www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

COGNOME: **NOME:**

MATRICOLA UCSC:

Simulazione della seconda prova parziale

[12 esercizi; 31 punti disponibili; 45 minuti disponibili; in remoto]

La valutazione finale sarà pari ad 7 punti + il punteggio ottenuto nelle domande a scelta multipla.

$\boxed{1}$ [2 punti] Dato il sistema parametrico (il parametro reale è t)

$$\begin{cases} x_3 - x_2 + tx_1 = t - 1 \\ x_1 + 2x_3 + x_2\,(t-1) = -1 \\ x_2 - x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

il determinante della matrice dei coefficienti è pari a:

A) $16 - t^2$;

B) $4 - t^2$;

C) nessuna delle altre affermazioni è corretta;

D) $1 - t^2$.

$\boxed{2}$ [2 punti] Dato il sistema parametrico (il parametro reale è t)

$$\begin{cases} x_3 - x_2 + tx_1 = t - 1 \\ x_1 + 2x_3 + x_2\,(t-1) = -1 \\ x_2 - x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

A) il sistema è impossibile se $t = -4$;

B) il sistema è determinato se $t = -1$;

C) nessuna delle altre affermazioni è corretta;

D) il sistema è indeterminato se $t = 2$.

$\boxed{3}$ [2 punti] Dato il sistema parametrico (il parametro reale è t)

$$\begin{cases} x_3 - x_2 + tx_1 = t - 1 \\ x_1 + 2x_3 + x_2\,(t-1) = -1 \\ x_2 - x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

A) il sistema ha ∞^2 soluzioni se $t = 4$;

B) il sistema ha ∞^1 soluzioni se $t = 1$;

C) nessuna delle altre affermazioni è corretta;

D) il sistema ha ∞^1 soluzioni se $t = -2$.

$\boxed{4}$ [2 punti] Dato il sistema parametrico (il parametro reale è t)

$$\begin{cases} x_3 - x_2 + tx_1 = t - 1 \\ x_1 + 2x_3 + x_2(t-1) = -1 \\ x_2 - x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

la soluzione (x_1^*, x_2^*, x_3^*) per $t = -\frac{1}{4}$ è tale che:

A) $x_3^* = 0$;

B) $x_2^* = -2$;

C) nessuna delle altre affermazioni è corretta;

D) $x_3^* = 2$.

$\boxed{5}$ [2 punti] Dato il sistema parametrico (il parametro reale è t)

$$\begin{cases} x_3 - x_2 + tx_1 = t - 1 \\ x_1 + 2x_3 + x_2(t-1) = -1 \\ x_2 - x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

la soluzione (x_1^*, x_2^*, x_3^*) per $t = \frac{1}{4}$ è tale che:

A) $x_1^* = 0$;

B) $x_2^* = -1$;

C) nessuna delle altre affermazioni è corretta;

D) $x_3^* = 0$.

$\boxed{6}$ [2 punti] Dato il sistema parametrico (il parametro reale è t)

$$\begin{cases} x_3 - x_2 + tx_1 = t - 1 \\ x_1 + 2x_3 + x_2(t-1) = -1 \\ x_2 - x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

la soluzione (x_1^*, x_2^*, x_3^*) per $t = 2$ è tale che:

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

A) $x_1^* = 2$;

B) $x_1^* = -1$;

C) nessuna delle altre affermazioni è corretta;

D) $x_1^* = 3$.

$\boxed{7}$ [2 punti] Dato il sistema parametrico (il parametro reale è t)

$$\begin{cases} x_3 - x_2 + tx_1 = t - 1 \\ x_1 + 2x_3 + x_2(t-1) = -1 \\ x_2 - x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

la soluzione (x_1^*, x_2^*, x_3^*) per $t = -1$ è tale che:

A) $x_1^* = -3$;

B) $x_1^* = -1$;

C) nessuna delle altre affermazioni è corretta;

D) $x_1^* = 1$.

$\boxed{8}$ [2 punti] Dato il sistema parametrico (il parametro reale è t)

$$\begin{cases} x_3 - x_2 + tx_1 = t - 1 \\ x_1 + 2x_3 + x_2(t-1) = -1 \\ x_2 - x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

la soluzione (x_1^*, x_2^*, x_3^*) per $t = -1$ è tale che:

A) $x_2^* = \alpha - 4$ e $x_3^* = \alpha$ con α reale qualsiasi;

B) $x_2^* = \alpha + 2$ e $x_3^* = \alpha$ con α reale qualsiasi;

C) nessuna delle altre affermazioni è corretta;

D) $x_2^* = \alpha + 1$ e $x_3^* = \alpha$ con α reale qualsiasi.

$\boxed{9}$ [2 punti] Dato il sistema parametrico (il parametro reale è t)

$$\begin{cases} x_3 - x_2 + tx_1 = t - 1 \\ x_1 + 2x_3 + x_2(t-1) = -1 \\ x_2 - x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

la soluzione (x_1^*, x_2^*, x_3^*) per $t = 1$ è tale che:

A) $x_1^* = -2\beta - 1$, $x_2^* = \beta$, e $x_3^* = 2 + \beta$ con β reale qualsiasi;

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

B) $x_1^* = -2\beta + 1$, $x_2^* = \beta$, e $x_3^* = 3\beta$ con β reale qualsiasi;
C) nessuna delle altre affermazioni è corretta;
D) $x_1^* = -2\beta - 1$, $x_2^* = -\beta - 1$, e $x_3^* = \beta$ con β reale qualsiasi.

