[MB] Calcolo delle probabilità - Esercizi per l'esame

Probabilità e Statistica

Politecnico di Torino

5 pag.

Nome e matricola: ______________________________

04AGG — Calcolo delle probabilità
Esercizi per l'esame del 8 luglio 2002

Il tempo della prova è 2 ore. Usare in linea di massima gli spazi previsti sulle schede; allegare eventuali altri fogli se manca lo spazio. Nessun documento è ammesso, salvo questi fogli. Il valore dei singoli esercizi è indicato.

1 Elementari — 7 punti

1.1 Combinatoria

Quante password di 8 caratteri si possono formare con un alfabeto di 21 lettere minuscole e 10 cifre con le regole:

1. almeno due cifre
2. almeno 2 lettere

1.2 Binomiale

Se la probabilità di colpire un bersaglio è 0.2 e si fanno prove indipendenti, quale è la probabilità di colpire almeno k volte se si fanno $5k$ prove?

1.3 Binomiale

1. Quale è la probabilità di ottenere un punto pari lanciando 2 dadi? E lanciandone 3?
2. Se si lanciano due dadi, quale è la probabilità che siano entrambi pari? Se si lanciano tre dadi, quale è la probabilità che due siano pari e uno dispari?

1.4 Ipergeometrica

In una popolazione di 1000 persone 350 sono soddisfatti e 650 insoddisfatti. In un sondaggio su un campione di 20, quale è la probabilità che almeno la metà si dichiari soddisfatta?

1.5 Esponenziale

Il tempo di attesa di un guasto ha legge esponenziale con valor medio $\mu = 11$ mesi. Calcolare la probabilià che non ci sia guasto per 6 mesi.

2 Facili — 8 punti

2.1 Combinatoria

Un carattere della scrittura Braille è formato forando almeno uno dei vertici di una griglia di sei punti disposti in tre righe sovrapposte di due. Ad esempio la griglia senza fori e il carattere M sono riportati accanto.

1. Quanti sono i caratteri Braille possibili?
2. Quanti sono i caratteri Braille formati da quattro punti?
3. Estratto a caso un carattere di quattro punti, quale è la probabilità che i quattro punti formino un quadrato o un rettangolo?

RISPOSTE: $2^6 - 1$, $\binom{6}{4}$, $\frac{3}{\binom{6}{4}}$.

2.2 Indipendenza

Si effettuano tre tiri verso un medesimo bersaglio. Le probabilità di colpirlo al primo, al secondo e al terzo colpo sono rispettivamente eguali a $p_1 = 0.4$, $p_2 = 0.5$, $p_3 = 0.7$.

1. Calcolare la probabilità di colpire il bersaglio una sola volta in tre tiri.
2. Calcolare la probabilità di colpire il bersaglio al più una volta in tre tiri.
3. Calcolare la probabilità di colpire il bersaglio almeno una volta in tre tiri.

RISPOSTE: $a = .4 \times .3 \times .3 + .6 \times .5 \times .3 + .6 \times .5 \times .7$, $a + .6 \times .5 \times .3$, $1 - .6 \times .5 \times .3$.

2.3 Media e varianza

Sia X una variabile aleatoria di legge binomiale $\mathrm{Bin}(20, 0.25)$. Quale è la densità di una variabile aleatoria Y di legge normale $N(\mu, \sigma^2)$ tale che X e Y abbiano la stessa media e la stessa varianza?
Risposta: $\frac{1}{\sqrt{2\pi(3.75)}} \exp\left(-\frac{(y-5)^2}{2(3.75)}\right)$.

2.4 Probabilità condizionata

Tre monete, indistinguibili esteriormente, hanno rispettivamente probabilità di testa pari a $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$. Si prende una moneta a caso e la si lancia più volte. Determinare:

1. la probabilità che non esca mai testa su due lanci;
2. la probabilità che esca esattamente una testa su due lanci;
3. la probabilità che la moneta estratta sia quella equilibrata se non esce mai testa su tre lanci;
4. la probabilità che esca testa al secondo lancio sapendo che è uscita testa al primo lancio.

