# Appunti - Matematica Generale - a.a.2017/2018

Matematica Generale (Università degli Studi di Pavia)

Luca Biglieri

# Matematica Generale

Corso AK – Prof. Molho – A.A. 2014/15

# 1. Insiemi Numerici

## 1.1 Introduzione; Concetti Generali su Q e R

Tra gli insiemi numerici più importanti, si ricordano **N** (numeri interi naturali), **Z** (interi relativi), **Q** (razionali, esprimibili sia sotto forma di frazioni che di numeri decimali), **R** (numeri reali, che comprendono anche gli irrazionali come radicali, π, e, logaritmi) e **C** (numeri complessi, come i = $\sqrt{-1}$).

Riguardo all'insieme **Q**, si ricorda che, tra due numeri $q_1$ e $q_2 \in$ **Q**, esiste sempre almeno un altro numero $q_3 \in$ **Q**:

$$\forall q_1, q_2 \in \boldsymbol{Q}, \exists \frac{q_1 + q_2}{2}$$

Per quanto riguarda, invece, l'insieme **R**, esso comprende anche i numeri irrazionali ed è possibile dimostrare che, tra due numeri $q_1$ e $q_2 \in$ **Q**, esistono infiniti numeri irrazionali ∊ **R** (basti pensare alla retta dei numeri: fissati $q_1$, $q_2$ e il punto medio tra essi, si può costruire un quadrato che abbia come estremi della base $q_1$ e il punto medio e individuare la diagonale che, trasportata anch'essa sulla retta dei numeri, avrà lunghezza $\frac{q_1+q_2}{2} \cdot \sqrt{2}$, un numero, cioè, appartenente a **R**). Gli irrazionali, dunque, sono <u>infinitamente densi</u> e hanno una <u>corrispondenza biunivoca</u> con la retta dei numeri. Bisogna inoltre ricordare che un numero irrazionale come $\sqrt{2} \neq 1{,}4$; è corretta, invece, la dicitura $\sqrt{2} \sim 1{,}4$.

## 1.2 Insieme R: Struttura Algebrica, d'Ordine, Topologica

### 1.2.1 Struttura Algebrica di R

La **Struttura Algebrica** di **R** consiste nelle operazioni di somma e prodotto, che vengono assiomaticamente definite in tale sistema numerico: è possibile, infatti, svolgere calcoli come $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ oppure $5\sqrt{3}$.

### 1.2.2 Struttura d'Ordine di R

La **Struttura d'Ordine** di **R** permette di stabilire, $\forall\, x, y \in \boldsymbol{R}$, se $x > y, x < y, x = y$. La Struttura d'Ordine permette di introdurre il concetto di **Intervallo** in **R**, ovvero un sottoinsieme di **R** tale che due punti ad esso appartenenti possono essere uniti senza uscire dall'intervallo stesso (ad esempio, **R** è un intervallo, mentre **N** non lo è). Gli intervalli in **R** si dividono in:

- **Limitati**:
  - [a, b] = $\{x \in \boldsymbol{R}: a \leq x \leq b\}$, intervallo <u>chiuso</u> e <u>limitato</u>;
  - [a, b) = $\{x \in \boldsymbol{R}: a \leq x < b\}$, intervallo <u>aperto a destra</u> e <u>limitato</u>;
  - (a, b] = $\{x \in \boldsymbol{R}: a < x \leq b\}$, intervallo <u>aperto a sinistra</u> e <u>limitato</u>;
  - (a, b) = $\{x \in \boldsymbol{R}: a < x < b\}$, intervallo <u>aperto</u> e <u>limitato</u>.
- **Illimitati:**
  - [a, +∞) = $\{x \in \boldsymbol{R}: x \geq a\}$, intervallo <u>chiuso</u> e <u>superiormente illimitato</u>;
  - (a, +∞) = $\{x \in \boldsymbol{R}: x > a\}$, intervallo <u>aperto</u> e <u>superiormente illimitato</u>;
  - (-∞, b] = $\{x \in \boldsymbol{R}: x \leq b\}$, intervallo <u>chiuso</u> e <u>inferiormente illimitato</u>;
  - (-∞, b) = $\{x \in \boldsymbol{R}: x < b\}$, intervallo <u>aperto</u> e <u>inferiormente illimitato</u>;
  - (-∞, +∞) = **R**

È possibile introdurre, all'interno degli intervalli, i concetti di **maggiorante** e **minorante**:

- k ϵ **R** si dice **MAGGIORANTE** per un insieme A ⊆ **R** quando k ≥ a, $\forall a \in A$. L'insieme dei maggioranti di un insieme A si definisce **Magg A**.

  *Esempio: A = (-∞, 2). Un maggiorante è, ad esempio, 3. In generale, Magg A = [2, +∞).*
  *Esempio: B = (1, 3] U (5, 7). Magg B = [7, +∞).*
  *Esempio:* ***N*** *non ha maggioranti: è superiormente illimitato.*

- h ϵ **R** si dice **MINORANTE** per un insieme A ⊆ **R** quando h ≤ a, $\forall a \in A$. L'insieme dei minoranti di un insieme A si definisce **Min A**.

Di seguito a queste definizioni, si possono stabilire anche le condizioni di **limitatezza** di un insieme numerico:

- Un insieme A ⊆ **R** si dice **SUPERIORMENTE LIMITATO** se esiste almeno un **maggiorante** di A (se Magg A ≠ ∅);
- Un insieme A ⊆ **R** si dice **INFERIORMENTE LIMITATO** se esiste almeno un **minorante** di A (se Min A ≠ ∅);
- Un insieme A ⊆ **R** si dice **LIMITATO** se è sia superiormente che inferiormente limitato.

Dalle definizioni di maggiorante e minorante si nota che due numeri k e h che siano rispettivamente un maggiorante e minorante di A devono essere ϵ **R**, ma non necessariamente ϵ A. Nel caso particolare in cui k o h appartengano anche ad A, essi vengono definiti **massimo** o **minimo** dell'insieme A:

- k si dice **MASSIMO** per A ⊆ **R** (e si indica con **max A**) se k ϵ A e k ≥ a, $\forall a \in A$ (ovvero, se k ϵ A ed è maggiorante di A);
- h si dice **MINIMO** per A ⊆ **R** (e si indica con **min A**) se h ϵ A e h ≤ a, $\forall a \in A$ (ovvero, se h ϵ A ed è minorante di A).

Il massimo o il minimo di un insieme numerico esistono <u>solo se</u> esistono maggioranti o minoranti per l'insieme stesso (ovvero, se l'insieme è superiormente o inferiormente limitato: condizione <u>necessaria</u>):

$$\exists \max A \;=>\; A \text{ è } superiormente\ limitato;$$
$$\exists \min A \;=>\; A \text{ è } inferiormente\ limitato.$$

Tali implicazioni non sono invertibili: la condizione è necessaria, ma non sufficiente.

Dai concetti di limitazione, di maggiorante e di minorante derivano anche le definizioni di **estremo superiore** ed **estremo inferiore** di un insieme numerico:

- Sia A ⊆ **R** un insieme <u>superiormente limitato</u>. Si dice **ESTREMO SUPERIORE** di A (e si indica come **sup A**) il **minimo dei maggioranti** di A.
- Sia A ⊆ **R** un insieme <u>inferiormente limitato</u>. Si dice **ESTREMO INFERIORE** di A (e si indica come **inf A**) il **massimo dei minoranti** di A.

**N.B.:** <u>se esiste max A, sup A = max A; se esiste min A, inf A = min A</u>.

Se, invece che in **R**, si decide di lavorare nell'insieme $\overline{\boldsymbol{R}}$ (**R esteso**, indicato anche come **R***), si aggiungono anche i valori di $\pm\infty$: $\overline{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. In questo ambito è possibile arrivare anche alle definizioni di insiemi **superiormente o inferiormente illimitati**:

- $\sup A = +\infty <=> A$ è **SUPERIORMENTE ILLIMITATO.**
- $\inf A = -\infty <=> A$ è **INFERIORMENTE ILLIMITATO.**

### 1.2.3 Struttura Topologica di R

Come già accennato, l'insieme **R** possiede anche una **struttura topologica** o **metrica** che va a definire il concetto di "distanza" o "vicinanza" tra due numeri reali.

- Si dice **DISTANZA** tra due numeri x e y ϵ **R** il valore **d(x, y) = |x – y|**.

Dalla definizione di distanza si arriva facilmente a quella di **intorno** di un numero reale:

- Preso $x_0$ ϵ **R**, si dice **INTORNO** di raggio r di $x_0$ $\boldsymbol{I_r(x_0)} = \{x \in \boldsymbol{R} : d(x, x_0) < r\},\ r > 0$.

Un intorno corrisponde a un intervallo: $I_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r)$.

*Spiegazione: si può anche dire che* $I_r(x_0) = \{x \in \boldsymbol{R} : |x - x_0| < r\},\ r > 0$ =>

$-r < x - x_0 < +r$ => $\begin{cases} x - x_0 < r => x < x_0 + r \\ x - x_0 > -r => x > x_0 - r \end{cases}$ => $x_0 - r < x < x_0 + r$, *che*

*corrisponde all'intervallo precedentemente determinato.*

Un punto $x_0$ ha infiniti intorni, perché gli intorni variano al variare di r, che può assumere qualsiasi valore di **R**.

Si possono poi individuare anche le definizioni di **intorno destro e sinistro**:

- Si dice **INTORNO DESTRO** di raggio r di $x_0$ $\boldsymbol{I_r^+(x_0)} = [x_0, x_0 + r)$.
- Si dice **INTORNO SINISTRO** di raggio r di $x_0$ $\boldsymbol{I_r^-(x_0)} = [x_0 - r, x_0)$.

Se si opera in $\overline{\boldsymbol{R}}$, si possono individuare anche gli intorni di $\pm\infty$:

- $\boldsymbol{I}(+\infty) = (a, +\infty), a \in \boldsymbol{R}.$
- $\boldsymbol{I}(-\infty) = (-\infty, b), b \in \boldsymbol{R}.$

Anche $\pm\infty$ hanno infiniti intorni, perché a e b possono assumere tutti i valori di **R**.

## 1.3 Classificazione di un Punto rispetto a un Insieme

Dati un insieme A ⊆ **R** e un punto $x_0$:

- Il punto $x_0$ ϵ A si dice **PUNTO INTERNO** di A se esiste un intorno $I_r(x_0)$ tale che $\boldsymbol{I_r(x_0)} \subseteq \boldsymbol{A}$. L'insieme dei punti interni di A si dice **int A**.

*Esempio: A = (2, 3].*

*$x_0$ = 2,5 è un punto interno di A.*

*$x_0$ = 3 non è un punto interno: l'intorno completo non è ⊆ A.*

*int A = (2, 3)*

- L'insieme A ⊆ **R** si dice **INSIEME APERTO** quando **int A = A**. (Sono insiemi aperti tutti gli intervalli aperti)
- L'insieme A ⊆ **R** si dice **INSIEME CHIUSO** quando **$A^C$** (ovvero **R**\A) **è un insieme aperto**. (Sono insiemi chiusi gli intervalli di tipo [a, b], (-∞, b], [a, +∞) )

*Esempio: A = (2, 3]*

*$A^C$ = (-∞, 2] U (3, +∞)*

*int $A^C \neq A^C$, perché $x_0$ = 2 ϵ $A^C$ ma non ϵ int $A^C$.*

*Quindi, A non è un insieme chiuso; A = (2, 3] non è aperto né chiuso.*

Un insieme A ⊆ **R** può non essere aperto né chiuso; inoltre, gli unici due insiemi ad essere sia aperti che chiusi sono **R** e ∅.
**N.B.:** Se A non è un intervallo, nessun elemento di A sarà un punto interno (ovvero, A non sarà un insieme aperto e int A = ∅.

- Il punto $x_0$ ϵ $A^C$ si dice **PUNTO ESTERNO** di A quando $x_0$ è un punto interno di $A^C$. L'insieme dei punti esterni di A si indica con **ext A**.
- Il punto $x_0$ ϵ **R** è **PUNTO DI FRONTIERA** di A quando $x_0$ non è né punto interno né punto esterno di A. L'insieme dei punti di frontiera di A si indica con **δA**.

Questa classificazione è completa: dati $x_0$ e A ⊆ **R**, $x_0$ sarà punto interno, esterno oppure di frontiera di A.

*Esempio: A = (2, 3]*

*Int A = (2, 3)*

*Ext A = (-∞*$, 2) \cup (3, +\infty)$

*δA =* $\{2, 3\}$

**Teorema**. Un insieme A ⊆ **R** è un **INSIEME CHIUSO** se e solo se δA ⊆ A.
Si può quindi arrivare a un'ulteriore definizione di Punto di Frontiera:

- Un **PUNTO DI FRONTIERA** di A è un punto tale che in ogni suo intorno cadono sia elementi di A che elementi che non appartengono ad A.

- Il punto $x_0$ ϵ **R** si dice **PUNTO DI ACCUMULAZIONE** di A ⊆ **R** quando in ogni intorno $I_r(x_0)$ cade almeno un punto x ϵ A, con x diverso da $x_0$. Ovvero,

$$I_r(x_0) \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset, \forall r > 0$$

  Un punto di accumulazione di A, quindi, può anche non appartenere ad A.

- Il punto $x_0$ ϵ **R** si dice **PUNTO ISOLATO** per A ⊆ **R** quando $x_0$ non è punto di accumulazione per A. Ovvero,

$$\exists r > 0 : I_r(x_0) \cap A = \emptyset$$

- L'insieme dei punti di accumulazione di A ⊆ **R** si dice **INSIEME DERIVATO** e si indica con **A'**.

Si può notare come int A ⊆ A': quindi, se un punto $x_0$ è un punto interno di A, sarà anche un suo punto di accumulazione. Pertanto, si può estendere anche la definizione di Insieme Chiuso:

- Se un insieme A contiene tutti i suoi punti di accumulazione (A' ⊆ A), allora A sarà un **INSIEME CHIUSO**.

In maniera simile, si nota anche che ogni punto isolato di A è anche un punto di frontiera di A.

Allargando il concetto di punto di accumulazione in $\overline{\boldsymbol{R}}$, si può arrivare facilmente alle definizioni di insiemi **illimitati**:

- A ⊆ **R** è **SUPERIORMENTE ILLIMITATO** se e solo se +∞ è un punto di accumulazione di A in $\overline{\boldsymbol{R}}$.
- A ⊆ **R** è **INFERIORMENTE ILLIMITATO** se e solo se -∞ è un punto di accumulazione di A in $\overline{\boldsymbol{R}}$.

Ad esempio, l'insieme **Q** è sia superiormente che inferiormente illimitato, dal momento che sia +-∞ che --∞ sono suoi punti di accumulazione. Inoltre, **Q** è denso in **R**: tutti i suoi punti sono punti di accumulazione, non ha alcun punto isolato.

# 2. Funzioni

## 2.1 Concetti Generali

- Siano dati gli insiemi A e B. Si dice **FUNZIONE** definita su A in valori in B (**f: A→B**) una relazione che lega ogni elemento di A ad un solo elemento di B.
- A si dice **DOMINIO** della funzione e si può indicare con **Dom(f)**;
- B si dice **CODOMINIO** della funzione e si può indicare con **Codom(f)**.
- Un elemento y ϵ B (ovvero ϵ Codom(f)) si dice **IMMAGINE** di x attraverso f;
- Un elemento x ϵ A (ovvero ϵ Dom(f)) si dice **CONTROIMMAGINE** di y attraverso f.

- L'**INSIEME DELLE IMMAGINI** di f, indicabile con **Im(f)** oppure con **f(A)** è definito come:

$$\boldsymbol{Im(f)} = \{y \in B | y = f(x) \; per \; una \; x \; \in A\}, con \; f: A \rightarrow B$$

Ad esempio, nel caso di f(x) = $x^2$, f: **R→R**, si avrà che Im(f) ⊆ B. In particolare, B corrisponderà a **R**, mentre Im(f) sarà l'insieme dei valori che f può realmente assumere: Im(f) = [0, +∞), quindi Im(f) ⊆ **R**.

Per quanto riguarda, invece, il **Dominio**, bisognerà determinarlo a seconda della funzione, trovando quindi il **Dominio Naturale** della funzione stessa: ad esempio, $f(x) = \sqrt{x}$ avrà un dominio naturale Dom(f) = [0, +∞).

- Sia f una funzione tale che f: A→**R**, con A ⊆ **R**. Si dice **GRAFICO** di f e si indica con **graf(f)** l'insieme ⊆ A x **R** tale che:

$$\boldsymbol{graf(f)} = \{(x, y) | y = f(x), x \in A\}$$

Data una funzione f: A→B, è possibile verificare che sia effettivamente una funzione tracciandone il grafico e svolgendo il *Test delle Rette Verticali*: se tutte le rette verticali tracciabili hanno al massimo 1 intersezione con il grafico di f, allora f sarà una funzione.
Ad esempio, saranno funzioni le parabole, le iperboli, le rette non verticali; non sono funzioni, invece, le circonferenze e le parabole a concavità orizzontale.

- Una funzione f: A→B si dice **INIETTIVA** quando, $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2, f(x_1) \neq f(x_2)$.
  Per verificare che una funzione sia iniettiva, si svolge in *Primo Test delle Rette Orizzontali*: se tutte le rette orizzontali tracciabili hanno al massimo 1 intersezione con il grafico di f, allora f sarà iniettiva.
  Ad esempio, una parabola non è iniettiva perché alcune rette intersecheranno il suo grafico in 2 punti; la funzione esponenziale y = $e^x$, invece, è iniettiva, come anche y = log x.

- Una funzione f: A→B si dice **SURIETTIVA** quando Im(f) ≡ B, ovvero quando, $\forall y \in B, \exists \; x \in A$ tale che $y = f(x)$: tutte le y, quindi, devono avere una controimmagine x.
  Si può verificare che una funzione sia suriettiva con il *Secondo Test delle Rette Orizzontali*: se tutte le rette orizzontali tracciabili hanno almeno 1 intersezione con il grafico di f, allora f sarà suriettiva.
  Ad esempio, y = $e^x$ non è suriettiva, mentre y = log x lo è.

- Una funzione f: A→B si dice **BIIETTIVA** o **BIUNIVOCA** quando è sia iniettiva che suriettiva.

Per verificare la biunivocità di una funzione, si usa il *Terzo Test delle Rette Orizzontali*: se tutte le rette orizzontali tracciabili hanno una e una sola intersezione con il grafico di f, allora f sarà biunivoca.

## 2.2 Funzioni Composte

Si supponga di avere f: A→B e g: C→D. Tuttavia, si ha anche che Im(f) ⊆ C: quindi, B≡C.
Partendo da un elemento x in A, dunque, si otterrà un elemento z contenuto in B tramite l'applicazione di f e, in seguito, z subirà la trasformazione (rappresentata dalla funzione g) in un elemento y contenuto in D.
Si può quindi trovare una funzione g(f): A→D, ovvero la **funzione composta di f di g**:

- Siano f: A→B e g: C→D, con Im(f) ⊆ C. Si dice **FUNZIONE COMPOSTA** fra f e g la funzione g(f): A→D tale che:

$$g(f)(x) = g\big(f(x)\big), \forall x \in A$$

*Esempio: $f(x) = 3x - 4$; $g(x) = e^x$.*
*$g(f) = e^f = e^{3x-4}$*
*$f(g) = 3g - 4 = 3e^x - 4$*

*Esempio (tema d'esame): $f(x) = 2e^{x+4}$; $g(x) = 4x^3$.*
*Trovare f(g(-1)).*
*$g(-1) = -4$*
*$f(g(-1)) = 2e^{+4-4} = 2$*

Occorre fare attenzione nella composizione di funzioni che hanno un dominio diverso l'una dall'altra: Im(g) deve essere ⊆ Dom(f).

*Esempio: $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 - 1$ .*
*$g(f) = f^2 - 1 = (\sqrt{2})^2 - 1 = x - 1$, ma si tiene conto di Dom(f): $x \geq 0$.*
*$f(g) = \sqrt{g} = \sqrt{x^2 - 1}$, ma si tiene conto di Dom(f(g)): $x \leq -1 \; e \; x \geq 1$.*

## 2.3 Funzioni Inverse

Se si ha f: A→B e si vogliono scambiare dominio e codominio mantenendo le associazioni tra gli elementi (ovvero mantenendo le coppie $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$,…) si può utilizzare lo strumento della **funzione inversa**.
Va ricordato che una funzione è invertibile soltanto se è iniettiva.

- Sia f: A→B iniettiva. Si dice **FUNZIONE INVERSA** di f la funzione $f^{-1}$: Im(f)→A tale che $x = f^{-1}(y)$ se e solo se y = f(x).

*Esempio: $f(x) = \frac{3x-1}{4x+2}$.*

*$y = \frac{3x-1}{4x+2}$ => $(4x + 2)y = 3x - 1$ => $4xy + 2y = 3x - 1$ => $x(4y - 3) = -2y - 1$ => $x = \frac{-2y-1}{4y-3} = f^{-1}(x)$.*

Per invertire una funzione iniettiva, dunque, sarà sufficiente esprimere la x in funzione della y.
Graficamente, si noterà che le due funzioni saranno simmetriche rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante (y = x).

## 2.4 Massimi, Minimi, Estremi

- Una funzione f si dice **LIMITATA** se la sua Immagine Im(f) è un insieme limitato (la definizione vale sia per la limitazione superiore che per quella inferiore).
- Il **MASSIMO ASSOLUTO** di f(x) è il massimo di Im(f).
- Il **MINIMO ASSOLUTO** di f(x) è il minimo di Im(f).

In corrispondenza dei valori di massimo e di minimo assoluto di Im(f) (ovvero sull'asse delle y) si identificano dei **punti di massimo/minimo**, che corrispondono alle controimmagini del massimo e del minimo sull'asse delle x:

- Sia f: A⊆ $\mathbb{R}$→**R**. Il punto $x_0 \in A$ si dice **PUNTO DI MASSIMO ASSOLUTO** per f(x) su A quando:
$$f(x_0) \geq f(x), \forall x \in A$$

- Sia f: A⊆ $\mathbb{R}$→**R**. Il punto $x_0 \in A$ si dice **PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO** per f(x) su A quando:
$$f(x_0) \leq f(x), \forall x \in A$$

È possibile trovare punti di massimo e di minimo assoluti anche per dei sottoinsiemi di A:

- Sia f: A⊆ $\mathbb{R}$→**R** e sia C ⊆ A. Il punto $x_0 \in C$ si dice **PUNTO DI MASSIMO ASSOLUTO** per f(x) su C quando:
$$f(x_0) \geq f(x), \forall x \in C$$

- Sia f: A⊆ $\mathbb{R}$→**R** e sia C ⊆ A. Il punto $x_0 \in C$ si dice **PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO** per f(x) su C quando:
$$f(x_0) \leq f(x), \forall x \in C$$

Perché esistano i valori di massimo e minimo assoluti di una funzione, occorre che la funzione sia **limitata** superiormente o inferiormente (o entrambe). Si tratta di una condizione necessaria ma non sufficiente: $y = e^x$, ad esempio, è limitata inferiormente ma non ha un minimo assoluto.

- Si dice **ESTREMO SUPERIORE** di f(x) l'estremo superiore di Im(f).
- Si dice **ESTREMO INFERIORE** di f(x) l'estremo inferiore di Im(f).

Una funzione limitata superiormente/inferiormente avrà un estremo superiore/inferiore finito.
Se f(x) è illimitata superiormente/inferiormente e si sta studiando la funzione in $\overline{\boldsymbol{R}}$, l'estremo superiore/inferiore della funzione sarà $\pm\infty$.

Una funzione illimitata superiormente o inferiormente, dunque, mancherà di punti di massimo o di minimo assoluti. Tuttavia, sarà possibile individuare dei **punti di massimo/minimo relativi**:

- Sia f: A⊆ $\mathbb{R}$→**R**. Il punto $x_0 \in A$ si dice **PUNTO DI MASSIMO RELATIVO** (o **locale**) per f(x) su A quando esiste un intorno $I_r(x_0)$ tale che:
$$f(x_0) \geq f(x), \forall x \in A \cap I_r(x_0)$$

- Sia f: A⊆ $\mathbb{R}$→**R**. Il punto $x_0 \in A$ si dice **PUNTO DI MINIMO RELATIVO** (o **locale**) per f(x) su A quando esiste un intorno $I_r(x_0)$ tale che:

$$f(x_0) \leq f(x), \forall x \in A \cap I_r(x_0)$$

Si ricorda come caso particolare quello delle rette orizzontali (y = k), in cui tutti i punti sono sia punti di massimo che di minimo relativo.

## 2.5 Funzioni Crescenti e Decrescenti, Monotonia

È possibile definire una funzione come **crescente** o **decrescente** applicando i seguenti concetti:

- Sia f: A ⊆ $\mathbb{R}$→**R** e sia I ⊆ A un intervallo. Si dice che f(x) è **CRESCENTE** su I quando:

$$\forall x_1, x_2 \in I, x_2 > x_1, => f(x_2) \geq f(x_1)$$

- Sia f: A ⊆ $\mathbb{R}$→**R** e sia I ⊆ A un intervallo. Si dice che f(x) è **DECRESCENTE** su I quando:

$$\forall x_1, x_2 \in I, x_2 > x_1, => f(x_2) \leq f(x_1)$$

Anche in questo caso si può citare la retta orizzontale (y = k) come caso particolare: è una funzione sia crescente che decrescente.

Applicando una disuguaglianza stretta, si arriva poi ai concetti di funzione **strettamente crescente o decrescente**:

- Sia f: A ⊆ $\mathbb{R}$→**R** e sia I ⊆ A un intervallo. Si dice che f(x) è **STRETTAMENTE CRESCENTE** su I quando:

$$\forall x_1, x_2 \in I, x_2 > x_1, => f(x_2) > f(x_1)$$

- Sia f: A ⊆ $\mathbb{R}$→**R** e sia I ⊆ A un intervallo. Si dice che f(x) è **STRETTAMENTE DECRESCENTE** su I quando:

$$\forall x_1, x_2 \in I, x_2 > x_1, => f(x_2) < f(x_1)$$

Se una funzione è <u>strettamente monotona</u> su I, allora sarà anche <u>iniettiva</u> e <u>invertibile</u> su I.

Le definizioni di funzione crescente, decrescente e monotona valgono anche per le **successioni**:

- Si dice **SUCCESSIONE** una funzione f: $\mathbb{N}$→**R** (che si indica, ad esempio, con $\mathbf{a_n = n^2}$).
  Una successione si rappresenta come un insieme di punti non collegati tra solo: è formata solamente da punti isolati.

# 3. Limiti

## 3.1 Concetti Generali

- Si ha $\lim_{x \to p} f(x) = l$, con p, l ∈ $\overline{R}$ e con p punto di accumulazione per Dom(f), quando, per ogni intorno I(l) esiste un intorno U(p) tale che, per ogni x che appartiene al dominio di f intersecato a U(p), con x diverso da p, si ha che f(x) è contenuto in I(l).
  Ovvero,
  $$\forall I(l)\ \exists\ U(p)\ tale\ che, \forall x \in Dom(f) \cap U(p), x \neq p, si\ ha\ che\ f(x) \in I(l)$$

### 3.1.1 Verificare l'Esistenza di un Limite

*Esempio: Verifica di un limite esistente.*

*f(x)* = $\begin{cases} x^2 - 1, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

*Si vuole verificare che* $\lim_{x\to 0} f(x) = -1$*; quindi, si vuole porre p = 0 e l = -1.*

*Si viene quindi a identificare* $I_\varepsilon(l) = I_\varepsilon(-1) = (-1-\varepsilon;\ -1+\varepsilon), \varepsilon > 0.$

*Per la definizione di limite, si ha che* $\forall I(l)$ *e* $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: U_\delta(p) = U_\delta(0) = (-\delta, +\delta),$ *tale che* $\forall x \in (-\delta, +\delta), x \neq 0, f(x) \in I(-1).$

*Se* $f(x) \in I(-1)$*, significa che* $-1-\varepsilon < x^2 - 1 < -1 + \varepsilon$ => $\begin{cases} -1-\varepsilon < x^2 - 1 \\ x^2 - 1 > -1 + \varepsilon \end{cases}$ =>

=> $\begin{cases} x \in \boldsymbol{R} \\ -\sqrt{\varepsilon} < x < \sqrt{\varepsilon} \end{cases}$ => $-\sqrt{\varepsilon} < x < \sqrt{\varepsilon}.$

*Il limite, dunque, è soddisfatto se,* $\exists I_\delta(0): \forall x \in I_\delta(0), x \neq 0, f(x) \in I(l)$*. Quindi, si deve avere* $0 < \delta \leq \sqrt{\varepsilon}$*, una condizione che è valida se* $-\delta < x < +\delta, x \neq 0$*, ovvero se x appartiene all'intorno di 0.*

*In questo caso, quindi, come si può verificare anche graficamente, il limite è valido e le sue condizioni sono soddisfatte.*

*Esempio: Verifica di un limite non esistente.*

*f(x)* = $\begin{cases} x^2 - 1, x \neq 0 \\ 1, \quad x = 0 \end{cases}.$

*Si ipotizzi di voler verificare che* $\lim_{x\to 0} f(x) = 1.$

*Perché questo limite sia verificato, occorre che* $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \delta = \delta(\varepsilon), tale\ che\ \forall x \in (-\delta, +\delta)\ si\ ha\ che\ 1-\varepsilon < x^2 - 1 < 1 + \varepsilon.$

*Bisogna quindi trovare* $\delta$*, preso un* $\varepsilon$ *qualsiasi:* $\begin{cases} x^2 - 1 < 1 + \varepsilon \\ 1 - \varepsilon < x^2 - 1 \end{cases}$ => $\begin{cases} x^2 < \varepsilon + 2 \\ x^2 > 2 - \varepsilon \end{cases}.$

*Se* $\varepsilon > 2$*, non ci sono problemi: si avrà che* $0 < \delta < \sqrt{2+\varepsilon}.$

*Tuttavia, se* $0 < \varepsilon < 2$*, si otterrà dal sistema precedente che* $\begin{cases} -\sqrt{2+\varepsilon} < x < \sqrt{2+\varepsilon} \\ x < -\sqrt{2-\varepsilon}, \ \ x > \sqrt{2-\varepsilon} \end{cases}$

*La soluzione di questo sistema sarà:* $-\sqrt{2+\varepsilon} < x < -\sqrt{2-\varepsilon}, \ \ \sqrt{2-\varepsilon} < x < \sqrt{2+\varepsilon}$.

*Questa soluzione non fa funzionare la definizione di limite: il punto 0 (ovvero p) non ha soluzioni nella disequazione, dal momento che sta tra* $-\sqrt{2-\varepsilon}$ *e* $\sqrt{2-\varepsilon}$*, ovvero in un intervallo dove la disequazione non è risolta.*
*Pertanto, non si può trovare un* $\delta$*:* $\lim_{x\to 0} f(x) \neq 1$.

*Anche graficamente, si verifica che non esiste un U(0) tale che tutto U(0) stia nella striscia identificata da I(1), quindi il limite deve essere errato.*

*Esempio:* *<u>Verifica di un limite con x → ±∞ e con l = ±∞</u>*
*f(x) = x*$^2$*. Si vuole verificare che* $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty, \ \ con\ l = +\infty, p = -\infty$.
*Prima di tutto si deve verificare che* $-\infty$ *sia un punto di accumulazione di Dom(f); si può quindi procedere alla verifica del limite.*

*Si trova un* $I(l) = I(+\infty) = (M, +\infty), \forall M \in \boldsymbol{R}$ *tale che* $\forall I(l), \exists h: U(p) = U(-\infty) = (-\infty, h)$.
*Si deve quindi avere che* $f(x) = x^2 \in I(l) => \ x^2 > M, \forall M \in \boldsymbol{R}$.
*Tra le soluzioni di* $x^2 > M$ *si troverà h:*

- *Se M < 0,* $x^2 > M$ *è valida* $\forall x \in \boldsymbol{R}$
- *Se M > 0,* $x^2 > M$ *è valida per* $x < -\sqrt{M}$ *e per* $x > \sqrt{M}$.

*Il limite sarà verificato se esiste h tale che* $x^2 > M, \forall x \in U(-\infty)$.
*Nel nostro caso, la definizione di limite sarà soddisfatta se* $h \leq \sqrt{M}$*: il limite* $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ *è corretto e verificato analiticamente.*

*È possibile anche effettuare una verifica grafica: si individua un semipiano (ovvero la rappresentazione grafica di* $I(+\infty)$*) tracciando la retta orizzontale y = M. Successivamente, per ogni possibile valore di M, si deve trovare un valore h sull'asse delle ascisse tale che,* $\forall x < h$*, f(x) si trovi nel semipiano.*
*Anche in questo modo, si trova che la condizione è soddisfatta e che il limite è verificato.*

Esistono funzioni per le quali non esistono limiti in alcuni punti del loro dominio.

*Esempio:* *<u>La Funzione di Dirichélet.</u>*

$$f(x) = \begin{cases} 1, x \in \boldsymbol{R} \backslash \boldsymbol{Q} \\ 0, x \in \boldsymbol{Q} \end{cases}$$

*Se si cerca di calcolare* $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$*, dovrebbe avvenire che* $\forall \varepsilon > 0$ *si possa trovare un U(0) =* $(-\delta, +\delta)\ tale\ che\ \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \delta = \delta(\varepsilon), tale\ che\ \forall x \in (-\delta, +\delta)\ si\ ha\ che\ -\varepsilon < f(x) < +\varepsilon$.

*In ogni U(0), però, si troveranno dei numeri irrazionali: la definizione del limite non è soddisfatta per nessun valore di l.*
*f(x), quindi, non ha un limite in nessun valore di **R**.*

Anche ricercando nel campo delle funzioni elementari, si trova che alcune di esse non hanno un limite per alcuni punti che, tuttavia, sono punti di accumulazione del loro dominio:

*Esempio: f(x) = sen(x)*
*Tutti i punti di $\overline{\mathbf{R}}$ sono punti di accumulazione di questa funzione.*
*Tuttavia, quando si cerca di calcolare $\lim_{x\to+\infty} sen\ x$, si scopre che tale limite non esiste a causa della periodicità della funzione. Infatti, f(x) oscillerà sempre tra i valori -1 e 1, rendendo così impossibile la ricerca di una ε < 1 che renda valida la definizione di limite.*
*Vista l'impossibilità di dire che il limite sia valido per ogni ε, si deve dire che $\lim_{x\to+\infty} sen\ x$ non esiste.*

### 3.1.2 Limiti Destri e Sinistri

Se p ∈ **R**, può avere senso studiare il limite **destro o sinistro** per x che tende a p:

- Si ha un **LIMITE DESTRO** $\boldsymbol{\lim_{x\to p^+} f(x) = l}, p \in \boldsymbol{R}, l \in \overline{\boldsymbol{R}}, p$ punto di accumulazione per Dom(f), quando: $\forall I(l), \exists U_\delta^+(p)\ tale\ che\ \forall x \in U_\delta^+(p)\ \cap Dom(f), x \neq p, si\ ha\ che\ f(x) \in I(l)$.

- Si ha un **LIMITE SINISTRO** $\boldsymbol{\lim_{x\to p^-} f(x) = l}, p \in \boldsymbol{R}, l \in \overline{\boldsymbol{R}}, p$ punto di accumulazione per Dom(f), quando: $\forall I(l), \exists U_\delta^-(p)\ tale\ che\ \forall x \in U_\delta^-(p)\ \cap Dom(f), x \neq p, si\ ha\ che\ f(x) \in I(l)$.

Le definizioni di limite destro e limite sinistro ha senso quando non esiste un limite completo:
$\lim_{x\to p^+} f(x) \neq \lim_{x\to p^-} f(x) => \lim_{x\to p} f(x) \nexists$ ; nel caso in cui questo esista, limite destro e limite sinistro coincidono:
$\lim_{x\to p} f(x) = l \in \overline{\boldsymbol{R}} => \lim_{p^+} f(x) = \lim_{p^-} f(x) = l$.

## 3.2 Teoremi Sui Limiti

**Teorema di Unicità del Limite.**

Se esiste $\lim_{x\to p} f(x)$, questo limite è unico.
(Questo Teorema vale anche nel caso di un limite destro o sinistro).

**Teorema di Permanenza del Segno.**

Se $\lim_{x\to p} f(x) = l \in \overline{\boldsymbol{R}}, l \neq 0$, allora ∃ $U(p)$ tale che $l \cdot f(x) > 0, \forall x \in U(p), x \neq p$.
Questo significa che, per ogni valore di x interno all'intorno U(p), l e f(x) devono avere il medesimo segno (il loro prodotto è positivo).

*Esempio: f(x) =* $\begin{cases} x^2 - 1, x \neq 0 \\ 1, \quad\quad x = 0 \end{cases}$
$\lim_{x\to 0} f(x) = -1$
*Il Teorema garantisce che esiste un intorno U(0) in cui f(x) sarà negativa (per $x \neq 0$).*

Non vale, tuttavia, l'implicazione inversa: esistono funzioni tali che f(x) < 0 e l > 0, o viceversa.



www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

**Primo Teorema del Confronto.**

Se esiste U(p), tale che $f(x) \geq 0 \;\; \forall x \in U(p), x \neq p$, e se $\lim_{x \to p} f(x) = l \in \boldsymbol{R}$, allora $l \geq 0$.

*Esempio: f(x) = e^x^. f(x) è > 0 per ogni valore di x.*

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0.$

*Se $f(x) \geq 0$ in U(p), allora $l \geq 0$.*

*Se $f(x) \leq 0$ in U(p), allora $l \leq 0$.*

**Secondo Teorema del Confronto (Teorema dei Carabinieri)**

Siano f: A ⊆ **R**→**R**, g: A ⊆ **R**→**R**, h: A ⊆ **R**→**R** e sia p un punto di accumulazione per A.

Se esiste un intorno U(p) tale che $f(x) \leq g(x) \leq h(x), \forall x \in U(p), x \neq p$, e se $\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to p} h(x) = l \in \boldsymbol{R}$, allora $\lim_{x \to p} g(x) = l$.

*Esempio: $lim_{x \to +\infty} \frac{sen\, x}{x}$.*

*La funzione $\frac{sen\, x}{x}$ è sicuramente compresa tra $-\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{x}$, dal momento che sen x sarà compreso tra -1 e 1.*

*Si ha inoltre che $lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.*

*Sono soddisfatte le condizioni del teorema: pertanto, $lim_{x \to +\infty} \frac{sen\, x}{x} = 0$.*

**Teorema dei Limiti di Funzioni Monotone**

<u>Per le funzioni crescenti</u>:

Sia f: A ⊆ **R**→**R** una funzione crescente su (a, b) ⊆ A.

Allora, esistono i limiti $\lim_{x \to a^+} f(x) = inf_{x \in (a,b)} f(x)$ e $\lim_{x \to b^-} f(x) = sup_{x \in (a,b)} f(x)$.

Oppure, <u>per le funzioni decrescenti</u>:

Sia f: A ⊆ **R**→**R** una funzione decrescente su (a, b) ⊆ A.

Allora, esistono i limiti $\lim_{x \to a^+} f(x) = sup_{x \in (a,b)} f(x)$ e $\lim_{x \to b^-} f(x) = inf_{x \in (a,b)} f(x)$.

*Esempio: f(x) = e^x^, funzione crescente su tutto **R**.*

*Se si prende $\lim_{x \to a^+} f(x)$, si ha che $\lim_{x \to -\infty} e^x = inf_{x \in (-\infty,0)} e^x = 0$.*

*Se si prende $\lim_{x \to b^-} f(x)$, si ha che $\lim_{x \to +\infty} e^x = sup_{x \in (0,+\infty)} e^x = +\infty$.*

*Per p = 0, invece, si avrà che:*

$\lim_{x \to 0^-} e^x = sup_{x \in (-\infty,0)} e^x = 1.$

$\lim_{x \to 0^+} e^x = inf_{x \in (0,+\infty)} e^x = 1.$

*Limite destro e limite sinistro coincidono, quindi $\lim_{x \to 0} e^x = 1 = f(0)$.*

*Generalizzando, $\lim_{x \to p} e^x = e^p, \forall p \in \boldsymbol{R}$.*

## 3.3 Algebra dei Limiti

## Teorema della Somma Algebrica dei Limiti

Siano f: A ⊆ **R**→**R**, g: A ⊆ **R**→**R** e sia p punto di accumulazione per A.
Se $\lim_{x\to p} f(x) = l_1 \in \overline{\boldsymbol{R}}$ e $\lim_{x\to p} g(x) = l_2 \in \overline{\boldsymbol{R}}$, allora $\lim_{x\to p} f(x) + g(x) = l_1 + l_2$, purchè $l_1$ e $l_2$ non siano infiniti di segno opposto.

Vale quindi la seguente tabella:

| **+** | **g** | $l_2 \in$ **R** | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| **f** | | | | |
| $l_1 \in$ **R** | | $l_1 + l_2$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $+\infty$ | | $+\infty$ | $+\infty$ | **?** |
| $-\infty$ | | $-\infty$ | **?** | $-\infty$ |

Il Teorema non può predire in anticipo cosa accadrà nel caso della somma tra infiniti di segno opposto: potranno verificarsi 4 diverse situazioni.

1. $\lim_{x\to p} f(x) + g(x) = -\infty$
   *Esempio: f(x) = x; g(x) = -x².*
2. $\lim_{x\to p} f(x) + g(x) = +\infty$
   *Esempio: f(x) = -x; g(x) = x²*
3. $\lim_{x\to p} f(x) + g(x) = l \in \boldsymbol{R}$
   *Esempio: f(x) = x + 3; g(x) = -x*
4. $\lim_{x\to p} f(x) + g(x)$ non esiste
   *Esempio: f(x) = x; g(x) = sen x*

Quella della somma di infiniti con segno opposto viene quindi definita **Forma di Indecisione**.

È inoltre possibile individuare una tabella per il **prodotto tra i limiti**:

| **x** | **g** | $l_2 \in$ **R**$\setminus\{0\}$ | $0$ | $\pm\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| **f** | | | | |
| $l_1 \in$ **R**$\setminus\{0\}$ | | $l_1 \cdot l_2$ | $0$ | $\pm\infty$ |
| $0$ | | $0$ | $0$ | **?** |
| $\pm\infty$ | | $\pm\infty$ | **?** | $\pm\infty$ |

La **Forma di Indecisione**, in questo caso, è la moltiplicazione $\pm\infty \cdot 0$.

Per quanto riguarda il **Quoziente tra limiti**, si ottiene:

| **/** | **g** | $l_2 \in$ **R**$\setminus\{0\}$ | $0$ | $\pm\infty$ |
|---|---|---|---|---|

| f | | | |
|---|---|---|---|
| $l_1 \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$ | $l_1 / l_2$ | $\pm\infty$ | 0 |
| 0 | 0 | **?** | 0 |
| $\pm\infty$ | $\pm\infty$ | $\pm\infty$ | **?** |

Le **Forme di Indecisione** saranno quindi $\frac{0}{0}$ e $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.
Inoltre, si ricordano tra le **F.I.** anche le esponenziali $1^{\infty}$, $0^0$ e $\infty^0$.

## 3.4 Continuità di una Funzione

- Sia f: A ⊆ $\mathrm{R}$→**R** e sia p ∈ A un punto di accumulazione per A. f(x) si dice **CONTINUA** in p quando $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$.

Si nota che, se p è un <u>punto isolato</u> di A, allora f(x) sarà sicuramente <u>continua</u> in p.
La definizione, quindi, fallisce quando la f(x) ha dei <u>punti di discontinuità</u> nei punti di accumulazione di A (anche nei punti di accumulazione che non appartengono ad A).
Le funzioni elementari sono continue per ogni punti che appartiene al loro dominio (ma non necessariamente per ogni punto che appartiene a **R**).

### 3.4.1 Punti di Discontinuità

I punti di discontinuità che si possono trovare in una funzione di dividono i 3 specie:

1. **Punti di Discontinuità di Prima Specie** (“**Salto**”).
   Sia f: A ⊆ $\mathrm{R}$→**R** e sia p ∈ A un punto di accumulazione per A. Si dice che p è **PUNTO DI DISCONTINUITA’ DI PRIMA SPECIE** per f quando $\lim_{x\to p^-} f(x) = l_1 \in \boldsymbol{R}, \lim_{x\to p^+} f(x) = l_2 \in \boldsymbol{R}$, $l_1 \neq l_2$.
   Il “salto” nel grafico della funzione sarà uguale a $|l_1 - l_2|$.

2. **Punti di Discontinuità di Seconda Specie** (“**Discontinuità Essenziale**”).
   Sia f: A ⊆ $\mathrm{R}$→**R** e sia p ∈ A un punto di accumulazione per A. Si dice che p è **PUNTO DI DISCONTINUITA’ DI SECONDA SPECIE** per f quando almeno uno dei limiti destro o sinistro per x→p è uguale a $\pm\infty$, oppure non esiste.
   In questo caso, la funzione avrà un asintoto verticale; il “salto” sarà di ampiezza infinita.

3. **Punti di Discontinuità di Terza Specie** (“**Eliminabile**”).
   Sia f: A ⊆ $\mathrm{R}$→**R** e sia p ∈ A un punto di accumulazione per A. Si dice che p è **PUNTO DI DISCONTINUITA’ DI TERZA SPECIE** per f quando $\lim_{x\to p} f(x) = l \in \boldsymbol{R}$, ma $f(p) \neq l$ (ovvero, p non appartiene a Dom(f)).

### 3.4.2 Limite di una Funzione Composta

Per calcolare il limite di una funzione composta f(g) è fondamentale prendere come ipotesi la continuità di questa funzione nel punto $y_0$.

Si supponga, quindi, di avere f(y) continua in $y_0$ e g(x) tale che $\lim_{x\to x_0} g(x) = y_0$. Se si vuole calcolare $\lim_{x\to x_0} f\big(g(x)\big)$, dal momento che f(x) è continua in $x_0$, si avrà che $\lim_{x\to x_0} f\big(g(x)\big) = f(y_0)$.
Quindi, il **limite di una funzione composta** sarà $\boldsymbol{\lim_{x\to x_0} f\big(g(x)\big) = f(\lim_{x\to x_0} g(x))}$ .

*Esempio: f(x) = $e^y$; g(x) = $x^2$.*

$$\lim_{x\to 0} e^{x^2} = e^{\lim_{x\to 0} x^2} = e^0 = 1$$

### 3.4.3 Conservazione della Continuità
La somma, la differenza e il prodotto di due funzioni continue daranno come risultato una funzione continua.
Per quanto riguarda il quoziente tra due funzioni continue, invece, il risultato sarà una funzione continua se il denominatore del rapporto sarà diverso da 0.

Anche la composizione tra due funzioni continue conserva la continuità: se f: A ⊆ **R**→**R** e g: B ⊆ **R**→**R**, Im (g) ⊆ Dom (f).
Pertanto, se f è continua in $y_0$ e g è continua in $x_0$, con $g(x_0) = y_0$, allora f(g) sarà continua in $x_0$.

Per quanto riguarda la funzione inversa di una funzione continua, anch'essa conserverà la sua continuità: se f: A ⊆ **R**→**R** è iniettiva e continua in $x_0 \in A$, allora $f^{-1}(y)$ sarà continua in $y_0 = f(x_0)$.

## 3.5 Calcolo dei Limiti

### 3.5.1 Confronto tra Infiniti
Siano f(x) e g(x) due funzioni tali che $\lim_{x\to p} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x\to p} g(x) = \pm\infty$, con p ϵ **R**.
Volendo calcolare $\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)}$, si aprono 4 possibili alternative:

1. $\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$, f(x) è **INFINITO DI GRADO SUPERIORE** di g(x).
   *Esempio:* $lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{x^3} = lim_{x\to+\infty}\, x = +\infty$.

2. $\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, f(x) è **INFINITO DI GRADO INFERIORE** di g(x).
   *Esempio:* $lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^4} = lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

3. $\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \overline{\boldsymbol{R}}\backslash\{0\}$, f(x) e g(x) sono **INFINITI DELLO STESSO GRADO**.
   *Esempio:* $lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-2}{2x^2+3} = \frac{3}{2}$.

4. $\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)}$ non esiste, f(x) e g(x) sono **INFINITI NON CONFRONTABILI**.
   *Esempio:* $lim_{x\to+\infty} \frac{x(sen^2x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} sen^2x$ *non esiste.*

### 3.5.2 Confronto tra Infinitesimi
Siano f(x) e g(x) due funzioni tali che $\lim_{x\to p} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to p} g(x) = 0$, con p ϵ **R**.

Volendo calcolare $\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}$, si aprono 4 possibili alternative:

1. $\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}=0$, f(x) è **INFINITESIMO DI GRADO SUPERIORE** di g(x).
   *Esempio:* $lim_{x\to+\infty}\frac{x^{-4}}{x^{-3}}=lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$

2. $\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty$, f(x) è **INFINITESIMO DI GRADO INFERIORE** di g(x).
   *Esempio:* $lim_{x\to+\infty}\frac{(\frac{1}{2})^x}{\left(\frac{1}{3}\right)^x}=lim_{x\to+\infty}(\frac{3}{2})^x=+\infty.$

3. $\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}=l\in\overline{\boldsymbol{R}}\backslash\{0\}$, f(x) e g(x) sono **INFINITESIMI DELLO STESSO GRADO**.
   *Esempio:* $\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\log_2 x}}{\frac{1}{\log_3 x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_3 x}{\log_2 x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_3 x}{\frac{\log_3 x}{\log_3 2}}=\lim_{x\to+\infty}\log_3 2=\log_3 2.$

4. $\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}$ non esiste, f(x) e g(x) sono **INFINITESIMI NON CONFRONTABILI**.
   *Esempio:* $lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{senx}{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(senx)}{x}=\lim_{x\to+\infty}senx$ *non esiste.*

## 3.6 I Simboli di Landau

Nel campo dei limiti, si possono utilizzare anche due simboli detti **Simboli di Landau**:

- $\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}=0\Leftrightarrow f=o(g)$ ("f è o piccolo di g")
  Il simbolo o definisce tutte le funzioni f che, per x che tende a p, rapportate a g, danno lim = 0. Pertanto, si dice che il simbolo o **definisce gli infinitesimi**.
  In particolare, se f e g sono entrambe infinitesime per x che tende a p, dire che $f=o(g)$ equivale a dire che <u>f è infinitesimo di ordine superiore rispetto a g</u> per x che tende a p (dal momento che il limite del loro rapporto tenderà a 0).
  Quando, invece, f e g sono entrambe infinite per x che tende a p, dire che $f=o(g)$ equivale a dire che <u>f è infinito di ordine inferiore a g</u> per x che tende a p.
  Inoltre, avviene che $\lim_{x\to p}f(x)=l\in\boldsymbol{R}\Leftrightarrow f(x)=l+o(1)$, dove o(1) rappresenta un errore di approssimazione infinitesimo (f(x) è circa l).

- $f(x)_{x\to p}\sim g(x)\Leftrightarrow\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}=1$ ("f(x) è **asintotico** a g(x)")
  Se $f(x)_{x\to p}\sim g(x)$ e f(x) e g(x) sono entrambe infinite per x che tende a p, allora saranno <u>infiniti dello stesso ordine</u>.
  Allo stesso modo, se $f(x)_{x\to p}\sim g(x)$ e f(x) e g(x) sono entrambe infinitesime per x che tende a p, allora saranno <u>infinitesimi dello stesso ordine</u>.
  Infine, se $f(x)_{x\to p}\sim g(x)$, allora $\lim_{x\to p}f(x)=\lim_{x\to p}g(x)$.

Un'importante proprietà che riguarda questi due simboli è la seguente:

$$\frac{f(x)+o\big(f(x)\big)}{g(x)+o\big(g(x)\big)}\sim\frac{f(x)}{g(x)}$$

Quindi, si avrà che $\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to p}\frac{f(x)+o(f(x))}{g(x)+o(g(x))}$.

*Esempio:* $\lim_{x\to+\infty}\frac{3e^{-x}+2x^3-1}{x^2-2x}$
*Sia il numeratore che il denominatore tendono a* $+\infty$.
*In questo caso, si nota che* $(3e^{-x}-1)$ *e* $-2x$ *sono* <u>*trascurabili nel calcolo del limite*</u>*; quindi,* $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+o(2x^3)}{x^2+o(x^2)}$, *dove* $o(2x^3) = (3e^{-x}-1)$ *e* $o(x^2) = -2x$.
*Infatti, si ha che* $\lim_{x\to+\infty}\frac{3e^{-x}-1}{2x^3} = 0$ *e* $\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{x^2} = 0$, *come richiesto dalla definizione di "o piccolo".*
*Si può quindi dire che* $\lim_{x\to+\infty}\frac{3e^{-x}+2x^3-1}{x^2-2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x^2} = +\infty$.
*I limiti coincidono perché* $\frac{3e^{-x}+2x^3-1}{x^2-2x} \sim \frac{2x^3}{x^2}$.

## 3.7 Limiti Notevoli

1. $\mathbf{\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x} = 1}$
Si tratta di un limite che avrebbe forma indeterminata 0/0. Tuttavia, come si può dimostrare tramite il teorema del confronto, questo limite è finito e uguale a 1.
Si può esprimere anche attraverso i simboli di Landau: $\frac{senx}{x} = 1 + o(1), x \to 0$. Questo è un modo per approssimare: quando $\lim_{x\to p} f(x) = l \in \boldsymbol{R}$, si può dire che $f(x) = l + o(l), x \to p$.
Svolgendo poi l'equazione ottenuta con i simboli di Landau, si ottiene $sen\,x = x + o(x), x \to 0$; questo equivale a dire che $sen\,x \sim x, x \to 0$.
Le due funzioni, quindi, sono asintotiche per questo valore di x: intorno allo 0, le due funzioni tendono a coincidere e l'approssimazione tende a 0.

2. $\mathbf{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}}$
Con i simboli di Landau, si ha che $\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{2}\right)$.
Svolgendo, si ottiene $1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \Rightarrow \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$.
Quindi, $\cos x \sim -\frac{1}{2}x^2 + 1, x \to 0$: la funzione coseno, per x che tende a 0, tende a coincidere con una parabola con concavità verso il basso.

3. $\mathbf{\lim_{x\to 0}\frac{tg\,x}{x} = 1}$
Con i simboli di Landau, $tg\,x = x + o(x), x \to 0 \Rightarrow tg\,x \sim x, x \to 0$.

4. $\mathbf{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$
Questo limite si presenterebbe come una forma di indecisione esponenziale, del tipo $1^\infty$; tuttavia, ha un limite finito perché è una funzione monotona e limitata.

5. $\mathbf{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e}$
Analogo al precedente, si effettua solo un cambio di variabili.

6. $\boldsymbol{\lim_{x\to 0} ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = ln\, e = 1}$
   Si può quindi scrivere $\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 + o(1) \Rightarrow \ln(1+x) = x + o(x), x \to 0$.
   Quindi, $\ln(1+x) \sim x, x \to 0$.

7. $\boldsymbol{\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$
   Quindi, $\frac{e^x-1}{x} = 1 + o(1) \Rightarrow e^x - 1 = x + o(x) \Rightarrow e^x - 1 \sim x, x \to 0$.
   Inoltre, $e^x = x + 1 + o(x) \Rightarrow e^x \sim x + 1, x \to 0$.

## 3.8 Asintoti

- Una retta è un **ASINTOTO** per una funzione f(x) quando la distanza tra il grafico di f(x) e la retta tende a 0 quando la distanza di un punto di f(x) dall'origine tende a ∞.

