COGNOME: **NOME:**

MATRICOLA UCSC:

Simulazione della prova intera

[12 esercizi; 31 punti disponibili; 45 minuti disponibili; in remoto]

La valutazione finale sarà pari ad 7 punti + il punteggio ottenuto nelle domande a scelta multipla.

$\boxed{1}$ [2 punti] Data la funzione $f(x) = \ln(x^2)$, il dominio naturale della funzione è:

A) l'intervallo $(-\infty, 0)$;

B) l'intervallo $(0, +\infty)$;

C) nessuna delle altre affermazioni è corretta;

D) l'insieme $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

$\boxed{2}$ [2 punti] Data la funzione $f(x) = \ln(x^2)$, la funzione ha:

A) simmetria pari;

B) simmetria dispari;

C) nessuna delle altre affermazioni è corretta;

D) $f(x) = w(u(x))$ con $w(x) = x^2$ e $u(x) = \ln x$.

$\boxed{3}$ [2 punti] Data la funzione $f(x) = \ln(x^2)$,

A) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$;

B) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^+$;

C) nessuna delle altre affermazioni è corretta;

D) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0^+$.

$\boxed{4}$ [2 punti] Data la funzione $f(x) = \ln(x^2)$, la funzione è strettamente:

A) crescente in $(-\infty, 0)$;

B) decrescente in $(-\infty, +\infty)$;

C) nessuna delle altre affermazioni è corretta;

D) crescente in $(0, +\infty)$.

$\boxed{5}$ [2 punti] Data la funzione $f(x) = \ln(x^2)$, la funzione è strettamente:

A) convessa in $(-\infty, 0)$;

B) concava in $(0, +\infty)$;

C) nessuna delle altre affermazioni è corretta;

D) concava in $(-\infty, +\infty)$.

$\boxed{6}$ [2 punti] Dato il sistema parametrico (il parametro reale è t)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -3 \\ 2x_2 - 2x_1 + x_3 = 1 \\ -x_2 - x_3 - tx_1 = 0 \end{cases}$$

il determinante della matrice dei coefficienti è pari a:

A) $5(t+1)$;

B) $5t$;

C) nessuna delle altre affermazioni è corretta;

D) $5(t-1)$.

$\boxed{7}$ [2 punti] Dato il sistema parametrico (il parametro reale è t)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -3 \\ 2x_2 - 2x_1 + x_3 = 1 \\ -x_2 - x_3 - tx_1 = 0 \end{cases}$$

A) il sistema è impossibilie se $t = 1$;

B) il sistema è impossibilie se $t = 0$;

C) nessuna delle altre affermazioni è corretta;

D) il sistema è determinato se $t = -1$.

8 [2 punti] Dato il sistema parametrico (il parametro reale è t)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -3 \\ 2x_2 - 2x_1 + x_3 = 1 \\ -x_2 - x_3 - tx_1 = 0 \end{cases}$$

A) il sistema ammette ∞^2 soluzioni se $t = -1$;

B) il sistema ammette ∞^1 soluzioni se $t = 1$;

C) nessuna delle altre affermazioni è corretta;

D) il sistema ammette ∞^1 soluzioni se $t = 0$.

9 [2 punti] Dato il sistema parametrico (il parametro reale è t)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -3 \\ 2x_2 - 2x_1 + x_3 = 1 \\ -x_2 - x_3 - tx_1 = 0 \end{cases}$$

la soluzione (x_1^*, x_2^*, x_3^*) per $t = 2$ è tale che:

A) $x_1^* = -1$;

B) $x_1^* = 1$;

C) nessuna delle altre affermazioni è corretta;

D) $x_3^* = -1$.

10 [2 punti] Dato il sistema parametrico (il parametro reale è t)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -3 \\ 2x_2 - 2x_1 + x_3 = 1 \\ -x_2 - x_3 - tx_1 = 0 \end{cases}$$

la soluzione (x_1^*, x_2^*, x_3^*) per $t = -1$ è tale che:

A) $x_1^* = \alpha - 1$ e $x_2^* = \alpha$ con α reale qualsiasi;

B) $x_1^* = \alpha - 4$ e $x_3^* = \alpha$ con α reale qualsiasi;

C) nessuna delle altre affermazioni è corretta;

D) $x_2^* = \alpha - 3$ e $x_3^* = \alpha$ con α reale qualsiasi.

