②

...uetto in cui
→ rotazionalizzo

SISTEMI LINEARI
→ è un sistema di m equazioni lineari nelle n incognite $(x_1, \dots x_n)$ a coefficienti reali a_{ij} ①

esempio:

$A \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ → matrice dei coefficienti

$b \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ → vettore termini noti

$B = [A|b]$ MATRICE COMPLETA DEL SISTEMA LINEARE

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \Longrightarrow x \to \text{vettore incognite}$$

~~SOLUZIONI SISTEMA~~
- ~~1 soluzione se $r(A)=r(B)$ e $k \neq$ null~~
- ~~∞ soluzioni se $r(A)=r(B)$ e $k =$ null~~
- ~~∅ soluzione se $r(A) \neq r(B)$ e $k =$ null~~

TEOREMA DI CRAMER
$Ax=b$ → A matrice quadrata di ordine n

$x_1 = \dfrac{\det \boxed{A_1}}{\det A}$ → sostituisco 1 riga o colonna con b

1 soluzione se e solo se $\det A \neq 0$

1) prima si calcola il det di una opportuna matrice quadrata parametrica e si determinano per quali valori del parametro tale determinante si annulla

2) per i valori del parametro che annullano il det calcolato in ① si determina la caratt. delle matrici usando il teo di Kronecker

METODO DELL'INVERSA
$\boxed{x = A^{-1} \cdot b}$

METODO PER SOSTITUZIONE in un SISTEMA con graffa

TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI

3) la discussione dei vari casi si svolge utilizzando il teorema di Rouché-Capelli

- x avere soluzioni $r(A) = r(B)$

Quando $r(A) = r(B) = r$ → sistema ammette ∞^{n-r} sol

- Determinazione soluzioni

① se $r(A) < r(A|b)$ → ∅ soluzioni

② se $r(A) = r(A|b)$ → ∃ soluzioni (1 o ∞)

②A se $r(A) = r(A|b) = n$ → 1 soluzione (se $n = r$) → incognite

se $r(A) = r(A|b) < n$ → $\infty^{n-r(A)}$ soluzioni se $r<n$

viene rimborsata dal
mutuatario nella sua
interezza
debito tot - debito residuo
sommatoria quote capitali
rate = debito iniziale
ale

ali ancora da

$I_k = D_{k-1} \cdot i_k$

$R_k = I_k + C_k$ $E_k = E_{k-1} + C_k$ $D_k = D_{k-1} - C_k$

$E_k + D_k = D_{TOT}$

AMMORTAMENTO "BULLET" → le prime n-1 quote capitali sono nulle e l'ultima è uguale al debito iniziale $C_k = 0$, $C_n = D_0$

AMMORTAMENTO ITALIANO → in cui le QUOTE CAPITALI hanno tutte lo stesso importo $\boxed{C_k = \frac{D_0}{n}}$ → QUOTA CAPITALE = DEBITO TOTALE SU n RATE

AMMORTAMENTO IN PROGRESSIONE GEOMETRICA → interessi decrescenti, prima + alti poi + bassi
caso particolare

AMMORTAMENTO FRANCESE → a rate costanti in cui ~~le~~ i tassi di interesse effettivi ~~quote capitali~~ sono costanti $R_k = C_k = \frac{D_0}{n}$

$$\boxed{R = \frac{D_0}{a_{\overline{n}|i}}} \qquad \boxed{D_k = R \cdot a_{\overline{n-k}|i}}$$

FORMULE

- $R_k = I_k + C_k$ RATA = QUOTA INTERESSE + QUOTA CAPITALE
- $I_k = i_k \cdot D_{k-1}$ QUOTA INTERESSI = DEBITO RESIDUO DELLA SCADENZA PRECEDENTE · TASSO DI INTERESSE
- $D_k = D_{k-1} - C_k$ DEBITO RESIDUO = DEBITO RESIDUO ALLA SCADENZA PRECEDENTE − QUOTA CAPITALE
- $E_k = E_{k-1} + C_k$ DEBITO ESTINTO = DEBITO ESTINTO ALLA SCADENZA PRECEDENTE + QUOTA CAPITALE
- $D_0 = D_k + E_k$ DEBITO INIZIALE = DEBITO ESTINTO + DEBITO RESIDUO
- $D_n = 0$ ed $E_n = D_0$

	0	TOT

...NE CO PRINCIPIO
...o quando la somma mutuata viene restituita al mutuatario nella sua interezza
...).est = Debito tot − debito residuo
sommatoria quote capitali

T.A.N → tasso di interesse che cerca di valutare il finanziamento senza prendere in considerazione alcun costo aggiuntivo obbligatorio (TASSO ANNUO NOMINALE)

TAE → TASSO ANNUO EFFETTIVO

TAEG → tasso di interesse che cerca di valutare il finanziamento tenendo in considerazione anche tutti i costi aggiuntivi obbligatori (TASSO ANNUO EFFETTIVO GLOBALE)

INVESTIMENTO → prima uscite poi entrate

FINANZIAMENTO → prima entrate e poi uscite

RISULTATO ECONOMICO ATTUALIZZATO

$\boxed{REA} \to F_0 + \frac{F_1}{(1+i)} + \frac{F_2}{(1+i)^2} + \dots + \frac{F_n}{(1+i)^n} = \sum_{k=0}^{n} F_k \cdot (1+i)^{-k}$

tra + operazioni finanziarie scegliere quelle con REA maggiore

$\boxed{TIR} \to REA = 0$ usando come x $(1+i)$ $\quad \lambda \geq 0$

TASSO INTERNO DI RENDIMENTO
$REA(0) > 0$ investimento → scegliere op. con TIR >
$REA(0) < 0$ finanziamento → scegliere op. con TIR <

TEOREMA → se esiste un tasso di interesse $i>0$ tale che: $REA(0) \cdot REA(i) < 0$ allora l'operazione finanziaria ammette almeno un TIR nell'intervallo $[0, i]$

$TAN = k\, TIR_F$ $\quad$ $REA(0) > 0$ investimento, $REA(0) < 0$ finanziamento $\quad$ $TAN \leq TAE \leq TAEG$

$TAE = (1 + TIR_F)^k - 1$

$TAEG = (1 + TIR_G)^k - 1$

TAN → TASSO NOMINALE ANNUO → tasso di interesse che cerca di valutare il finanziamento senza prendere in considerazione alcun costo aggiuntivo obbligatorio

$\boxed{TAEG}$ → tiene in considerazione anche tutti i costi aggiuntivi obbligatori

x valutare correttamente un fin.
TASSO ANNUO EFFETTIVO GLOBALE

TAE: TASSO ANNUO EFFETTIVO

$\dots + 8x \dots - x^2y - 36x^2 + 288x + 12xy - 36y$

$(x-6)^2(-x^2+8x-y)+10$

$f_x = 2(x-6)(-x^2+8x-y) + (x-6)^2(-2x+8)$

$f_y = -(x-6)^2$

$x = 6$

$R \cdot s_{\overline{n}|i}(1+i)$

ATA
a pH mentre eliettina ha

R R
+n-1 p+n
M

$M - R \cdot s_{\overline{n}|i}$

10

OPERAZIONE DI LEASING

(tipo affitto) → operazione finanz. in regime di capit. composta in cui si affitta un bene di valore V_b che prevede il versamento di n rate costanti periodiche. Alla scadenza n si può decidere di restituire il bene o di acquistarlo pagando un valore di riscatto V_r

V_b	R	R	R	R	…	R	R, V_r
0	1	2	3	4	…	n-1	n

$V_b = V + V_r$

- se le rate sono posticipate → $V_b = \underbrace{R \cdot a_{\overline{n}|i}}_{\text{valore attuale}} + \underbrace{V_r (1+i)^{-n}}_{\text{valore di riscatto portato a zero}}$

- se le rate sono anticipate → $V_b = R \cdot a_{\overline{n}|i} \cdot (1+i) + V_r (1+i)^{-n}$

AMMORTAMENTO → modalità con cui si rimborsano dei mutui ovvero delle somme ricevute in prestito

TABELLA AMMORTAMENTO

scadenze	tasso di interesse	rata	quota interessi	quota capitale	debito residuo	debito estinto
k	i_k	R_k	I_k	C_k	D_k	E_k
0	–	–	–	–	TOT	0
1						
…						
k-1						
k						
…						
n-1						
n					0	TOT

Il mutuatario si deve impegnare a restituire e remunerare, quindi a rimborsare la somma mutuata

CONDIZIONE DI CHIUSURA ELEMENTARE (O PRINCIPIO)

Il contratto si considera soddisfatto quando la somma mutuata viene restituita al mutuatario nella sua interezza

D_k = Debito tot − debito estinto

↓

debito residuo → viceversa Deb. est = Debito tot − debito residuo

sommatoria quote capitali versate = debito iniziale

Rata = quota interessi + quota capitale

$C_n = D_{n-1}$

Debito residuo = somma quote capitali ancora da pagare

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

3

DERIVATA DIREZIONALE $P(x_0,y_0)$ $d(d_1,d_2)$

$\varphi'(0) = \nabla f(x_0,y_0) \cdot (d_1,d_2)$ → PRODOTTO SCALARE

DERIVATA DIREZIONALE SECONDA

$\varphi''(0)$ = PRODOTTO SCALARE TRA LA DIREZIONE D ed IL prodotto (matriciale!) dato dalla MATRICE HESSIANA PER LA DIREZIONE $= (d_1,d_2) \cdot H(x_0,y_0) d$

DIREZIONI DI CRESCITA

- se $f'(0) > 0$ → crescita locale
- se $f'(0) < 0$ → decrescita locale
- se $f'(0) = 0$ → derivata seconda

CURVE DI LIVELLO

$f(x,y) = k$

da ricordare:

CIRCONFERENZA: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

$C(x_0,y_0)=\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$ $r=\sqrt{x_0^2+y_0^2-c}$

PARABOLA: $V\left(-\frac{b}{2a}, \text{sostituisco } x\right)$

ELLISSE: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ fuochi: $F_1(-c,0)$ $F_2(c,0)$

EQUAZIONE RETTA TANGENTE AD UNA CURVA

PRODOTTO SCALARE TRA:

$$(x-x_0, y-y_0)\nabla f(x_0,y_0)=0$$

TANGENZA TRA 2 CURVE $f(x,y)$ e $g(x,y)$

$$\nabla f(x_0,y_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0)$$

OTTIMIZZAZIONE LIBERA

MAX e MIN: $\max f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$

$\min f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$

PER TROVARE PUNTI CRITICI O STAZIONARI → $\nabla f(x_0,y_0)=0$

- se $\nabla f(x_0,y_0)=0$ e H e' definita POSITIVA cioe' $\det > 0$ e $f_{xx}>0$ allora $P(x_0,y_0)$ MIN RELATIVO
- se $\nabla f(x_0,y_0)=0$ e H e' definita NEGATIVA cioe' $\det > 0$ e $f_{xx}<0$ allora $P(x_0,y_0)$ MAX RELATIVO

se $\det H < 0$ oppure f_{xx} e f_{yy} DISCORDI → H indefinita → PUNTO SELLA