre del numero

$37_{(8)}$ (non può essere in base 6)

↳ $7 \cdot 8^0 + 3 \cdot 8^1 = 7 + 24 = 31$

$1210_{(3)} = 0 \cdot 3^0 + 1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^3 = 0 + 3 + 18 + 27 = 48$

↓

Contrario: da base 10 in altra base

↓

14 → voglio scrivere in base 2

$14 : 2 = 7 \quad R = 0$

$7 : 2 = 3 \quad R = 1$

$3 : 2 = 1 \quad R = 1$

$1 : 2 = 0 \quad R = 1$

↳ devo arrivare a zero

$14_{(10)} = 1110_{(2)}$

$\mathbb{Z}$
→ insieme numeri interi relativi
→ $0, +1, -1, +2, -2 \ldots$
→ infinito, ordinato, rappresentabile su una retta, discreto.
→ chiuso rispetto a $+ \; - \; \cdot \; ( )^{()}$
→ NO chiuso $:$, media

$\mathbb{Q}$
→ insieme numeri razionali
→ un numero razionale è una classe di frazioni equivalenti

$\frac{1}{2} \quad \frac{2}{4} \quad \frac{3}{6} \quad \frac{30}{60} \quad \frac{100}{200}$

$\mathbb{Q}$ — Numeri decimali finiti $0{,}5 = \frac{1}{2}$

$\mathbb{Q}$ — Numeri periodici $1{,}\overline{3} = \frac{13-1}{9} = \frac{12}{9}$ $\quad 21{,}0\overline{5} = \frac{21{,}0\overline{5} - 210}{90}$

→ % $\quad 3\% = \frac{3}{100}$

→ denso $\forall a, b \in \mathbb{Q} \; \exists \; c \in \mathbb{Q} \quad a < c < b$
per esempio la media
→ rappresentabile su una retta

Tanti 9 quante le cifre del periodo
Tanti 0 quante le cifre dell'antiperiodo

I $\mathbb{Q} \cup$ n reali illimitati e non periodici = IRRAZIONALI ($\sqrt{2}$)

dim

Teorema $\sqrt{2}$ è irrazionale.
dimostrazione per assurdo

OSSERVAZIONE $12 = 2^2 \cdot 3$
$45 = 3^2 \cdot 5$
$100 = 2^2 \cdot 5^2$
$7 = 7$

elevo alla seconda $12^2 = 2^4 \cdot 3^2$
$45^2 = 3^4 \cdot 5^2$
$100^2 = 2^4 \cdot 5^4$
$7^2 = 7^2$

esponenti pari

nego la tesi. Suppongo che $\sqrt{2}$ sia razionale

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ elevo alla seconda $\Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2}$ $2 \cdot q^2 = p^2$

il 2 ha esp. disp. il 2 ha esp. p. (2°)

I Trascendenti ~~[illegible]~~ $\begin{cases} \pi \\ e \end{cases}$

φ e $\sqrt{2}$ si possono ottenere da equazioni con coefficienti reali

Algebrici
$\sqrt{2} \Rightarrow x^2 - 2 = 0$
$\varphi \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$

$\hookrightarrow$ sezione aurea di un segmento è la parte di segmento media proporzionale tra il segmento e la parte rimanente

x 1

$1 : x = x : 1 - x$
$x^2 = 1(1-x)$
$x^2 - x - 1 = 0$ $\rightarrow$ sezione aurea non è trascendente

$\Delta = 5$ $x = \left\langle \begin{array}{l} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{5} = \varphi \end{array} \right.$

π = rapporto tra lunghezza e diametro di una circonferenza
$\approx 3,1415\ldots$

$e = \sim 2,7\ldots$

$\mathbb{R}$ $\rightarrow$ insieme numeri reali
$\rightarrow \mathbb{Q} \cup \mathrm{I}$
$\rightarrow$ continuo (corrispondenza biunivoca con i punti della retta)

Disequazioni

$ax^2+bx+c \gtrless 0$

$3x^2+x-4<0$ $\quad -\frac{4}{3}<x<1$

$a>0$ (se $a<0$ cambio segno e verso)

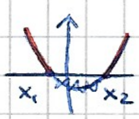
$\Delta = b^2-4ac \quad (1-4\cdot 3\cdot(-4)=49)$

Δ

$\Delta>0$

x_1, x_2

con parabola

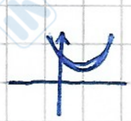


$ax^2+bx+c>0$
$x_1<x<x_2$

$\Delta<0$

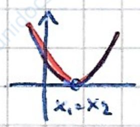
$ax^2+bx+c>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$ax^2+bx+c<0 \quad \nexists x\in\mathbb{R}$



$\Delta=0$

$x_1=x_2$

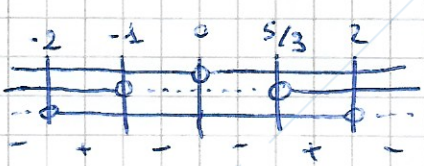


$ax^2+bx+c>0$ tutte le $x\neq x_1$

$ax^2+bx+c<0$ mai

$ax^2+bx+c\leq 0$ $\quad x=x_1$

$$\begin{cases} x^2>0 \\ 3x^2-2x-5>0 \\ x^2-4<0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\neq 0 \\ x<-1 \ \vee \ x>5/3 \\ -2<x<2 \end{cases}$$



$-2<x<-1 \ \vee \ \frac{5}{3}<x<2$

→ studio sempre così >

$\frac{3x+7}{x^2-8} > 0$ ⟶ diseq. fratte $N>0$ $x > -\frac{7}{3}$

$D>0$ $x < -\sqrt{8} \vee x > \sqrt{8}$

	$-2\sqrt{2}$		$-7/3$		$+2\sqrt{2}$	
$N>0$	$-$		$-$	ϕ	$+$		$+$
$D>0$	$+$	ϕ	$-$		$-$	ϕ	$+$
	$\ominus$	$\nexists$	$\oplus$		$\ominus$	$\nexists$	$\oplus$

$-2\sqrt{2} < x < -7/3 \ \cup x > +2\sqrt{2}$

$(x^2-8)(3x+7) > 0$ ⟶ prodotto

$x^2-8>0$ $x < -\sqrt{8} \vee x > \sqrt{8}$

$3x+7>0$ $x > -\frac{7}{3}$

	$-\sqrt{8}$		$-\frac{7}{3}$		$\sqrt{8}$	
$+$	ϕ	$-$		$-$	ϕ	$+$
$-$		$-$	ϕ	$+$		$+$
$\ominus$	$\circ$	$\oplus$	$\circ$	$\ominus$	$\circ$	$\oplus$

$-\sqrt{8} < x < -\frac{7}{3} \ \cup x > \sqrt{8}$

$x^4 - 4x^3 < 0$ ⟶ terzo grado

$x^3(x-4) \leq 0$

$1°F > 0$ $x^3 > 0$ $x > 0$
$2°F > 0$ $x-4 > 0$ $x > 4$

$x^3 + 3x^2 - 4 > 0$

Teorema di Ruffini   trovo un numero che annulla il polinomio $(x=1)$

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & 3 & \boxed{0} & -4 \\
1 & \downarrow & 1 & 4 & 4 \\
\hline
 & 1 & 4 & 4 & 0 \\
 & x^2 & x & &
\end{array}$$

$x^3 + 3x^2 - 4 = (x^2 + 4x + 4)(x-1)$

Binomie $ax^k + b \lessgtr 0$

k dispari → $x^3+8>0$ $x^3 > -8$
$x > \sqrt[3]{-8} > -2$

$x^5 - 8 < 0$ $x^5 < 8$
$x < \sqrt[5]{8}$

k pari → $4x^4 - 1 < 0$ $4x^4-1=0$ $x^4 = \frac{1}{4}$ $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

$-\sqrt{\frac{1}{2}} < x < \sqrt{\frac{1}{2}}$

$x^8+2>0$ $x^8+2=0$ $x^8=-2$ non ha soluzioni

Trinomie $\cancel{\quad}$ $ax^{2n}+bx^{n}+c \gtrless 0$

$3x^4+2x^2-1<0$ $\qquad x^2=y$

$3y^2+2y-1<0$ $\qquad y = \begin{matrix} -1 \\ \frac{1}{3} \end{matrix}$

$-1<y<\frac{1}{3}$

$-1<x^2<\frac{1}{3}$

equivale a un sistema

$\begin{cases} x^2<\frac{1}{3} \\ x^2>-1 \end{cases}$ $\begin{cases} -\sqrt{\frac{1}{3}}<x<\sqrt{\frac{1}{3}} \\ \forall x\in\mathbb{R} \end{cases}$

Soluzioni: $\sqrt{\frac{1}{3}}<x<\sqrt{\frac{1}{3}}$

$$(A+B)^3 = A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$$

$x^{10}+x^5-2<0$ $\qquad x^5=y$

$y^2-y-2<0$ $\qquad -2<y<1$

$-2<x^5<1$ $\quad \begin{cases} x^5<1 \\ x^5>-2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x<1 \\ x>\sqrt[5]{-2} \end{cases}$

TEOREMA DI RUFFINI

es. $6+x^3-x$

x^3-x+6 → si individuano i divisori del termine noto (+6) e si cerca quello che annulla il polinomio.

$\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$

→ per
$x=1$ $\quad 1-1+6=6$
$x=-1$ $\quad -1+1+6=6$
$x=2$ $\quad 8-2+6=12$
$x=-2$ $\quad -8+2+6=0$

→ ora si esegue la divisione $(x^3-x+6):(x+2)$

(→ se necessario si completa il polinomio → x^3-0x^2-x+6)

valore trovato

	1	0	-1	6
-2		-2	4	-6
	1	-2	3	0

coeff. polinomio

↳ $(x^2-2x+3)\cdot(x+2)$

$0x=n$ → impossibile

$0x=0$ → indeterminato

LABOMAR

POTENZE E PROPRIETÁ

def. Dati due numeri naturali a ed esponente n, si dice con a^n, il prodotto di n fattori uguali ad a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots}_{a \cdot a \text{ n volte}}$$

proprietà

- $a^1 = a$
- $a^0 = 1$
- 0^0 = Non ha significato
- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $a^m : a^n = a^{m-n}$
- $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$
- $a^m : b^m = (a : b)^m$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

7 ottobre

Piano Cartesiano e Retta

- $\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
- Punto medio $\quad x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad ; \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$
- Baricentro del triangolo (punto d'incontro delle mediane)

$$G = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3} ; \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right)$$

Piano cartesiano

- Punti $\rightarrow$ coppie di numeri reali
- Rette $\rightarrow$ equazioni di I grado in x,y

$ax + by + c = 0$

$3x + y - 2 = 0 \quad A(0;2) \quad B(2/3;0)$

! forma implicita $\quad ax + y + c$

forma esplicita $\quad y = ax + c$

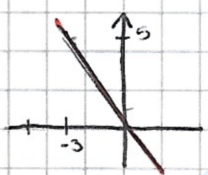
se non c'è la y non esiste la forma implicita

- m = coefficiente angolare (angolo che le rette fanno con il semiasse positivo delle y)

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

- q = ordinata all'origine (punto in cui la retta taglia l'asse y)
- equazione della retta da due punti

A(-3;5)
B(0;0)



$m = -\frac{5}{3}$

$q = 0 \quad$ retta $y = -\frac{5}{3}x$

$$y - y_A = m(x - x_A) \quad o \quad \frac{x - x_B}{x_A - x_B} = \frac{y - y_B}{y_A - y_B}$$

- Rette parallele

$y = mx + q$
$y' = m'x + q'$
$\Rightarrow$ sono $/\!/$ se $m = m'$

- Rette perpendicolari

$y = mx + q$
$y' = m'x + q'$
$\Rightarrow$ sono $\perp$ se $m = -\frac{1}{m} \Rightarrow mm' = -1$

- Punto d'incontro tra 2 rette (o di intersezione)

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$ → per trovare il punto di intersezione risolvo il SISTEMA

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Determinato

$$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$$

$$\begin{cases} x + y + 3 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + x - 3 = 0 \\ y = 2x \end{cases}$$

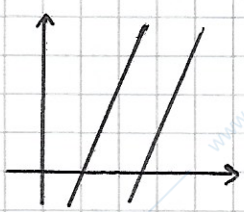
$$\begin{cases} 3 = 3x \\ y = 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$P(1,2)$

Impossibile

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$$



$$\begin{cases} x = 2y - 1 \\ 2x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y - 1 \\ 4y - 2 - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y - 1 \\ -1 = 0 \text{ (imposs.)} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{-2}{-4} \neq \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{3}$$

Indeterminato (∞ sol.)

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

$$\begin{cases} x = 2y - 1 \\ 2x - 4y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y - 1 \\ \cancel{4y} - \cancel{2} - \cancel{4y} + \cancel{2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y - 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Esercizi:
1. da implicita a esplicita
2. coefficiente angolare
3. equazione della retta per un punto
4. equazione della retta per un punto noto m

INTERPOLAZIONE

Procedura attraverso la quale ricaviamo dalla tabella valori non riportati esplicitamente.
Se si vuole trovare il valore y^* collegato ad un valore x^* non presente nella tabella, l'interpolazione permette di ottenere una stima di y^*, seguendo tale procedimento:

1. Individuare nella tabella i due valori x_a ed x_b entro i quali è compreso x^* e i due valori y_a e y_b che ad essi corrispondono

X	y
0	0
5	1
10	2
15	3

2. Si ricava poi un valore stimato di y^* attraverso la formula retta per due punti

Si parla di interpolazione lineare perché l'uso della formula nasce dall'ipotesi che la pendenza di y da x sia rappresentabile attraverso una retta nell'intervallo delimitato da x_a e x_b.

Per il valore: vogliamo conoscere y se $x = 7$.

$x_b - x_a = 10 - 5 = 5$

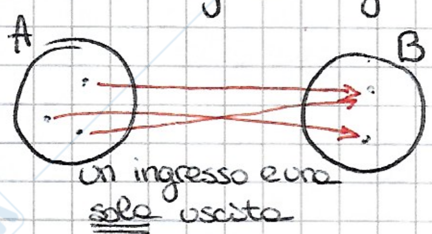
$y_b - y_a = 2 - 1 = 1$ $\quad \frac{1}{5}$ = differenza = 0,2

$x = 7 \quad y = 1 + 0{,}2 + 0{,}2 = 1{,}4$

8 ottobre

FUNZIONI

- Definizione: $\forall x \in A \quad \exists! \, y \in B \quad y = f(x)$



→ Per ogni elemento di A esiste uno e un solo elemento di B

- Dominio = valori assunti dalla variabile indipendente
- Codominio = " " " " dipendente
- Funzione definita a tratti = funzione analitica in cui il valore assunto dalla variabile dipende dalla funzione indipendente
  ↳ valore assoluto è un esempio di funzione a tratti

* Dominio $y = \log x \quad D: (0; +\infty)$

- Dominio: denominatore $\neq 0$
  - radicando di radici di indice pari ≥ 0
  - argomento del logaritmo deve > 0
  - argomento tangente $\neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
  - argomento cotangente $\neq k\pi$
  - argomento dell'arcoseno e dell'arcocoseno $\in [-1; +1]$
- Zeri: punti che annullano la funzione (il grafico interseca x)

$$y = x^3 - 5x + 2x^2 - 6 \qquad D: \mathbb{R}$$

Zeri: $x^3 - 5x + 2x^2 - 6 = 0$
$(x+1)(x^2 + x - 6) = 0$
$x = -1 \quad x = +2 \quad x = -3$

- Intersezioni: dove la funzione interseca x e y
- Segno: dove la funzione è positiva e dove negativa

Iniettiva: ogni elemento di B è l'immagine di al più un elemento di A
↳ (al massimo) ↳ uno ↳ zero

Suriettiva*: ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di B

Biunivoca: (o biettiva) "rapporto 1:1"

* posso restringere il codominio

- Pari o dispari

se $f(x) = f(-x)$ allora la funzione è PARI

simm. rispetto a y

$y = x^2 - 6$

$f(-x) = x^2 - 6 = f(x)$

se $f(x) = -f(-x)$ allora la funzione è DISPARI

simm. rispetto a O

$y = x^3$

$f(-x) = -x^3 = -f(-x)$

- Funzione inversa: data la funzione biettiva f da A a B, la funzione inversa di f è la funzione biiettiva f^{-1} da B ad A che associa ad ogni y di B il valore x di A tale che $y = f(x)$

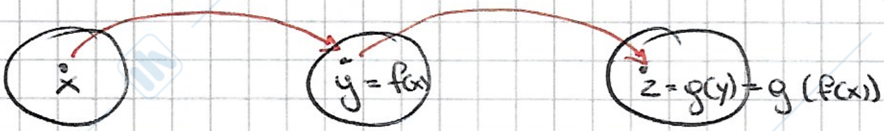
$f\ A \to B,\quad y = f(x) \qquad f^{-1}\ B \to A,\quad x = f^{-1}(y)$

es. $y = 3x + 1$

$-3x = 1 - y \qquad x = \frac{y-1}{3}$

f. inversa: $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$

- Funzione composta



$g \circ f \neq f \circ g$

es. $f(x) = x + 7 \qquad g(x) = \frac{1}{x}$

- $g \circ f$

$x \xrightarrow{f} x + 7 \xrightarrow{g} \frac{1}{x+7} \qquad y = \frac{1}{x+7}$

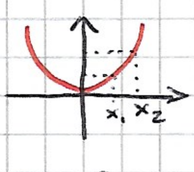
- $f \circ g$

$x \xrightarrow{g} \frac{1}{x} \xrightarrow{f} \frac{1}{x} + 7 \qquad y = \frac{1}{x} + 7$

- Funzioni:

crescente

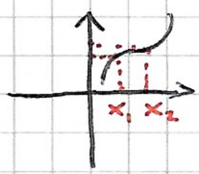
Se $\forall x_1, x_2 \in I \mid x_1 < x_2$



$f(x_1) < f(x_2)$

crescente in senso lato

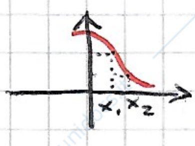
Se $\forall x_1, x_2 \in I \mid x_1 < x_2$



$f(x_1) \leq f(x_2)$

decrescente

Se $\forall x_1, x_2 \in I \mid x_1 < x_2$



$f(x_1) > f(x_2)$

decrescente in senso lato

$\forall x_1, x_2 \in I \mid x_1 < x_2$

$f(x_1) \geq f(x_2)$

TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

Una trasformazione geometrica nel piano è una corrispondenza biunivoca che associa a ogni punto del piano uno e un solo punto del piano stesso.

1. Traslazione

È individuata da un vettore!

Fissato nel piano un vettore v, una traslazione è una trasformazione geometrica che ad ogni punto P fa corrispondere un solo punto P' tale che il vettore PP' è equipollente a v.

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

Se ho −v, allora la traslazione è inversa.

→ Da sostituire nell'iniziale

NO punti uniti   SI rette unite

2. Simmetria assiale

È individuata da una retta!

Fissata nel piano una retta a, una simmetria assiale è una trasformazione geometrica che ad ogni punto P fa corrispondere un punto P' tale che a è asse del segmento PP'.

$$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = y \end{cases}$$

Rispetto ad x $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$

Rispetto ad y $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$

3. Simmetria centrale

È individuata da un punto!

Fissato nel piano un punto O, una simmetria centrale è una trasformazione geometrica che ad ogni punto P fa corrispondere un punto P' tale che PP' abbia O come punto medio

$CP = -CP'$ $C(x_c, y_c)$ $\begin{cases} x' = 2x_c - x \\ y' = 2y_c - y \end{cases}$

SI punti uniti   SI rette unite

④ Rotazione

È individuata da un punto e da un angolo!

Fissati nel piano un punto O e un angolo α, una rotazione è una trasformazione geometrica che ad ogni punto P fa corrispondere un punto P', tale che:

- OP congruente a OP'
- $OP = OP'$
- L'angolo POP' è congruente ad α e ugualmente orientato

$$\begin{cases} x' = x\cos(\alpha) - y\,\mathrm{sen}(\alpha) \\ y' = x\sin(\alpha) + y\cos(\alpha) \end{cases}$$

SI punti uniti (O)
NO rette unite (ammenoché $\alpha = 180°$)

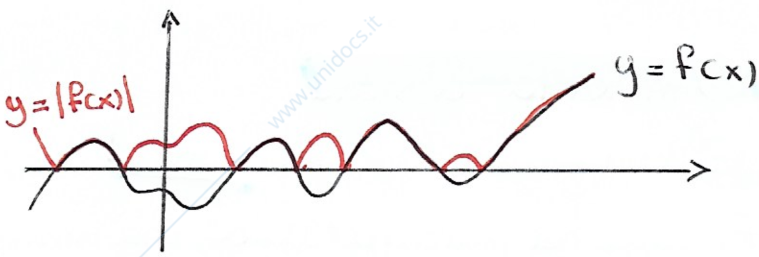
⑤ Omotetia

Dato un numero $K \neq 0$ si dice omotetia di centro C e rapporto K quella trasformazione che associa a P un punto P' tale che

$\rightarrow \overline{CP'} = K \cdot \overline{CP}$

VALORE ASSOLUTO

$$|f(x)| = \begin{cases} -f(x), & f(x) < 0 \\ f(x), & f(x) \geq 0 \end{cases}$$



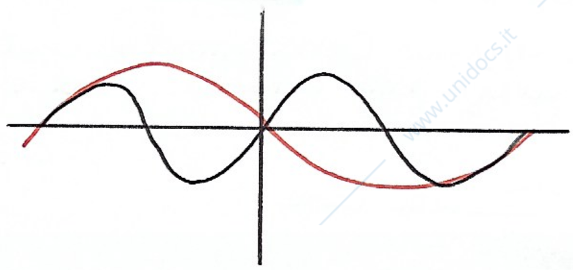
$$f(|x|) = \begin{cases} f(-x), & x < 0 \\ f(x), & x \geq 0 \end{cases}$$

DILATAZIONE

Una dilatazione è una trasformazione non isometrica di equazioni:

$$\begin{cases} x' = mx \\ y' = ny \end{cases}$$

con n,m reali positivi



16 ottobre

LOGARITMI

- Funzioni esponenziali $y = a^x \quad a>0$

Def.: fissato un numero reale $a>0$ e $a \neq 1$ si chiama funzione esponenziale di base a la funzione di equazione $y=a^x$ con $D = \mathbb{R}$ e codominio $= \mathbb{R}^+ - \{0\}$

$a = 1 \quad y = 1^x \quad y = 1$

$0 < a < 1$

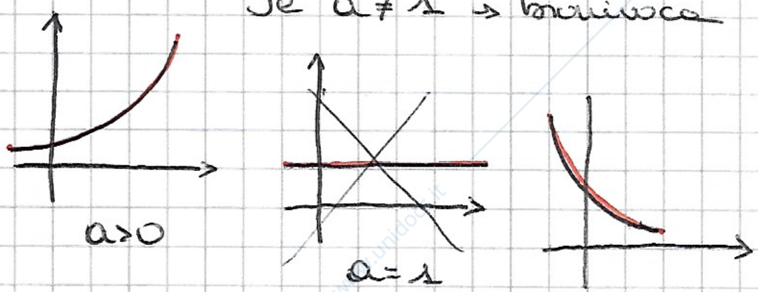
$\hookrightarrow D: \mathbb{R}$

(sopra) Cod: $x>0$ (sempre positiva)

$a^b = c$

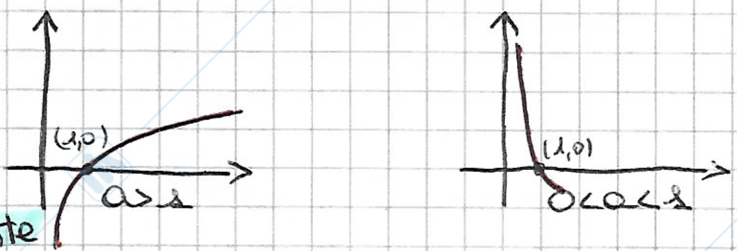
$b = \log_a c$

Se $a \neq 1 \rightarrow$ biunivoca



$a>0$ $\qquad$ $a=1$ caso degenere $\qquad$ $0<a<1$

- Logaritmi



Il log di base a di b è l'esponente da dare ad a per ottenere b
$a^{\log_a(b)} = b$

Def. a, b reali positivi $a \neq 1 \quad \log_a b \equiv x \mid a^x = b$

$\log_5 25 = 2 \qquad 5^2 = 25$

$\log_a b = x$

Proprietà

- $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$

$\hookrightarrow \log_a b = x \qquad \log_a c = y$

$a^x = b \qquad a^y = c$

allora $bc = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
$\hookrightarrow$ proprietà delle potenze

"soluzione"

allora $x+y = \log_a bc = \log_a b + \log_a c$

- $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

$\hookrightarrow \log_a b = x \qquad \log_a c = y$

$a^x = b \qquad a^y = c$

allora $\frac{b}{c} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad x-y = \log_a \frac{b}{c}$

$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$

- $\log_a b^n = n \log_a b$

↳ $\log_a b = x \quad a^x = b$

$(a^x)^n = b^n \qquad a^{nx} = b^n$

$nx = \log_a b^n$

$n \cdot \log_a b = \log_a b^n$

Basi $\log_{10} \bigcirc = \log \bigcirc$

$\log_e \bigcirc = \log_e \bigcirc$

LIMITI

Def: Insieme di numeri reali che corrisponde a una semiretta o intervallo.

Intervallo: limitato = segmento
illimitato = semirette

Intorno di un punto: è un qualsiasi intervallo aperto che contiene il punto

Intorno circolare: intervallo in cui x_0 sta a metà

Intorno destro di x_0: $(x_0; x_0+\delta)$

Intorno sinistro di x_0: $(x_0-\delta; x_0)$

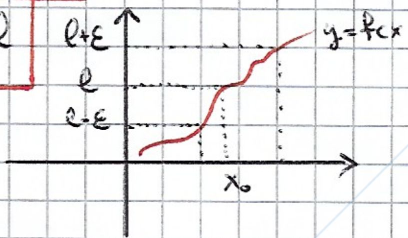
Intorno di $-\infty$: $(-\infty, b)$

Intorno di $+\infty$: $(b; +\infty)$

Punto isolato: $x_0 \in A \subseteq \mathbb{R}$ è un punto isolato per A se esiste almeno un intorno di x_0 in cui non cadono altri elementi di A

Punto di accumulazione: x_0 se ogni intorno di x_0 contiene altri punti di A

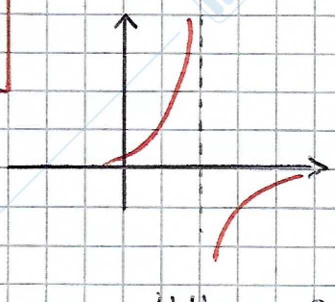
$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = l}$$



$$\boxed{\begin{array}{c}\forall \varepsilon > 0 \ \exists I(x_0) : \forall x \in I(x_0) \ x \neq x_0 \\ l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon\end{array}}$$

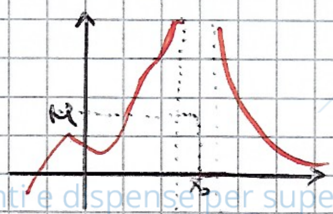
se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow$ funzione continua in x_0

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty}$$

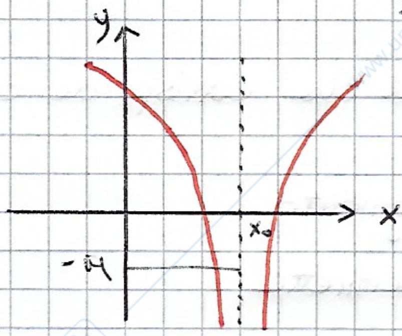


$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} +\infty \\ -\infty \\ \infty \end{array}$

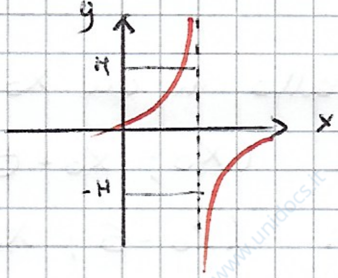
Se $+\infty$ $\quad \forall M > 0 \ \exists I(x_0) : \forall x \in I(x_0) \quad x \neq x_0 \quad f(x) > M$



Se $-\infty$ $\forall M > 0 \; \exists I(x_0) : \forall x \in I(x_0)$ $x = x_0$
$f(x) < -M$



Se ∞ $\forall M > 0 \; \exists I(x_0) : \forall x \in I(x_0)$ $|f(x)| > M$



$\Rightarrow$ Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ allora la retta $x = x_0$ è l'asintoto verticale della funzione

30 ottobre

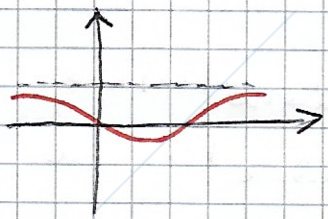
5854

LIMITI

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell}$$

def.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists I(\infty)$ tale che $\forall x \in I(\infty) \ \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$



$\Rightarrow$ se $\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell$ allora $y = \ell$ è asintoto orizzontale

(hanno a.o. $y = \frac{1}{x^{2\alpha+1}}$

$y = \frac{1}{2\alpha}$

$y = a^x$

$y = \arctan x \quad \left(\begin{matrix} y = \pi/2 \\ y = -\pi/2 \end{matrix} \right)$

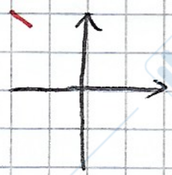
$$\boxed{\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty}$$

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

  $\forall M > 0 \ \exists I(+\infty) \,|\, \forall x \in I(+\infty)$
  $f(x) > M$

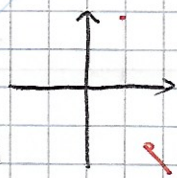
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

  $\forall M > 0 \ \exists I(-\infty) : \forall x \in I(-\infty)$
  $f(x) > M$

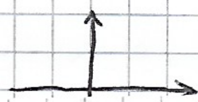


- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

  $\forall M > 0 \ \exists I(+\infty) : \forall x \in I(+\infty)$
  $f(x) < -M$



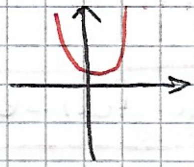
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



Calcolo dei limiti

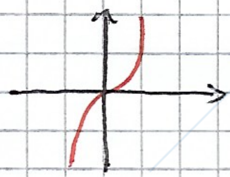
$y = x^n$

n pari $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$



n dispari $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



$y = \sqrt[n]{x}$

n pari $y = \sqrt{x}$ $y = \sqrt[n]{x}$ n $[0; +\infty)$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$

n dispari $y = \sqrt[n]{x}$ $D: \mathbb{R}$

$\lim_{x \to}$

Operazioni

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim (f(x) + g(x))$
l	k	$l + k$
l	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	k	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	k	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Forma di indecisione (indeterminata)
$-\infty$	$+\infty$	Forma di indecisione (indeterminata)

LIMITI

$\lim_{x\to\alpha} f(x) = l \qquad \lim_{x\to\alpha} g(x) = m$

$f(x)$	$g(x)$	$f(x)\cdot g(x)$
l	m	$l\cdot m$
$l>0$	$+\infty$	$+\infty$
$l<0$	$+\infty$	$-\infty$
$l>0$	$-\infty$	$-\infty$
$l<0$	$-\infty$	$+\infty$
→ 0	$I\infty$	forme di indecisione
→ $I\infty$	0	

$\lim_{x\to\alpha} f(x) = l \qquad \lim_{x\to\alpha} g(x) = m$

con $m \neq 0$

$f(x)$	$g(x)$	$f(x)/g(x)$
l	m	l/m
l	0	∞
0	m	0
→ 0	0	f. di indec.
l	∞	0
∞	m	∞
→ ∞	∞	f. di indec.

→ $\frac{0}{\infty}$ non è f.d.i., è 0

→ $\frac{\infty}{0}$ non è f.d.i., è ∞

es. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{x^2-3x+3} = \frac{1+1+1}{1-\cancel{3}+\cancel{3}} = 3$

$\lim_{x\to -\infty} \frac{e^x}{x} = \frac{0}{-\infty} = 0$

$\lim_{x\to -3^+} \frac{x}{x+3} = \frac{-3}{0} = \infty$

$\lim_{x\to -3} \frac{x}{x+3} = \infty$ (non è possibile determinare se + o − ∞)

$\lim_{x\to 1} \log(1-\log x) = 0$

$\lim_{x\to 3} \sqrt{x+\log_3 x} = 2$

$\lim_{x\to\infty} 3^x \ln x = +\infty$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x+3}{5^x-1} = \frac{3^+}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x\to 0} \arctan \ln x$

es.

da risolvere con il teorema del confronto

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}$ non ammette soluzione

$-1 \le \sin x \le 1$

$-\frac{1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x}$

$\swarrow \qquad \searrow$

$0 \qquad 0$

$\Rightarrow$ per il teorema del confronto $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

$\lim_{x\to-\infty} e^x \sin x = 0$

$-1 \le \sin x \le 1$

$-e^x \le e^x \sin x \le e^x$

$\swarrow \qquad \searrow$

$0 \qquad 0$

$\lim_{x\to 0} x^2 \cos\frac{1}{x} = 0$

$-1 \le \cos x \le 1$

$-\frac{1}{\cancel{x}} \le \frac{\cos x}{x} \le 1$

$-x^2 \le x^2 \cos\frac{1}{x} \le x^2$

$\swarrow \qquad \searrow$

$0 \qquad 0$

$[\infty - \infty]$

$\lim_{x\to+\infty} x^3 - x^2 + 5 = [+\infty - \infty + \cancel{5}]$

$= x^3\left(1 - \underset{\downarrow 0}{\frac{1}{x}} + \underset{\downarrow 0}{\frac{5}{x^3}}\right) = +\infty$

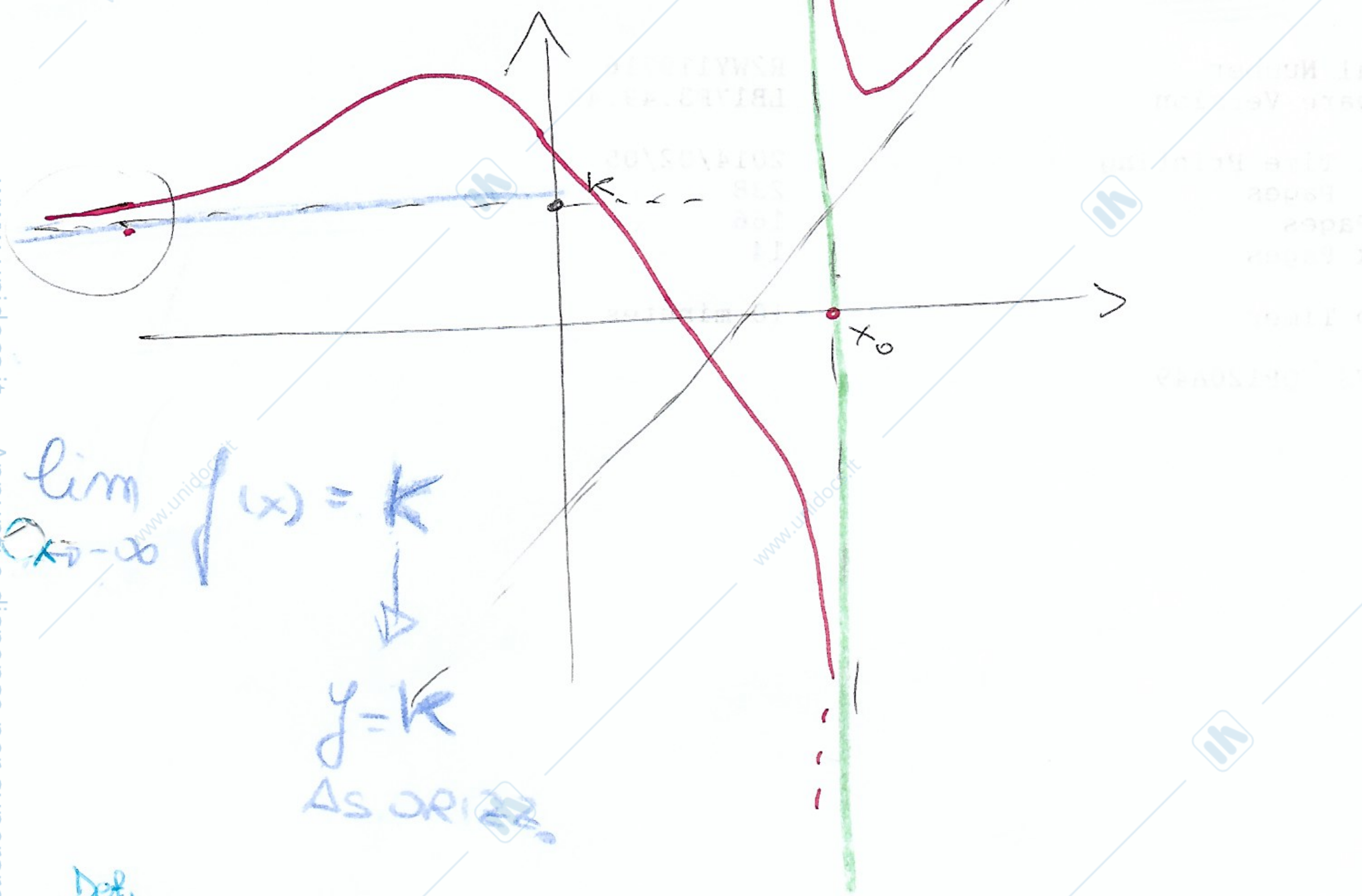
$\lim_{x\to-\infty} -x - x^2 = [\infty - \infty]$

$= -x^2\left(+\frac{1}{x} + 1\right) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} x - \sqrt{x^2+3} = [\infty - \infty]$

$= \left(x - \sqrt{x^2+3}\right)\left(\frac{x + \sqrt{x^2+3}}{x + \sqrt{x^2+3}}\right) = \frac{x - x^2 + 3}{x + \sqrt{x^2+3}} = \frac{-3}{+\infty} = 0$

Asintoti



$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = K$$

$\Downarrow$

$y = K$

AS. ORIZZ.

Def.

Un asintoto è una retta del grafico di una funzione se la distanza tra un generico punto e la retta tende a zero, quando l'ascissa o l'ordinata del punto tendono a ∞

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

$\rightarrow$ $x = x_0$ AS. VERT.

AS. OBLIQUI

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$ FORSE AS. OBLIQUO

- $m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$

ooo $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{(mx+q)}{x}\right) = 0$

se m ok $\Rightarrow$ $q = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx]$

$m \neq 0$ e $m \neq \infty$

- Funzione continua in x_0
  - → definita in x_0, $\exists f(x_0)$
  - → esiste ed è finito $\lim_{x \to x_0} f(x)$
  - → $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

def. Una funzione $f(x)$ definita in un intorno di un punto x_0, è continua in x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Esiste $f(x)$
Esiste $\lim_{x \to x_0} f(x)$ } Sono uguali (*)

es. $y = \sqrt{x+1}$ D: $x \geq 1$

$y = \frac{1}{2^x}$ D: $\mathbb{R}$ $2^x \neq 0$ sempre

$y = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ D: $x \neq 0$ continua in $\mathbb{R} - \{0\}$

$y = \begin{cases} x^3 - 2 & x \leq 1 \\ -x + \ln x & x > 1 \end{cases}$ D: $\mathbb{R}$

devo indagare $x = 1$. Devo vedere se $x = 1$ è continua.

→ $f(1) = 1 - 2 = -1$

→ $\lim_{x \to 1^-} x^3 - 2 = -1$

$\lim_{x \to 1^+} -x + \ln x = -1$

⇒ c'è il $\lim_{x \to 1} f(x)$ -1

→ sono uguali dunque $f(x)$ è continua.

$y = \begin{cases} x - 1 & x > 1 \\ e^x & x \leq 1 \end{cases}$ D: $\mathbb{R}$

→ $f(1) = e$

→ $\lim_{x \to 1^-} e^x = e$

$\lim_{x \to 1^+} x - 1 = 0$

→ la $f(x)$ non è continua in 1

$y = \begin{cases} \frac{x+a}{3-x} & x < 2 \\ 3^{x-1} & x \geq 2 \end{cases}$ contiene il parametro a

per quali valori di a la funzione è continua?

D: $\mathbb{R}$

→ $f(2) = 3^{2-1} = 3$

→ $\lim_{x \to 2^-} \frac{x+a}{3-x} = \frac{2+a}{1}$ $a = 1$

$\lim_{x \to 2^+} 3^{x-1} = 3$

(*) È continua se il limite destro e quello sinistro coincidono ~~[illegible]~~

Definito un intervallo $[a,b]$, una funzione è continua se è continua in ogni punto dell'intervallo

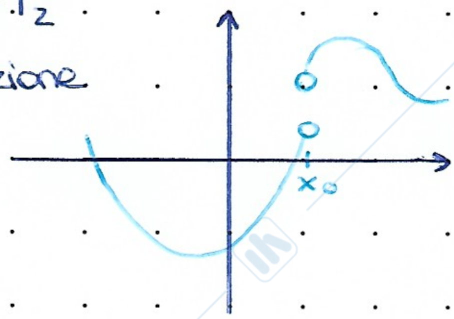
DISCONTINUITÀ

① Di prima specie

Un punto x_0 è punto di discontinuità di prima specie per la funzione quando esistono FINITI, ma DIVERSI tra loro

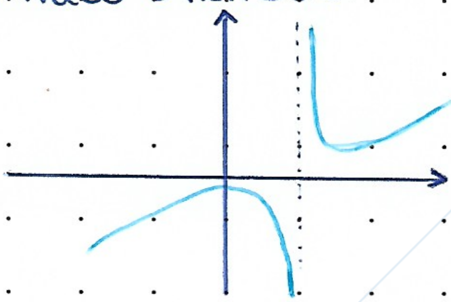
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_1 \quad e \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_2$$

la differenza $|l_2 - l_1|$ è il salto della funzione



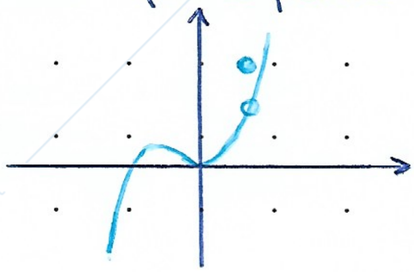
② Di seconda specie

Un punto x_0 è punto di discontinuità di seconda specie se almeno uno dei due limiti (destro e sinistro) è infinito o non esiste.



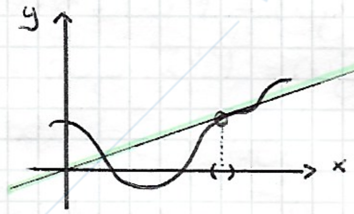
③ Di terza specie

Un punto x_0 è punto di discontinuità di terza specie per la funzione se esiste finito $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, MA f non è definita in x_0, oppure $f(x_0) \neq l$



Derivate

Una retta è **tangente** quando interseca il grafico in un solo punto P all'interno dell'intorno.



Dati una funzione $f(x)$, definita in un intervallo $[a;b]$ e due numeri reali c e $c+h$ (con $h \neq 0$) interni all'intervallo, il **rapporto incrementale** di f nel punto c è:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

↓

è il **coefficiente angolare della retta** passante per A e B

Data una funzione $y = f(x)$, definita in un intervallo $[a;b]$, la **derivata della funzione** nel punto c interno all'intervallo, che indichiamo con $f'(c)$, è il limite, se esiste ed è finito, per h tendente a 0, del rapporto incrementale di f relativo a c:

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

⚠ Se il limite per h tendente a 0 per il r.i. non esiste o è infinito, $f(x)$ **non è derivabile in quel punto** ⚠

Siccome la derivata è il limite del rapporto incrementale, possiamo distinguere una derivata destra e una derivata sinistra di una funzione. Data la funzione $y = f(c)$, in un punto c:

la **derivata sinistra** è:

$$f'_-(c) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

la **derivata destra** è:

$$f'_+(c) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Ha senso parlare di derivata destra e sinistra quando ho $|x|$ o punti all'estremo del dominio.

Una funzione $y = f(x)$ è **derivabile in un intervallo** chiuso $[a;b]$ se è derivabile in tutti i punti interni di $[a;b]$ e se esistono e sono finite la derivata destra in a e sinistra in b.

Se una funzione $f(x)$ è derivabile nel punto x_0, allora in quel punto è anche **continua**

Derivate fondamentali

- $f(x) = K \longrightarrow D\ K = 0$
- $f(x) = x \longrightarrow D\ x = 1$
- $f(x) = x^\alpha \longrightarrow D\ x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$
- $f(x) = \sqrt{x} \longrightarrow D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $f(x) = \sin x \longrightarrow D \sin x = \cos x$
- $f(x) = \cos x \longrightarrow D \cos x = -\sin x$
- $f(x) = a^x \longrightarrow D a^x = a^x \ln a$
- $f(x) = e^x \longrightarrow D e^x = e^x$
- $f(x) = \log_a x \longrightarrow D \log_a x = \frac{1}{\ln a}$
- $f(x) = \ln x \longrightarrow D \ln x = \frac{1}{x}$

Operazioni con le derivate

- $y = K \cdot f(x) \rightarrow D\,K f(x) = K \cdot f'(x)$
- $y = f(x) + g(x) \rightarrow D\, f(x) + g(x) = f'(x) + g'(x)$
- $y = f(x) \cdot g(x) \rightarrow D\, f(x) \cdot g(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $y = \frac{1}{f(x)} \rightarrow D \frac{1}{f(x)} = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$ con $f(x) \neq 0$
- $y = \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow D \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$ con $g(x) \neq 0$
- $y = \tan x \rightarrow D \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
- $y = \cot x \rightarrow D \cot x = \frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$

Derivata di una funzione composta

- $y = f(g(x)) \rightarrow D[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
- $y = [f(x)]^\alpha \rightarrow D[f(x)]^\alpha = \alpha [f(x)]^{\alpha-1} f'(x)$
- $y = f(g(z(x))) \rightarrow D[f(g(z(x)))] = f'(g(z(x))) \cdot g'(z(x)) \cdot z'(x)$
- $y = [f(x)]^{g(x)} \rightarrow D[f(x)]^{g(x)} = [f(x)]^{g(x)} \cdot \left[g'(x) \cdot \ln f(x) + \frac{g(x) \cdot f'(x)}{f(x)} \right]$
- $x = [f^{-1}(y)] \rightarrow D[f^{-1}(y)] = \frac{1}{f'(x)}$ con $x = f^{-1}(y)$
- $y = \arcsin x \rightarrow D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $y = \arccos x \rightarrow D \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $y = \arctan x \rightarrow D \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$
- $y = \text{arccot}\, x \rightarrow D\, \text{arccot}\, x = -\frac{1}{1+x^2}$

Derivata di ordine superiore al primo

In generale, data la funzione $y = f(x)$ con le regole di derivazione posso ottenere la derivata seconda, terza, quarta... che sono le derivate di ordine superiore

$y = x^3 + 2x + 1 \qquad y' = 3x^2 - 2 \qquad y'' = 6x \qquad y''' = 6 \qquad y^{(4)} = 0$

Retta tangente

Data la funzione $y = f(x)$, l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0; f(x_0))$, se la retta esiste e non è parallela all'asse y, è:

$$y - \underset{y_0}{f(x_0)} = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

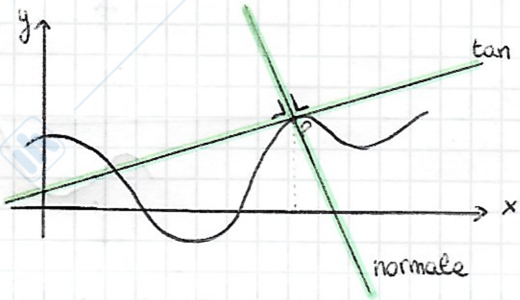
In tutti i casi in cui l'equazione della tangente è $y = K$, quindi con $m = 0$, ciò significa che la sua derivata in quel punto è zero.

Dati la funzione $y = f(x)$ e un suo punto $x = c$, se $f'(c) = 0$ allora $x = c$ c'è un punto stazionario o punto a tangente orizzontale

Retta normale

La retta normale a una curva in un punto $(x_0; y_0)$ è la retta perpendicolare alla tangente passante per il punto. L'equazione della retta normale al grafico f in $(x_0; f(x_0))$ è:

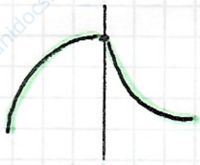
$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$



Punti di non derivabilità

Quando la tangente è parallela all'asse y, la funzione è continua, ma non derivabile

- $f'_-(c) \neq f'_+(c)$ -> punto angoloso
  almeno una finita



- $f'_-(c) = \pm\infty \quad f'_+(c) = \mp\infty$ -> cuspide

- $f'_-(c) = f'_+(c) = \pm\infty$
  -> flesso a tangente verticale

Angolo formato da due curve

Noi coefficienti angolari m_1 e m_2 delle due rette, la tangente dell'angolo acuto da esse formato è data da:

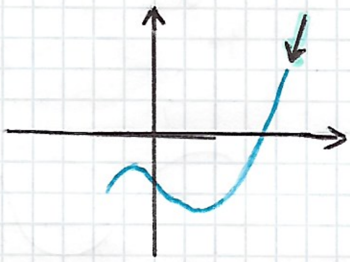
$$\tan\gamma = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

CONTINUITÀ E DERIVABILITÀ

Se una funzione è derivabile allora è certamente continua (come garantito dal teorema della derivabilità). Il viceversa non è vero.
Ad esempio la funzione $f(x) = |x|$ è continua in $\mathbb{R}$, ma non è derivabile in $x = 0$ (punto angoloso)

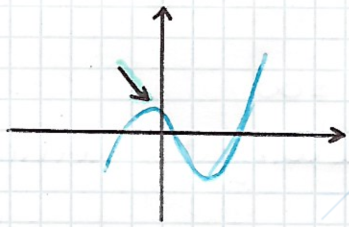
Massimi, minimi e flessi

1. **Massimo assoluto**: Data una funzione $y=f(x)$ il cui dominio è D, x_0 è il punto di massimo assoluto se
$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in D.$$
Il valore M assunto in x_0 è il massimo assoluto della funzione.

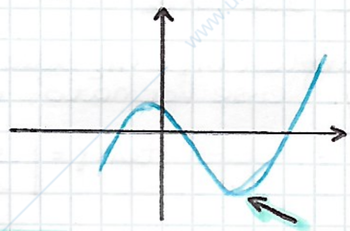


2. **Minimo assoluto**: Data una funzione $y=f(x)$ il cui dominio è D, x_0 è il punto di minimo assoluto se
$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in D$$
Il valore m assunto in x_0 è il minimo assoluto della funzione

3. **Massimo relativo**: Il massimo della funzione f in un intervallo I

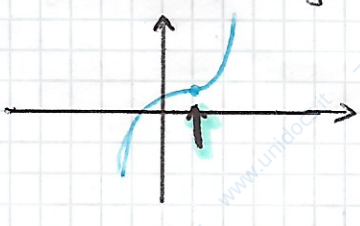


4. **Minimo relativo**: Il minimo della funzione f in un intervallo I



Massimo e minimo e flessi a tangente orizzontale si calcolano attraverso la derivata prima

5. **Flesso**: Data una funzione $y=f(x)$ definita e continua in $(a;b)$, x_0 interno ad (a,b) è un punto di flesso se in tale punto il grafico cambia concavità.
La tangente in tale punto si chiama tangente inflessionale.



I flessi a tangente obliqua si trovano con la derivata seconda

21 ottobre

STATISTICA

Inizialmente era un'attività pratica (contare persone, beni,...)

1662 Graunt pubblica un libro con dati statistici

Statistica
- Descrittiva (su un'intera "popolazione")
- Inferenziale (su un "campione casuale") ↳ Il più rappresentativo possibile della popolazione

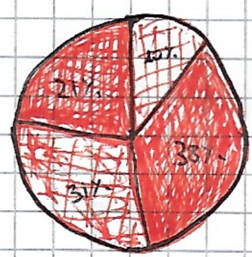
- Studio del problema
- Raccolta dati
- Rappresentazione grafica
- Analisi
- Conclusioni

Frequenza assoluta: "2", "5", "7"

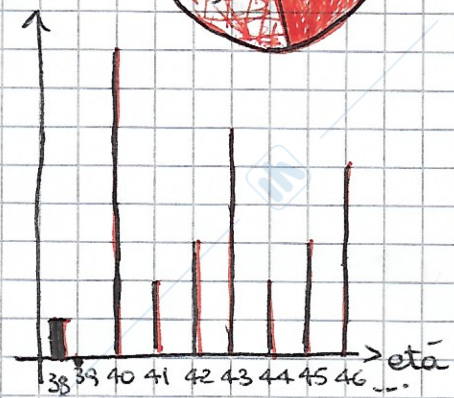
" relativa: $\frac{2}{20}$, $\frac{5}{20}$, $\frac{7}{20}$ — f. percentuale (10%, 25%, ...)

" cumulata: somma di quella nuova + quella precedente (%)

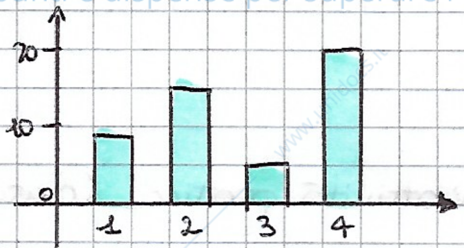
	f.ass.	f.rel.	f.rel%.	f.cum
gialli	25	25/100	31%	31%
fantascienza	8	8/100	10%	41%
narrativa	30	30/100	38%	79%
avventura	17	17/100	21%	100%
	80			



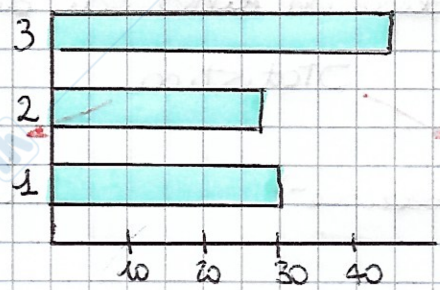
età		f.ass.	f.rel.
38	x	1	1/38
40	x x x x x x x x	8	8/38
41	x x	2	2/38
43	x x x x x x	6	6/38
42	x x x	3	3/38
45	x x x	3	3/38
48	x x x x x	5	5/38
46	x x x x x	5	5/38
50	x x	2	2/38
51	x	1	1/38
44	x x	2	2/38
		38	



Istogrammi



Diagrammi a barre



Aereogrammi

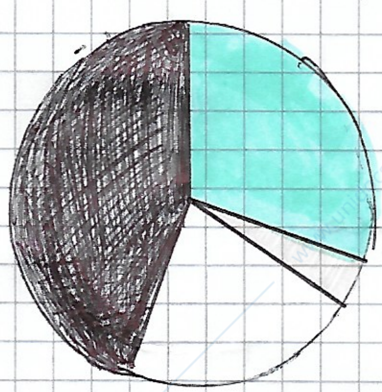
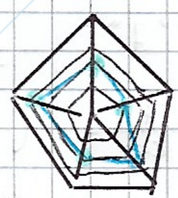


Diagramma polare



MEDIE

- Media aritmetica semplice, si usa per calcolare la media es. dei voti a scuola

$$M = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_n}{n}$$

- Media aritmetica ponderata, quando uno stesso valore si presenta più volte.

$$M = \frac{x_j \cdot f_j}{f_j}$$

x_1 $f_1 = 3$
x_2 $f_2 = 5$
x_3 $f_3 = 1$

$$M = \frac{3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3}{3+5+1}$$

- scarti dalla media

5, 10, 8, 1, 1 $\quad M = \frac{25}{5} = 5$

scarti: 0, +5, +3, -4, -4

→ la somma degli scarti dalla media è sempre 0

es. 24, 28, 25, 29, 30, 18

a. media $= \frac{154}{6} = 25{,}6$

b. voto fin. med. 26 $= \frac{136 + x}{6} = 26$

$x = 20$

c. voto med 26 $= \frac{154 + x}{7} = 26 \quad x = 28$

- Media di ~~...~~ geometrica → se tutti i valori sono positivi

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots\, x_n}$$

- incremento medio:

- Media quadratica, viene utilizzata per mettere in evidenza i valori che si scostano molto dai valori centrali.

$$Q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2}{n}}$$

- Media armonica, usata quando ha significato il calcolo del reciproco di una certa grandezza

$$M = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$$

Scarto quadratico medio. $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N}}$

$X (12, 13, 15, 20)$ $\quad \mu = 15$ → Media arit.

$$\sigma = \sqrt{\frac{(12-15)^2 + (13-15)^2 + (15-15)^2 + (20-15)^2}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{9+4+0+25}{4}} = 3{,}082$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Le MEDIE (II)

① Mediana

Occupa la posizione centrale tra tutti i dati raccolti

→ Posto occupato:

$\frac{n}{2}$ se n è pari

$\frac{(n+1)}{2}$ se n è dispari

es.

n. figli	n. famiglie
1	7
2	4
3	5
	//16

Mediana: 8

② Mediana di dati raggruppati in classi

$$M = L_1 + \left(\frac{\frac{N}{2} - (\Sigma f_i)}{f_m}\right) \cdot C$$

Frequenza totale

Somma delle frequenze inferiori alla classe mediana

Ampiezza della classe mediana

Confine inferiore della classe mediana

Frequenza della classe mediana

es.

Stipendio	Frequenza
50 - 60	8
60 - 70	10
→ 70 - 80	16
80 - 90	14
90 - 100	10
100 - 110	5
110 - 120	3
	//66

Mediana semplice: 66:2=33

Applico la formula:

$$M = 70 + \left(\frac{\frac{66}{2} - 18}{16}\right) \cdot 10 = 79{,}37\,€$$

↳ Allo stesso modo posso calcolare Quartili $\left(\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}\right)$, Decili $\left(\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \dots\right)$ e Percentili $\left(\frac{1}{100}, \frac{2}{100}, \frac{3}{100} \dots\right)$

③ Moda

La moda è il valore che si presenta più frequentemente.
Se sono presenti due mode, si parlerà di "bimodali"

es.

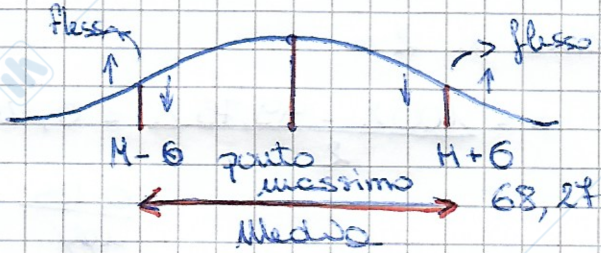
n. stanze	frequenza
1	5
2	7
3	5
4	3

Moda: 2

Curva di Gauss

le poligonali delle frequenze possono assumere un numero illimitato di forme

Curva a campana o curva normale, assunta ad esempio la distribuzione delle proprietà degli errori di una certa ~~espressione~~ misurazione



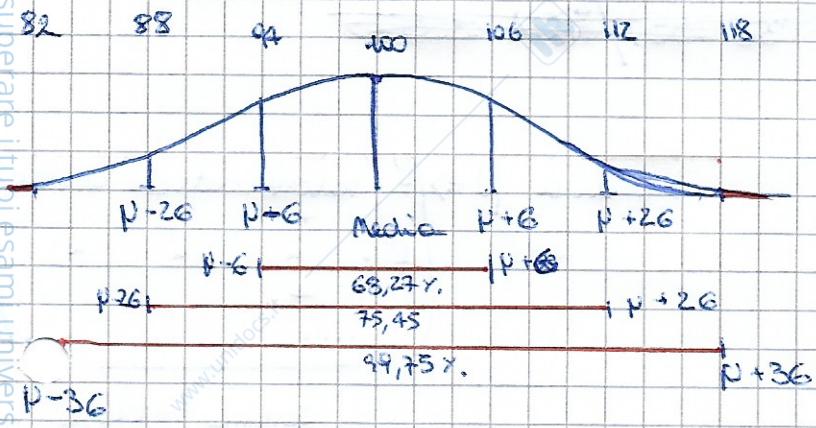
es. Curva Q.I. : posso calcolare la media μ e lo scarto quad. med. σ

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$$

mu → $\mu = 100$
sigma → $\sigma = 6$

$$f(x) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-100)^2}{2(6)^2}}$$

es. voglio sapere la f con $x = 15$
↳ Sostituisco x con 15



$Q(I) > 118$: le due zone rimanenti:

$$Q(I) = \frac{100\% - 97{,}73\%}{2}$$

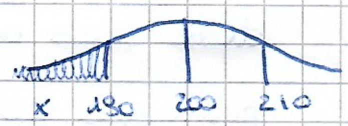
es.

8'000 pile
la durata può considerarsi gaussiana
$\mu = 95$ ore
$\sigma = 3{,}6$ ore
n pile = ? con durata tra 91,4 e 98,6 ore

$$\left.\begin{array}{l}\mu + \sigma = 98{,}6 \text{ ore}\\ \mu - \sigma = 91{,}4 \text{ ore}\end{array}\right\} 68{,}27\% \text{ di } 8'000 = \frac{68{,}27}{100} \cdot 8'000 =$$

es.

Una macchina confeziona di scatole di cacao in polvere con peso
$\mu = 200$ gr
$\sigma = 10$ gr
Supp. che la distribuzione dei pesi sia gaussiana
n = 64 scatole
x = ? pesano meno di 190 gr



$$x = \frac{100\% - 68{,}27\%}{2} = 15{,}87\% \qquad \frac{15{,}87}{100} \cdot 64 = 10{,}5$$

es.
20'000 individui
$\mu = 170$ cm
$\sigma = 10$ cm

(1) $x = ?$ con altezza tra 160 e 180 cm?

$$x = \frac{68{,}27}{100} \cdot 20'000 = 13\,654 \text{ persone}$$

(2) $x = ?$ più alto di 2 m

$$x = \frac{100\% - 99{,}75\%}{2} = 0{,}125\%$$

$$\frac{0{,}125}{100} \cdot 20'000 = 25 \text{ persone}$$

es.

Consumo benzina in l	Famiglie	
0-10	60	60
10-20	110	170
20-30	165	335
30-40	330	665
40-50	155	
50-60	130	
60-70	50	
	1000	

vedi foto tel.

~~$\mu = (60+110+165+330+155+130+50)/2 = 500$~~

→ f×v. centr

$\mu = 35$

$\sigma = 15$

Media $\mu \Rightarrow$ $\dfrac{f \cdot \text{valore centrale classe} + f \cdot \text{valore centrale classe} + \ldots}{\text{somma totale}}$

scosto quad. medio $\sigma \Rightarrow \dfrac{\Sigma (x_i - \mu)^2}{n}$

⚠ Se anziché avere valori compresi tra μ e +/- σ, allora si procede in questo modo:

I punteggi zeta

62

dove sasso ad un punteggio è quello che li trasforma in punteggi Z

punteggio 20 con una media di 23 -3 ~
" 25 " " " " 25 +2 ✓

Esprimere il valore in termini di scosti quadratici medi (prestare meta)

① Elencare i vari tipi di flesso e fare un esempio per ciascuno.

Il flesso è un punto in cui la funzione cambia concavità. + vedi prec.

② Proprietà dei numeri naturali

I numeri naturali sono un insieme di numeri infinito, ordinato, rappresentabile su una semiretta e discreto.

I numeri naturali sono chiusi rispetto a +, x, elevamento a potenza (ad eccezione di 0^0 e x^{-n})

e non sono chiusi rispetto a −, : e media.

③ Definizione di traslazione ed equazioni.

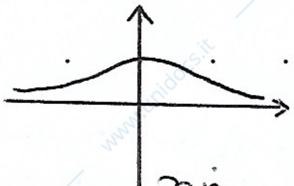
Dato il vettore V, la traslazione è la trasformazione geometrica che associa a P il punto P' tale che il vettore PP' è equipollente a V.

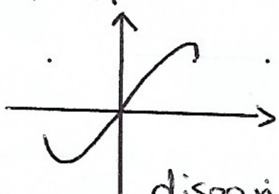
$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \quad v(a,b)$$

④ Definizione di funzione pari, funzione dispari ed esempi

$y = f(x)$ è una funzione pari in D se $f(-x) = f(x)$ $\forall x \in D$ (simmetrico rispetto all'asse y)

$y = f(x)$ è una funzione dispari in D se $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in D$ (simmetrico rispetto ad O)





⑤ Definizione di funzione continua

Una funzione $f(x)$ definita in un intorno di un punto x_0 è continua in x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
È inoltre continua se il limite destro e il limite sinistro coincidono.
Definito un intervallo $[a,b]$, una funzione è continua se è continua in ogni punto dell'intervallo.

⑥ Punti di discontinuità

Vedi prec.

⑦ Punti di non derivabilità

Quando la tangente è parallela all'asse y, la funzione è continua, ma non derivabile

① $f'_-(c) \neq f'_+(c)$ → punto angoloso

② $f'_-(c) = \pm\infty$ $f'_+(c) = \mp\infty$ → cuspide

③ $f'_-(c) = f'_+(c) = \pm\infty$ → flesso a tangente verticale

⑧ Definizione di rapporto incrementale e derivata (2)

Dati una funzione $y = f(x)$ definita in un intervallo $[a,b]$ e due numeri reali c e $c+h$ (con $h \neq 0$) interni all'intervallo, il rapporto incrementale di f nel punto c è:

è il coefficiente angolare passante per a e b
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Data una funzione $y = f(x)$, definita in un intervallo $[a,b]$, la derivata della funzione nel punto c interno all'intervallo, $f'(c)$, è il limite, se esiste ed è finito, per h tendente a zero, del rapporto incrementale di f relativo a c:

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

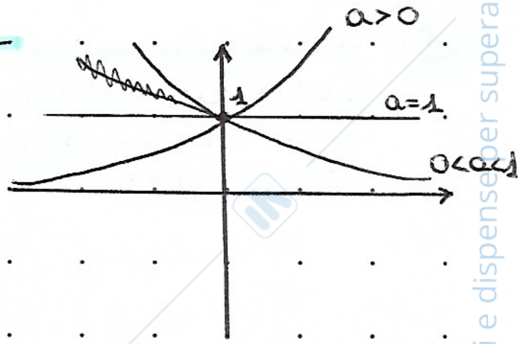
9. Perpendicolarità e parallelismo di rette nel piano cartesiano

Nel piano cartesiano due rette potrebbero essere parallele o perpendicolari.

Sono parallele $//$, se $m_a = m_b$ es. $y_a = 3x_a + 2$, $y_b = 3x_b + 8$ → sono $//$, stesso m.

Sono perpendicolari $\perp$, se $m_a = -\frac{1}{m_b}$ $(m_a \cdot m_b = -1)$ es. $\begin{cases} y_a = 3x + 2 \\ y_b = -\frac{1}{3}x + 4 \end{cases}$

10. Proprietà della funzione esponenziale



$y = a^x$ con $a > 0$

- $D = \mathbb{R}$. Codominio $= \mathbb{R}^+ - \{0\}$. (Cod $= x > 0$.
- No int. con x, ma int. in y → $(0,1)$
- Se $a > 1$ sempre crescente.
  Se $a < 1$ sempre decrescente
  Se $a = 1$ costante e vale 1

11. Definizione di logaritmo di un numero e proprietà

Il logaritmo di base a di b è l'esponente da dare ad a per ottenere b. $a^{\log_a(b)} = b$

Proprietà: $\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$

$\log_a(b^c) = c \log_a(b)$

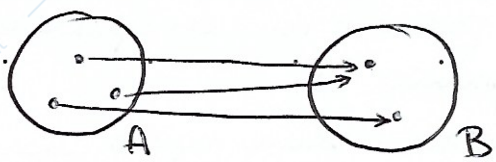
$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

$\log_a b = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$

$\log_a b = \frac{1}{\log_b(a)}$

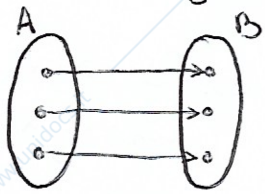
12. Definizione di funzione

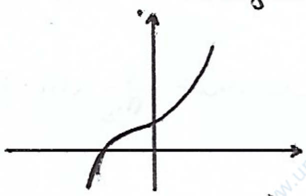
$\forall x \in A \ \exists!\, y \in B \quad y = f(x)$. Per ogni elemento di A esiste uno e un solo elemento di B



13) Funzione biunivoca (con esempio)

La funzione biunivoca (o biiettiva) è una funzione sia iniettiva (ogni elemento di B è immagine di al più un elemento di A) sia suriettiva (ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A). (1=1)



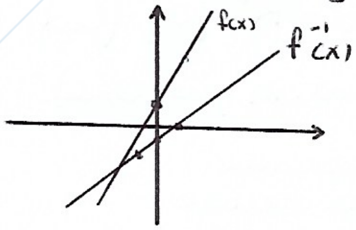


14) Funzione inversa (con esempio)

Data la funzione biiettiva f da A a B, la funzione inversa di f è la funzione biiettiva f^{-1} da B ad A che associa ad ogni y di B il valore x di A tale che $y=f(x)$

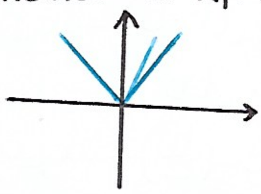
$f(x) = 2x+1$

$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$



15) Legame tra continuità e derivabilità di una funzione (2)

Se una funzione è derivabile, allora è anche continua (come garantito dal teorema). Il viceversa non è vero.
Ad esempio la funzione $f(x)=|x|$ è continua in R, ma non è derivabile in $x=0$ (punto angoloso)



16) Dare la definizione di simmetria assiale e scrivere l'equazione rispetto all'asse x

Fissata nel piano una retta a, una simmetria assiale è una trasformazione geometrica che ad ogni punto P fa corrispondere un punto P' tale che a è asse del segmento PP'.

Le equazioni della simmetria assiale rispetto all'asse x sono: $\begin{cases} x'=x \\ y'=-y \end{cases}$

(17) Definire la simmetria centrale e scrivere le equazioni della simmetria centrale di centro $O(0,0)$.

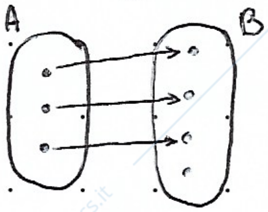
Si definisce simmetria centrale rispetto ad un punto O, la corrispondenza biunivoca tra i punti del piano che associa ad ogni punto P il punto P' tale che il punto O sia il punto medio del segmento PP'.

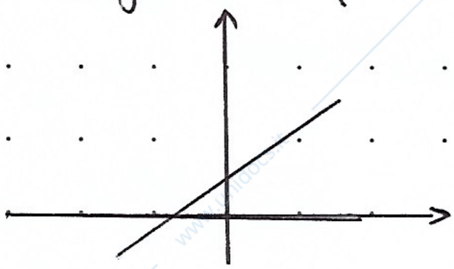
Equazioni della simmetria centrale di centro l'origine $(0,0)$:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

(18) Funzione iniettiva

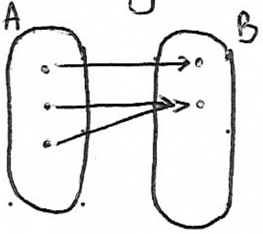
Se ogni elemento di B è immagine di al più un elemento di A

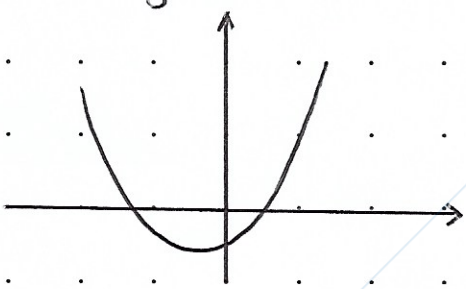




(19) Funzione suriettiva

Se ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento A





(20) Funzione composta

Date le due funzioni $f: A \to B$ e $g: B \to C$, con $f \circ g$ o $y = g(f(x))$ indichiamo la funzione, detta funzione composta, da A a C che si ottiene associando ad ogni x di A l'immagine mediante g dell'immagine di x mediante f.