$\boxed{11}$ [2 punti] L'integrale

$$\int_0^1 \left(\frac{3-x}{4-x}\right) dx$$

è uguale a:

A) $\ln 3 - \ln 4 - 1$;

B) $\ln 3 + \ln 4 + 1$;

C) $\ln 3 - \ln 4 + 1$;

D) nessuna delle altre affermazioni è corretta.

$\boxed{12}$ [2 punti] Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\max_{x,y} (-x-y) \qquad \text{sotto il vincolo} \qquad -x+y^2=1.$$

Denotando con λ il moltiplicatore di Lagrange, la soluzione (x^*, y^*, λ^*) è tale che:

A) $x^* = -\frac{3}{4}$;

B) $\lambda^* = 4$;

C) $y^* = -1$;

D) nessuna delle altre affermazioni è corretta.

RISPOSTE CORRETTE

$\boxed{1}$ D.

$\boxed{2}$ A.

$\boxed{3}$ A.

$\boxed{4}$ D.

$\boxed{5}$ B.

$\boxed{6}$ A.

$\boxed{7}$ C.

$\boxed{8}$ C.

$\boxed{9}$ D.

$\boxed{10}$ A.

$\boxed{11}$ C.

$\boxed{12}$ A.

SOLUZIONE DEGLI ESERCIZI 1-5

Studio della funzione $f(x) = \ln\left(x^2\right)$

Si noti che

$$\ln\left(x^2\right) = \ln\left(|x|^2\right) = 2\ln\left(|x|\right) = \begin{cases} 2\ln x & \text{se } x > 0 \\ 2\ln(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Dominio, eventuali simmetrie ed intersezioni con gli assi, segno

Il dominio naturale $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ è simmetrico rispetto a $x = 0$. C'è simmetria pari

$$f(x) = \ln(x^2) = \ln\left((-x)^2\right) = f(-x) \text{ con } x \neq 0.$$

$x = 0 \notin D$ (niente intersezioni con asse ordinate di equazione $x = 0$).

D'ora in avanti studiamo la funzione $f(x)$ solo per $x > 0$ ($f(x) = 2\ln x$ per $x > 0$) per poi usare la simmetria pari nella descrizione del comportamento di $f(x)$ per $x < 0$ (in sostanza il grafico di f per $x < 0$ risulterà dalla riflessione del grafico di f per $x > 0$ rispetto all'asse delle ordinate di equazione $x = 0$).

La funzione $f(x) = 2\ln x$ per $x > 0$ è ben nota (risulta dalla moltiplicazione per lo scalare 2 della funzione elementare $x \mapsto \ln x$).

$$f(x) = 2\ln x = \begin{cases} < 0 & \text{se } 0 < x < 1 \\ = 0 & \text{se } x = 1 \\ > 0 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$(1, 0)$ è l'intersezione con l'asse delle ascisse di equazione $y = 0$.

Limiti significativi ed eventuali asintoti

$\lim_{x \to 0^+} 2 \ln x = -\infty$ ($x = 0$ è asintoto verticale destro);
$\lim_{x \to +\infty} 2 \ln x = +\infty$ (senza asintoto obliquo).

Derivata prima, monotonia ed eventuali estremi

$\frac{d}{dx} (2 \ln x) = \frac{2}{x} > 0$ per $x > 0$;
$f(x)$ è strett. cresc. in $(0, +\infty)$.

Derivata seconda e concavità/convessità

$\frac{d^2}{dx^2} (2 \ln x) = -\frac{2}{x^2} < 0$ per $x > 0$;
$f(x)$ è strett. concava in $(0, +\infty)$.

(Non richiesto)

Il grafico sommario

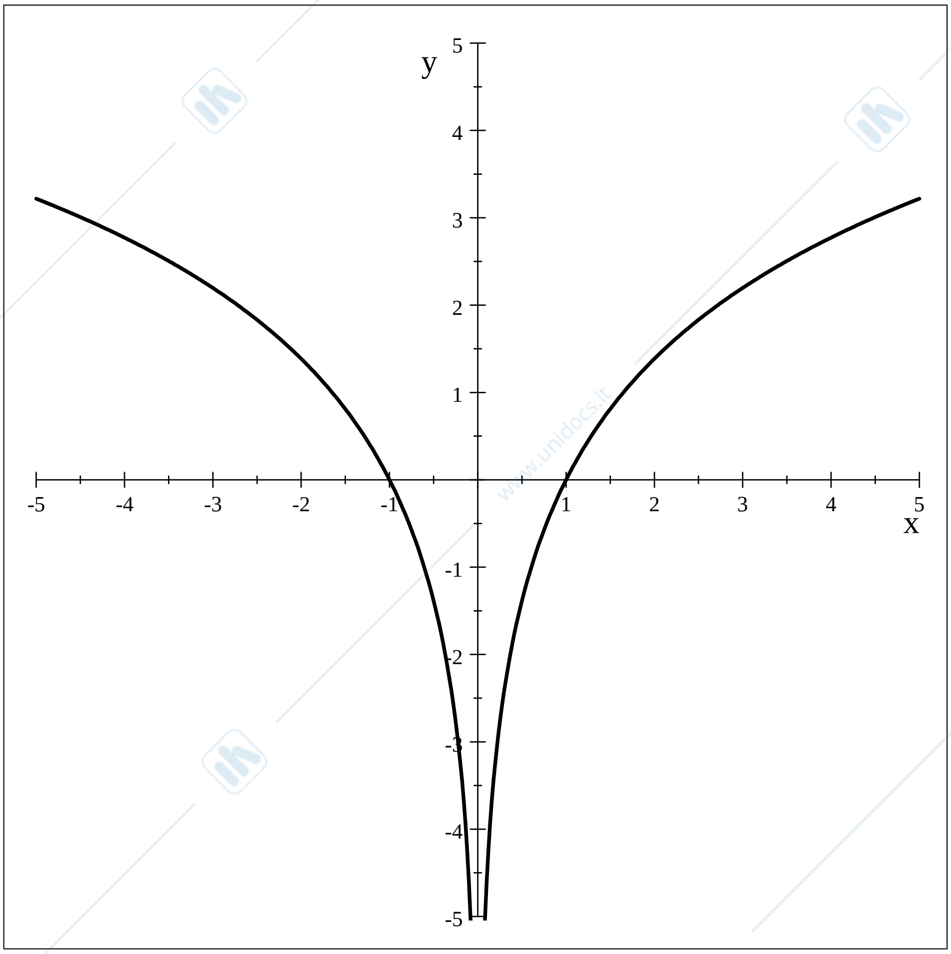


Grafico di $f(x) = \ln(x^2)$

SOLUZIONE DEGLI ESERCIZI 6-10

Il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -3 \\ 2x_2 - 2x_1 + x_3 = 1 \\ -x_2 - x_3 - tx_1 = 0 \end{cases}$$

ha la seguente rappresentazione matriciale:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -t & -1 & -1 \end{bmatrix}}_{\text{matrice dei coefficienti}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{vettore dei termini noti}} .$$

Il determinante della matrice dei coefficienti è

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -t & -1 & -1 \end{bmatrix}\right) = 5\,(t+1)\,.$$

Se $\boxed{t \neq -1}$, la matrice completa

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ -t & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ha rango uguale a quello della matrice dei coefficienti (rango pari a 3). Il sistema è possibile e determinato (ammette una unica soluzione):

$$\begin{bmatrix} x_1^* = 0 \\ x_2^* = 1 \\ x_3^* = -1 \end{bmatrix}.$$

Infatti,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -t & -1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{5\,(t+1)} \begin{bmatrix} -1 & -3 & -5 \\ -t-2 & 2t-1 & -5 \\ 2t+2 & t+1 & 0 \end{bmatrix},$$

cosicchè

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -t & -1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Alternativamente, usando la regola di Cramer, si ha

$$
\begin{aligned}
x_1^* &= \frac{1}{5(t+1)} \det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{-3} & -1 & 2 \\ \mathbf{1} & 2 & 1 \\ \mathbf{0} & -1 & -1 \end{bmatrix}\right) = 0, \\
x_2^* &= \frac{1}{5(t+1)} \det\left(\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{-3} & 2 \\ -2 & \mathbf{1} & 1 \\ -t & \mathbf{0} & -1 \end{bmatrix}\right) = 1, \\
x_3^* &= \frac{1}{5(t+1)} \det\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & \mathbf{-3} \\ -2 & 2 & \mathbf{1} \\ -t & -1 & \mathbf{0} \end{bmatrix}\right) = -1.
\end{aligned}
$$

Se $\boxed{t=-1}$, la matrice completa

$$
\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}
$$

ha rango uguale a quello della matrice dei coefficienti (rango pari a 2). Il sistema è possibile ma indeterminato (ammette ∞^1 soluzioni):

$$
\begin{bmatrix} x_1^* = \alpha - 1 \\ x_2^* = \alpha \in R \\ x_3^* = -1 \end{bmatrix}.
$$

Infatti, il sistema diventa

$$
\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

e, dal momento che

$$
\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\right) = 5 \neq 0,
$$

il sistema può essere ridotto alle prime due equazioni:

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} x_2,
$$

con

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} x_2 \right) = \begin{bmatrix} x_2 - 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 11

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\frac{3-x}{4-x}\right) dx &= \int_0^1 \left(\frac{4-x}{4-x} - \frac{1}{4-x}\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{4-x}{4-x} + \frac{-1}{4-x}\right) dx \\
&= \Big[x + \ln(4-x)\Big]_0^1 \\
&= (1-0) + (\ln(4-1) - \ln(4-0)) \\
&= 1 + \ln 3 - \ln 4 \quad .
\end{aligned}
$$

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 12

La funzione lagrangiana è

$$L(x, y, \lambda) = (-x - y) - \lambda\left(-x + y^2 - 1\right).$$

Le condizioni necessario di ottimo vincolato del primo ordine sono:

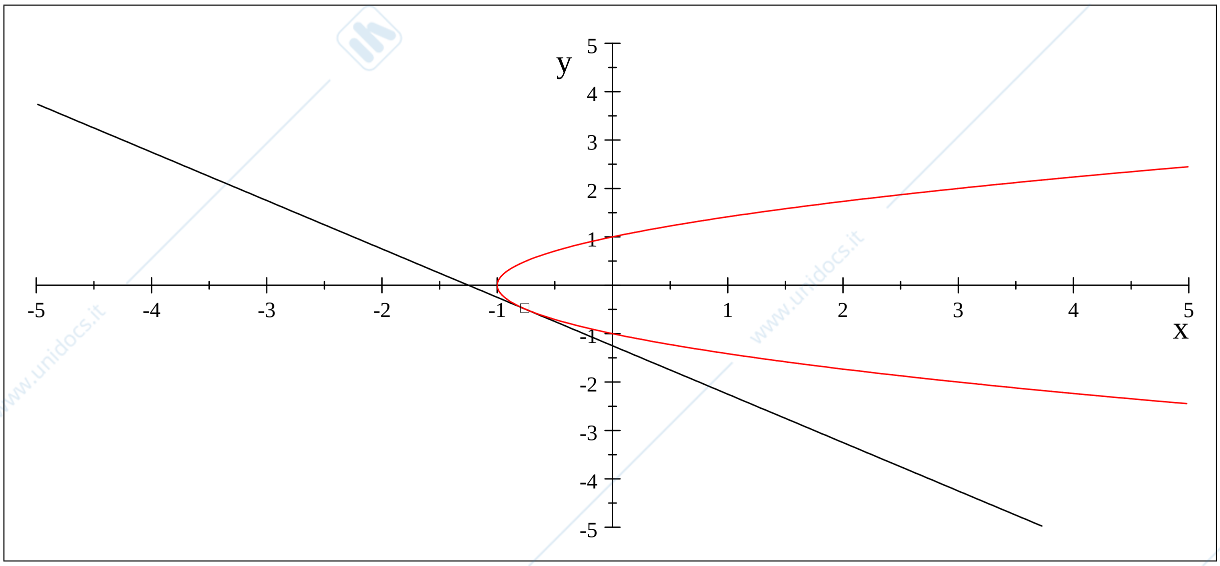
$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} L(x, y, \lambda) & = & -1 + \lambda = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} L(x, y, \lambda) & = & -1 - 2y\lambda = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} L(x, y, \lambda) & = & -\left(-x + y^2 - 1\right) = 0. \end{cases}$$

La soluzione è

$$\begin{bmatrix} x^* = -\frac{3}{4} \\ y^* = -\frac{1}{2} \\ \lambda^* = 1 \end{bmatrix}$$

con $-x^* - y^* = \frac{5}{4}$ (massimo vincolato della funzione obiettivo).

Per maggiore intuizione segue l'analisi grafica basata sulle curve di livello (la sua derivazione analitica non è richiesta).



$-x - y = \frac{5}{4}$ (f. obiettivo massimizzata; in nero); $-x + y^2 = 1$ (vincolo; in rosso)