RISPOSTE: $\frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{2}{3}\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\frac{3}{4}\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3} \times 2 \times \left(\frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\frac{3}{4}\right)$, $\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^2}$, $\frac{\frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{4}\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{4}}$.

2.5 Legge normale

Sia Y una variabile aleatoria con legge normale $\mathrm{N}(2, 4)$. Indichiamo con G la funzione

$$G(z) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \qquad \text{(nota l'estremo inferiore!)}$$

Calcolare in funzione di G le probabilità seguenti:

1. $P(Y \leq 6)$
2. $P(0 \leq Y \leq 4)$

RISPOSTE: $\frac{1}{2} + G(2)$; $2G(2)$.

2.6 Ipergeometrica

Un dispositivo scenico di un teatro di marionette comporta 5 lampade di potenza 25, 40, 60, 75, 100. Ogni lampada è comandata da un pulsante. Un operatore improvvisato trovando accese le lampade 40 e 60, schiaccia a caso 3 dei 5 pulsanti nella speranza di ottenere l'illuminazione completa. Sia X la potenza totale dopo la manovra. Calcolare le quantità seguenti.

1. La probabilità che tutte le lampade siano accese
2. La probabilità che una sola lampada sia accesa.
3. La legge di X.

RISPOSTE: $\frac{1}{10}$; $\frac{\binom{2}{2}\binom{3}{1}}{\binom{5}{3}} = \frac{3}{10}$; uniforme sui 10 valori 25, 75, 100, 140, 160, 165, 185, 215, 235, 300.

3 Regolari — 9 punti

3.1 Campionamento da un'urna

Un'urna contiene 3 biglie bianche e 2 biglie nere.

1. Calcolare la probabilità, che, estraendo senza reimbussolamento 3 biglie, almeno una sia nera.
2. Ripetere il punto precedente supponendo il reimbussolamento.
3. Sia N il numero di estrazioni senza reimbussolamento da effettuare per estrarre una biglia nera. Determinare e rappresentare graficamente la funzione di ripartizione di N, quindi calcolarne il valore atteso.

RISPOSTE: $1 - \frac{\binom{3}{3}\binom{2}{0}}{\binom{5}{3}}$; $1 - \left(\frac{3}{5}\right)^3$; $P(N=1) = \frac{2}{5}$, $P(N=2) = \frac{3}{5}\frac{2}{4}$, $P(N=3) = \frac{3}{5}\frac{2}{4}\frac{2}{3}$, $P(N=4) = \frac{3}{5}\frac{2}{4}\frac{1}{3}\frac{2}{2}$, $P(N=5) = 0$; —.

3.2 Distribuzione normale e binomiale

I componenti elettronici prodotti dalla nostra azienda hanno un tempo di vita con distribuzione normale di media 10 mesi e varianza 6 mesi^2, indipendentemente uno dall'altro. Mettiamo in funzione contemporaneamente 4 di questi componenti, e facciamo una scommessa su quanti di questi saranno ancora funzionanti tra 11 mesi. Se tutti e quattro saranno funzionanti allora guadagneremo 1000 euro, se tre di questi saranno funzionanti guadagneremo 500 euro, non guadagneremo niente se due saranno funzionanti, e perderemo 500 euro se ne funzioneranno uno o nessuno. Sia X il risultato della scommessa.

1. Si tracci il grafico della funzione di ripartizione di X.
2. Si determinino il valore atteso e la varianza di X.

RISPOSTE: costante a tratti, con salti in -500, 0, 500, 100, di ampiezza pari alle probabilità calcolate con la legge $\mathrm{Bin}\left(4, P\left(Z > \frac{11-10}{\sqrt{6}}\right)\right)$, $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$; usare le formule di definizione.

3.3 Canale binario

In un canale binario non simmetrico il carattere 1 è trasmesso con probabilità $\pi_1 = 0.60$ ed è ricevuto con probabilità pari a 0.55. La probabilità transizione da 1 a 0 vale $p_{10} = 0.09$. Sia E l'evento "errore" e R_i l'evento "ricevuto i". Calcolare:

1. p_{01}.
2. $P(E)$.
3. $P(E|R_0)$.

RISPOSTE: 0.01; 0.058; 0.12.