$\boxed{10}$ [2 punti] Dato il sistema parametrico (il parametro reale è t)

$$\begin{cases} x_3 - x_2 + tx_1 = t - 1 \\ x_1 + 2x_3 + x_2(t-1) = -1 \\ x_2 - x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

la soluzione (x_1^*, x_2^*, x_3^*) per $t = 1$ è tale che:
A) $x_1^* = \beta$, $x_2^* = \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}$, e $x_3^* = 2 + \beta$ con β reale qualsiasi;
B) $x_1^* = \beta$, $x_2^* = \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}$, e $x_3^* = 3 - \beta$ con β reale qualsiasi;
C) nessuna delle altre affermazioni è corretta;
D) $x_1^* = \beta$, $x_2^* = \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}$, e $x_3^* = -\frac{1}{2}\beta$ con β reale qualsiasi.

$\boxed{11}$ [2 punti] La primitiva $F(x)$ di

$$f(x) = x \ln x$$

passante per il punto di coordinate $x = 1$ e $y = 0$ (dunque tale che $F(1) = 0$) è:
A) $F(x) = \frac{1}{4}x^2 \ln x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$;
B) $F(x) = -\frac{1}{4}x^2 \ln x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$;
C) nessuna delle altre affermazioni è corretta;
D) $F(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}$.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

$\boxed{12}$ [2 punti] L'integrale

$$\int_0^1 xe^{-x}dx$$

è uguale a:

A) $1 - 2e^{-1}$;

B) $2 - 2e^{-1}$;

C) $2 - e^{-1}$;

D) nessuna delle altre affermazioni è corretta.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

RISPOSTE CORRETTE

$\boxed{1}$ D.

$\boxed{2}$ C.

$\boxed{3}$ B.

$\boxed{4}$ C.

$\boxed{5}$ C.

$\boxed{6}$ C.

$\boxed{7}$ D.

$\boxed{8}$ D.

$\boxed{9}$ D.

$\boxed{10}$ C.

$\boxed{11}$ D.

$\boxed{12}$ A.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

SOLUZIONE DEGLI ESERCIZI 1-10

Si tratta di un sistema parametrico lineare di 3 equazioni in 3 incognite. La sua forma matriciale è

$$\underbrace{\begin{bmatrix} t & -1 & 1 \\ 1 & t-1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\text{matrice dei coefficienti}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} t-1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{vettore dei termini noti}} .$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} t & -1 & 1 \\ 1 & t-1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = 1-t^2 = 0 \iff t=-1 \vee t=1 .$$

Se $\boxed{t \neq -1 \wedge t \neq 1}$, allora la soluzione è

$$\begin{bmatrix} x_1^* = 1 \\ x_2^* = 0 \\ x_3^* = -1 \end{bmatrix} .$$

Infatti,

$$\begin{bmatrix} t & -1 & 1 \\ 1 & t-1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1-t^2} \begin{bmatrix} -t-1 & 0 & -t-1 \\ -1 & 1-t & 1-2t \\ t & 1-t & t^2-t+1 \end{bmatrix}$$

cosicchè

$$\begin{bmatrix} t & -1 & 1 \\ 1 & t-1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} t-1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} .$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Alternativamente, usando la regola di Cramer, si ha

$$
\begin{aligned}
x_1^* &= \frac{1}{1-t^2}\det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{t-1} & -1 & 1 \\ \mathbf{-1} & t-1 & 2 \\ \mathbf{0} & 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = 1, \\
x_2^* &= \frac{1}{1-t^2}\det\left(\begin{bmatrix} t & \mathbf{t-1} & 1 \\ 1 & \mathbf{-1} & 2 \\ -1 & \mathbf{0} & -1 \end{bmatrix}\right) = 0, \\
x_3^* &= \frac{1}{1-t^2}\det\left(\begin{bmatrix} t & -1 & \mathbf{t-1} \\ 1 & t-1 & \mathbf{-1} \\ -1 & 1 & \mathbf{0} \end{bmatrix}\right) = -1.
\end{aligned}
$$

Se $\boxed{t=-1}$, allora la soluzione è

$$
\begin{bmatrix} x_1^* = 1 \\ x_2^* = \alpha + 1 \\ x_3^* = \alpha \in R \end{bmatrix}.
$$

Infatti, il sistema diventa

$$
\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

e, dal momento che

$$
\det\left(\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\right) = 3 \neq 0,
$$

il sistema può essere ridotto alle prime due equazioni:

$$
\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} x_3,
$$

con

$$
\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} x_3\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ x_3 + 1 \end{bmatrix}.
$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Se $\boxed{t = 1}$, allora la soluzione è

$$\begin{bmatrix} x_1^* = -2\beta - 1 \\ x_2^* = -\beta - 1 \\ x_3^* = \beta \in R \end{bmatrix}.$$

Infatti, il sistema diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e, dal momento che

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1 \neq 0,$$

il sistema può essere ridotto alle prime due equazioni:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} x_3,$$

con

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} x_3\right) = \begin{bmatrix} -2x_3 - 1 \\ -x_3 - 1 \end{bmatrix}.$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 11

$$F(x) = \int x \ln x dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + c \quad \text{(per parti; } \ln x \text{ è il fattore finito).}$$

La restrizione $F(1) = 0$ implica $c = \frac{1}{4}$.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 12

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xe^{-x}dx &= \Big[-xe^{-x} - e^{-x}\Big]_0^1 \qquad \text{(per parti; } x \text{ è il fattore finito)} \\
&= \big(-e^{-1} - e^{-1}\big) - \big(0 - e^{-0}\big) \\
&= 1 - 1 - 2e^{-1} \quad .
\end{aligned}$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari