COGNOME: **NOME:**

MATRICOLA UCSC:

Simulazione della prima prova parziale (ottobre 2020)
[12 esercizi; 31 punti disponibili; 45 minuti disponibili; in remoto]

La valutazione finale sarà pari ad 7 punti + il punteggio ottenuto nelle domande a scelta multipla.

$\boxed{1}$ [2 punti] Data la funzione $f(x) = x\left(e^{\frac{1}{x}}\right)$, il dominio naturale della funzione è:

A) l'intervallo $(-\infty, 0)$;
B) l'intervallo $(0, +\infty)$;
C) nessuna delle altre affermazioni è corretta;
D) l'insieme $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

$\boxed{2}$ [2 punti] Data la funzione $f(x) = x\left(e^{\frac{1}{x}}\right)$, la funzione ha:

A) simmetria pari;
B) simmetria dispari;
C) nessuna delle altre affermazioni è corretta;
D) $f(x) = h(z(h(x)))$ con $h(x) = \frac{1}{x}$ e $z(x) = e^x$.

$\boxed{3}$ [2 punti] Data la funzione $f(x) = x\left(e^{\frac{1}{x}}\right)$, la funzione è positiva:

A) nell'intervallo $(-1, 4)$;
B) nell'intervallo $(0, +\infty)$;
C) nessuna delle altre affermazioni è corretta;
D) nell'insieme $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

$\boxed{4}$ [2 punti] Data la funzione $f(x) = x\left(e^{\frac{1}{x}}\right)$,

A) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$;
B) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0^+$;
C) nessuna delle altre affermazioni è corretta;
D) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

$\boxed{5}$ [2 punti] Data la funzione $f(x) = x\left(e^{\frac{1}{x}}\right)$, l'asintoto obliquo destro della funzione è:

A) $y = 1 - x$;

B) $y = x + 2$;

C) nessuna delle altre affermazioni è corretta;

D) $y = 2x - 1$.

$\boxed{6}$ [2 punti] Data la funzione $f(x) = x\left(e^{\frac{1}{x}}\right)$, la derivata prima è:

A) $f'(x) = e^{\frac{1}{x}}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$;

B) $f'(x) = e^{\frac{1}{x}}\left(x - \frac{1}{x}\right)$;

C) nessuna delle altre affermazioni è corretta;

D) $f'(x) = -e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x} + 1\right)$.

$\boxed{7}$ [2 punti] Data la funzione $f(x) = x\left(e^{\frac{1}{x}}\right)$, la funzione è strettamente:

A) decrescente in $(-\infty, 0)$;

B) crescente in $(0, +\infty)$;

C) nessuna delle altre affermazioni è corretta;

D) decrescente in $(0, 1)$.

$\boxed{8}$ [2 punti] Data la funzione $f(x) = x\left(e^{\frac{1}{x}}\right)$, la funzione ammette:

A) $x^* = -1$ come punto di minimo relativo forte;

B) $x^* = -1$ come punto di massimo relativo forte;

C) nessuna delle altre affermazioni è corretta;

D) $x^* = 1$ come punto di massimo relativo forte.

$\boxed{9}$ [2 punti] Data la funzione $f(x) = x\left(e^{\frac{1}{x}}\right)$, la derivata seconda è:

A) $f''(x) = \left(\frac{1}{x^3} - 1\right)e^{\frac{1}{x}}$;

B) $f''(x) = \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}$;

C) nessuna delle altre affermazioni è corretta;

D) $f''(x) = \left(\frac{1}{x^3} + 1\right)e^{\frac{1}{x}}$.

$\boxed{10}$ [2 punti] Data la funzione $f(x) = x\left(e^{\frac{1}{x}}\right)$, La funzione è strettamente:

A) convessa in $(-\infty, 0)$;

B) convessa in $(0, +\infty)$;

C) nessuna delle altre affermazioni è corretta;

D) concava in $(-\infty, +\infty)$.

$\boxed{11}$ [2 punti] Data la funzione $h(x) = 2xe^{-x}$, lo sviluppo in formula di Taylor di ordine 2 della funzione h a partire dal punto $x = 1$ con resto secondo Peano è:

A) $2xe^{-x} = 2e^{-1} - e^{-1}(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right)$ per $x \to 1$;

B) $2xe^{-x} = 2e^{-1} + e^{-1}(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right)$ per $x \to 1$;

C) $2xe^{-x} = 2e^{-1} + 2e^{-1}(x-1) - e^{-1}(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right)$ per $x \to 1$;

D) nessuna delle altre affermazioni è corretta.

$\boxed{12}$ [2 punti] Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\max_{x,y}(-x-y) \quad \text{sotto il vincolo} \quad e^{-y} - x = 2.$$

Denotando con λ il moltiplicatore di Lagrange, la soluzione (x^*, y^*, λ^*) è tale che:

A) $x^* = -1$;

B) $\lambda^* = 2$;

C) $y^* = -1$;

D) nessuna delle altre affermazioni è corretta.

RISPOSTE CORRETTE

$\boxed{1}$ D.

$\boxed{2}$ C.

$\boxed{3}$ B.

$\boxed{4}$ D.

$\boxed{5}$ C.

$\boxed{6}$ A.

$\boxed{7}$ D.

$\boxed{8}$ C.

$\boxed{9}$ B.

$\boxed{10}$ B.

$\boxed{11}$ A.

$\boxed{12}$ A.

SOLUZIONE DEGLI ESERCIZI 1-10

Studio della funzione $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

Dominio, eventuali simmetrie ed intersezioni con gli assi, segno

Il dominio naturale $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ è simmetrico rispetto a $x = 0$, ma non vi sono simmetrie:

$$f(x) \neq f(-x) \text{ e } f(x) \neq -f(-x) \text{ con } x \neq 0.$$

$x = 0 \notin D$ (niente intersezioni con asse ordinate di equazione $x = 0$).
$f(x) \neq 0$ per ogni $x \in D$ (niente intersezioni con asse ascisse di equazione $y = 0$).

Poichè $e^{\frac{1}{x}} > 0$ per ogni $x \neq 0$, $f(x) < 0$ per $x < 0$ e $f(x) > 0$ per $x > 0$.

Limiti significativi ed eventuali asintoti

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{v\to0^-} \frac{e^v}{v} = \frac{1}{0^-} = -\infty$ (con la sostituzione $v = \frac{1}{x}$);
$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x} = 1$ (possibile $m > 0$ dell'eventuale asintoto obliquo $y = mx + q$ per $x \to -\infty$);
$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(xe^{\frac{1}{x}} - x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)\right) = \lim\limits_{v\to0^-} \frac{e^v-1}{v} = 1$ (esiste finito $q = 1$);
$y = x + 1$ è asintoto obliquo sinistro per $x \to -\infty$.

$\lim\limits_{x\to0^-} xe^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{v\to-\infty} \frac{e^v}{v} = \frac{0^+}{-\infty} = 0^-$.
$\lim\limits_{x\to0^+} xe^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{v\to+\infty} \frac{e^v}{v} = +\infty$ (gerarchie di infinito);

L'asse delle ordinate di equazione $x = 0$ è asintoto verticale destro per $x \to 0^+$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{v\to 0^+} \frac{e^v}{v} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$

Il controllo di eventuale asintoto obliquo destro (con calcoli analoghi al sinistro) dà esito positivo ($y = x + 1$ è asintoto obliquo destro per $x \to +\infty$).

Derivata prima, monotonia ed eventuali estremi

$\frac{d}{dx}\left(x \cdot e^{\frac{1}{x}}\right) = 1 \cdot e^{\frac{1}{x}} + x \cdot e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}(x-1) > 0$ per $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.

$f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ è strett. cresc. in $(-\infty, 0)$;

$f(x)$ è strett. decresc. in $(0, 1)$;

$f(x)$ è strett. cresc. in $(1, +\infty)$.

$x = 1$ è punto stazionario e di minimo relativo/locale forte. Il corrispondente punto del grafico è $(1, e)$.

(Non richiesto)

L'inclinazione locale del grafico di f a sinistra del punto $x = 0 \notin D$ è esigua:

$\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(e^{\frac{1}{x}} - \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}\right) = \lim\limits_{v\to -\infty} e^v - \lim\limits_{v\to-\infty} \frac{v}{e^{-v}} = 0^+ - 0^- = 0^+.$

Derivata seconda e concavità/convessità

$\frac{d^2}{dx^2}\left(xe^{\frac{1}{x}}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right)\right) = e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right) + e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) = \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}} < 0$ per $x \in (-\infty, 0)$.

$f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ è strett. concava in $(-\infty, 0)$;

$f(x)$ è strett. convessa in $(0, +\infty)$.

(Non richiesto)

Il grafico sommario

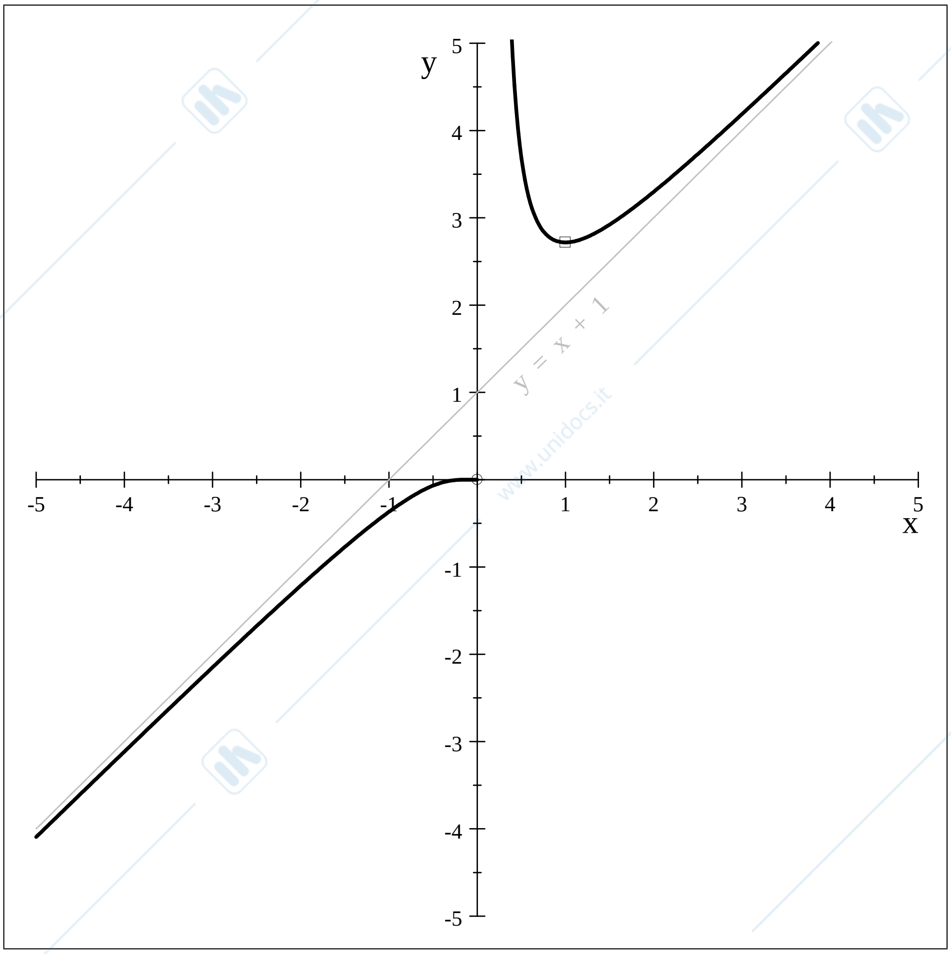


Grafico di $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 11

Dato $h(x) = 2xe^{-x}$, abbiamo

$$\begin{aligned} h'(x) &= -2e^{-x}(x-1), \\ h''(x) &= 2e^{-x}(x-2). \end{aligned}$$

Risulta dunque

$$2xe^{-x} = 2e^{-1} + 0 \cdot (x-1) + \frac{1}{2} \cdot \left(-2e^{-1}\right) \cdot (x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right) \quad \text{per} \quad x \to 1$$

poichè

$$\begin{aligned} h(1) &= 2e^{-1}, \\ h'(1) &= 0, \\ h''(1) &= -2e^{-1}. \end{aligned}$$

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 12

La funzione lagrangiana è

$$L(x,y,\lambda) = (-x-y) - \lambda\left(e^{-y} - x - 2\right).$$

Le condizioni necessario di ottimo vincolato del primo ordine sono:

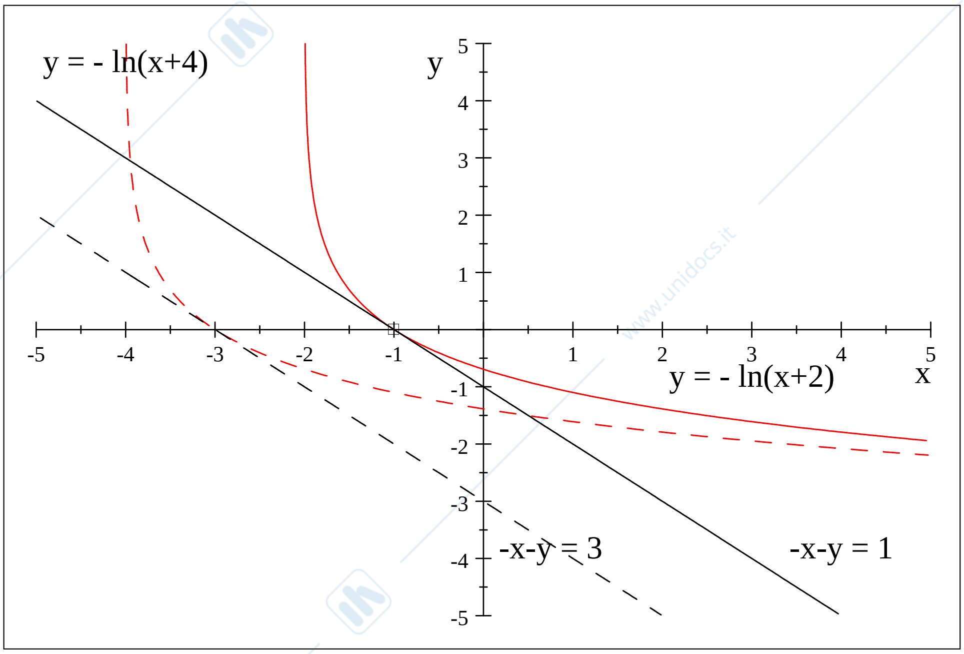
$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} L(x,y,\lambda) & = & \lambda - 1 = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} L(x,y,\lambda) & = & \lambda e^{-y} - 1 = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} L(x,y,\lambda) & = & x - e^{-y} + 2 = 0. \end{cases}$$

La soluzione è

$$\begin{bmatrix} x^* = -1 \\ y^* = 0 \\ \lambda^* = 1 \end{bmatrix}$$

con $-x^* - y^* = 1$ (massimo vincolato della funzione obiettivo).

Per maggiore intuizione segue l'analisi grafica basata sulle curve di livello (la sua derivazione analitica non è richiesta). Si noti che, esplicitando la y rispetto alla x nel vincolo $e^{-y} - x = 2$, il vincolo stesso risulta equivalente a $y = -\ln(x+2)$.



Il vincolo risulta equivalente a $y = -\ln(x+2)$