3.4 Somma di indipendenti

Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti, la prima con legge di Poisson di media $\lambda = 2$ e la seconda con legge di Bernoulli con probabilità di successo $p = \frac{1}{4}$. Sia $Z = X + Y$.

1. Calcolare media e varianza di Z.
2. Calcolare la legge di Z.

RISPOSTE: $2 + \frac{1}{4}$, $2 + \frac{1}{4}\frac{1}{3}$; $\exp(-2)\frac{3}{4}$ se $k = 0$, $\exp(-2)\left(\frac{2^k}{k!}\frac{3}{4} + \frac{2^{k-1}}{(k-1)!}\frac{1}{4}\right)$, se $k \geq 1$.

3.5 Densità congiunta

Si consideri una coppia di variabili (X, Y) avente densità congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} \alpha x & \text{se } (x,y) \in S \\ 0 & \text{se } (x,y) \notin S, \end{cases}$$

dove $S = \{(x,y) \in \mathbb{R} : 1 \leq x + y \leq 3, -1 \leq y - x \leq 1\}$ (fare il disegno).

1. Si determini il valore da assegnare ad α affinchè f sia una funzione di densità.
2. Si calcolino le funzioni di ripartizione marginali di X ed Y rispettivamente.
3. Si dica se X ed Y sono stocasticamente indipendenti e/o incorrelate.
4. Si determini la probabilità che (X, Y) assuma valori in $[1, +\infty) \times [0, 1]$.
5. Si determini la probabilità dell'evento $\{Y \geq 1\}$ condizionato a $\{X \geq 1\}$.

3.6 Densità congiunta

Data la funzione :

$$f(x,y) = ce^{-x^2-y}u(y), \qquad c \in \mathbf{R}, \qquad u(y) = (y > 0) = 1_{]0,+\infty[}$$

1. Determinare c in modo che la funzione $f(x,y)$ sia la densità congiunta di una coppia di variabili aleatorie (X, Y).
2. Determinare le densità marginali f_X e f_Y e riconoscerle.
3. Le variabili X e Y sono indipendenti?

RISPOSTE: $c = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$; $\mathrm{N}(0, \frac{1}{2})$, $\mathrm{Exp}(1)$; si.

3.7 Calcoli di densità

1. Se la variabile aleatoria X ha legge $N(0,1)$, calcolare la densità della variabile aleatoria $Y = X^2$. Riconoscere che la legge ottenuta è una Gamma.
2. Se le variabili aleatorie T_1 e T_2 sono indipendenti ed hanno legge esponenziale con lo stesso parametro λ, calcolate la densità di $Y = T_1 + T_2$.

4 Difficili — 8 punti

4.1 Bose-Einstein

Dieci biglie indistinguibili sono sistemate in quattro scatole numerate da 1 a 4 secondo la statistica di Bose-Eistein. Indichiamo con X_1, X_2, X_3, X_4 rispettivamente il numero di biglie in ciascuna scatola.

1. Qual è la probabilità di $\{X_4 = 0\}$?
2. Qual è la probabilità che tutte le biglie siano esattamente in due scatole?
3. Qual è la legge di X_1?

RISPOSTE: $\frac{\binom{12}{2}}{\binom{13}{3}}$; $\binom{4}{2}\frac{9}{\binom{13}{3}}$; —.

4.2 Schema di Bernoulli

Ricordiamo che uno schema di Bernoulli è una successione $X_1, X_2, \cdots$ di variabili aleatorie indipendenti, ciascuna delle quali rappresenta una prova binaria assumendo il valore 1 con probabilità p o il valore 0 con probabilità $q = 1 - p$. Le variabili aleatorie $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $T_1 = \inf\{k \mid X_k = 1\}$, $T_2 = \inf\{k > T_1 \mid X_k = 1\}$ sono ripettivamente il numero di successi in n prove e il tempo di arrivo del primo 1 e del secondo 1.

1. Calcolare $p_2(n) = P(T_2 = n)$ e $E(T_2)$.
2. Calcolare la probabilità condizionata $P(T_i = h|S_n = k)$, $i = 1, 2$ specificando attentamente i vari casi in funzione dei valori rispettivi dei parametri h, n, k.

RISPOSTE: Poisson$(2,p)$; $\frac{\binom{n-h}{k-1}}{\binom{n}{k}}$, $\frac{\binom{n-h}{k-2}}{\binom{n}{k}}$.

4.3 Schema di Bernoulli

Ricordiamo che uno schema di Bernoulli è una successione $X_1, X_2, \cdots$ di variabili aleatorie indipendenti, ciascuna delle quali rappresenta una prova binaria assumendo il valore 1 con probabilità p o il valore 0 con probabilità $q = 1 - p$. Le variabili aleatorie $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $T_1 = \inf\{k \mid X_k = 1\}$, $T_2 = \inf\{k > T_1 \mid X_k = 1\}$ sono ripettivamente il numero di successi in n prove e il tempo di arrivo del primo 1 e del secondo 1.

1. Detto $S_2 = T_2 - T_1$ il tempo passato tra il primo e il secondo 1, calcolare la legge congiunta di T_1, S_2. Sono indipendenti?
2. Calcolare la legge congiunta di T_2, S_2. Sono indipendenti?

RISPOSTE: Si; No.

4.4 Canale binario

Tre caratteri equiprobabili a, b, c, sono codificati 000, 001, 010, rispettivamente. Per ogni carattere sono effettuate tre trasmissioni su un canale simmetrico con transizione $p = 10^{-3}$, che supponiamo indipendenti condizionatamente al carattere trasmesso. Se si riceve una delle altre parole binarie si rischiede la ritrasmissione.

1. Quale è il numero medio di trasmissioni richieste?
2. Quale è la probabilità di transizione da a a b?

RISPOSTE: Se N conta il numero di trasmissioni per simbolo, $P(N = k) = 1/3\{q_1(1-q_1)^{k-1} + q_2(1-q_2)^{k-1} + q_3(1-q_3)^{k-1}\}$, $q_1 = (1-p)^3 + 2p(1-p)^2 = 0.998990010$, $q_2 = (1-p)^3 + p(1-p)^2 + (1-p)p^2 = 0.998001999$, $q_3 = q_2 = 0.998001999$, $E[N] = 1/3\{1/q_1 + 1/q_2 + 1/q_3\} = 1.001668668$; $P(Y = b/X = a) = p(1-p)^2/q_1 = 0.999 10^{-3}$ (L. Muscariello).

4.5 Variabili Gamma

Un dispositivo monta tre parti identiche e funziona se almeno due su tre funzionano. I tempi al guasto (durata) dei tre dispositivi sono variabili aleatorie indipendenti T_1, T_2, T_3 ed equidistribuite di legge Gamma$(2, \lambda)$. Il tempo medio al guasto è $E(T_i) = 10^3$, $i = 1, 2, 3$. Sia S il tempo al guasto del dispositivo.

1. Calcolate $P(S > s)$ con $s > 0$.
2. Calcolare la densità di S.

RISPOSTE: $P(S > s) = 3R(s)^2 - 2R(s)^3$, $R(s) = P(T_i > s)$; derivare.

4.6 Cambiamento di variabile e mistura

Siano X ed Y due variabili casuali aventi distribuzione esponenziale di identico parametro Λ aleatorio e uguale a 0.1 con probabilità 1/2 o a 0.2 con probabilità 1/2. Si supponga che X e Y siano condizionatamente indipendenti, dato Λ. Siano poi $Z = \min(X, Y), S = X + Y$. Si calcolino:

1. le funzioni di ripartizione (o, volendo, di densità) delle variabili Z ed S;
2. la legge congiunta di Z ed S;
3. il valore atteso di S;
4. la probabilità che almeno una tra X ed Y assuma valore maggiore o uguale a 5.

RISPOSTE: $Z \sim \frac{1}{2}\text{Exp}(0.1) + \frac{1}{2}\text{Exp}(0.2)$, $S \sim \frac{1}{2}\Gamma(2, 0.1) + \frac{1}{2}\Gamma(2, 0.2)$; mistura di densità esponenziali; $\frac{1}{2}\frac{2}{0.1} + \frac{1}{2}\frac{2}{0.2}$.