**N.B.:** Questo non significa che il grafico della funzione non possa avere intersezioni con l'asintoto: nel caso di $f(x) = \frac{senx}{x}$, ad esempio, l'asse delle ascisse è un asintoto (vale la definizione sopra riportata) anche se la funzione ha infinite intersezioni con tale retta.

Gli asintoti di una funzione possono essere di vario genere:

- **ASINTOTO ORIZZONTALE**: la retta y = k sarà **asintoto orizzontale** per la funzione f(x) per $x \to \pm\infty$ quando $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = k \in \boldsymbol{R}$.

  *Esempio*: $f(x) = \frac{senx}{x}$
  *Sappiamo che questa funzione sarà sempre compresa tra i valori -1 e 1, perché vincolata al valore di sen x. Il numeratore della funzione, quindi, sarà sempre un numero reale.*
  *Se si calcola* $\lim_{x\to+\infty} f(x)$*, si otterrà quindi la situazione* $0 \le \frac{senx}{x} \le 0, x \to +\infty$.
  *Quindi,* $\lim_{x\to+\infty} \frac{senx}{x} = 0$*: y = 0, ovvero l'asse delle ascisse, sarà asintoto orizzontale di f(x) per* $x \to \pm\infty$ *(la stessa situazione vale per -∞).*

- **ASINTOTO VERTICALE**: la retta x = p si dice **asintoto verticale** per la funzione f(x) quando $\lim_{x\to p^+} f(x) = \pm\infty$ oppure $\lim_{x\to p^-} f(x) = \pm\infty$. In ogni caso, p deve essere punto di accumulazione del Dominio di f(x).

  *Esempio:* $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$
  *Il Dominio è rappresentato da tutti i valori di **R** escluso lo 0, che tuttavia è comunque un punto di accumulazione del dominio stesso.*
  $\lim_{x\to 0^+} f(x) = e^{+\infty} = +\infty$*: x = 0 sarà asintoto verticale per x che tende a 0 da destra.*
  $\lim_{x\to 0^+} f(x) = e^{-\infty} = 0$*: per x che tende a 0 da sinistra, invece, non ci sono asintoti verticali.*
  *Inoltre, questa funzione avrà anche un asintoto orizzontale per* $x \to \pm\infty$*: è la retta y = 1.*

- **ASINTOTO OBLIQUO**: la retta y = mx + q, con $m \neq 0$, è **asintoto obliquo** per una funzione f(x) quando $f(x) \sim mx + q, x \to \pm\infty$ e quando $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ (condizione necessaria).

Inoltre, $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = m, m \in \boldsymbol{R}\backslash\{0\}$ (condizione necessaria).
Infine, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx = q \in \boldsymbol{R}$ (condizione necessaria e sufficiente).

*Esempio:* $f(x) = \frac{3x^2-2x}{2x-1}$
$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-2x}{2x-1} = +\infty$*: esiste un asintoto obliquo per* $x \to \pm\infty$.
$m = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2-2x}{2x-1}\cdot\frac{1}{x} = \frac{3}{2}$*: si trova così il coefficiente angolare dell'asintoto.*
$q = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2-2x}{2x-1}\cdot\frac{3}{2}x = \frac{1}{4}$*: si trova così anche il valore dell'ordinata all'origine.*
*L'asintoto obliquo di f(x) per* $x \to \pm\infty$*, quindi, sarà* $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$.

## 3.9 Teoremi sulle Funzioni Continue

**Teorema di Weierstrass.**
Sia f(x) una funzione continua su un insieme A chiuso e limitato. Allora, f(x) ammette massimo e minimo assoluti su A.

**N.B.:** Questo teorema è soddisfatto e applicabile se e solo se sono soddisfatte tutte e tre le ipotesi, ovvero la continuità della funzione in A, la chiusura di A e la limitatezza di A.

**Teorema dei Valori Intermedi (di Darboux).**
Se f(x) è continua su un intervallo chiuso e limitato [a, b], allora f(x) assume tutti i valori compresi tra il massimo assoluto e il minimo assoluto.

$$f([a,b]) = [m, M]$$

**N.B.:** In questo caso, l'ipotesi prevede la continuità su un intervallo, e non su un insieme come nel teorema di Weierstrass. Restano sempre anche le ipotesi della chiusura e della limitatezza dell'intervallo in oggetto.

**Teorema degli Zeri.**
Sia f(x) continua su un intervallo chiuso e limitato [a, b] e sia $f(a)\cdot f(b) < 0$. Allora, esiste $c \in (a,b)$ tale che $f(c) = 0$.

Questo teorema è una conseguenza del Teorema dei Valori Intermedi: se f assume tutti i valori tra m e M e se si ha che m < 0 e M > 0, allora f dovrà assumere anche il valore 0.

Questi teoremi possono risultare utili per equazioni non risolvibili con i metodi algebrici tradizionali: permetteranno di capire se una soluzione esiste e anche di individuare l'intervallo in cui si trova la soluzione stessa, attraverso il **metodo di bisezione**.

*Esempio:* $e^x + 2x = 0$
$f(x) = e^x + 2x$ *è continua su tutto* ***R*** *(dal momento che è la somma di due funzioni continue).*
*Per trovare il punto in cui la funzione assume valore 0, si può scegliere un intervallo in cui la funzione assume valori di segno discorde, per poi applicare il teorema degli Zeri.*
$f(0) = 1; f(-1) \leq 0$*: ci sarà una soluzione nell'intervallo (-1, 0).*

*Per ridurre l'intervallo in cui si trova la soluzione, si applica il metodo della bisezione: si dimezza il valore di uno degli estremi dell'intervallo, cercando di applicare ancora il teorema.*

$f\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$*: ci sarà una soluzione nell'intervallo* $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$*.*

$f\left(-\frac{1}{4}\right) > 0$*: ci sarà una soluzione dell'intervallo* $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$*.*

*E così via, riducendo sempre più l'intervallo.*

# 4. Algebra Lineare

## 4.1 Vettori

### 4.1.1 Concetti Fondamentali

Prendendo due qualsiasi insiemi A e B, una delle possibili operazioni che si possono svolgere è il prodotto cartesiano, che consiste nel formare l'insieme di tutte le coppie ordinate composte da un elemento di A e da un elemento di B. Il concetto di coppia ordinata è fondamentale e prevede che AxB sia diverso da BxA.
Ragionando sull'insieme **R** e ponendo sia A che B uguali a **R**, si avrà che $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^2 \coloneqq \{(x, y) | x, y \in \boldsymbol{R}\}$; l'insieme così ottenuto coinciderà con il piano cartesiano. Stesso discorso vale per $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^3 \coloneqq \{(x, y, z) | x, y, z \in \boldsymbol{R}\}$, che rappresenta invece lo spazio.

In generale, $\mathbf{R}^n$ è definibile come l'insieme di tutte le n-uple ordinate di numeri reali: $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, con $x_j \in \mathbf{R}$, j = 1 … n.
Ognuna di queste n-uple ordinate si dirà **VETTORE** di $\mathbf{R}^n$ e si potrà indicare, ad esempio, con $\underline{\mathbf{x}}$.
Ad esempio, (1, 2) sarà un vettore di $\mathbf{R}^2$ e sarà diverso dal vettore (2, 1): si parla infatti di coppie ordinate.

Per quanto riguarda le notazioni, in algebra lineare si distingue tra **componenti j-esime** del vettore $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e **vettori** ($\underline{\mathbf{x}}^1$, $\underline{\mathbf{x}}^2$, …). Pertanto, $\underline{\mathbf{x}}^1 = \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix}$, $\underline{\mathbf{x}}^2 = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix}$, $\underline{\mathbf{x}}^3 = \begin{bmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \end{bmatrix}$.

I vettori possono inoltre essere espressi come vettori riga $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o vettori colonna, in scrittura matriciale $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. Un vettore riga si può indicare anche come $\underline{\mathbf{x}}'$ o come $\underline{\mathbf{x}}^T$ (ovvero x trasposto) e si può indicare con $[x_1, x_2]$.

In $\mathbf{R}^n$ si possono individuare anche dei **vettori fondamentali**, detti anche **versori**, che si indicano con $\underline{\mathbf{e}}^1$, $\underline{\mathbf{e}}^2$, … , $\underline{\mathbf{e}}^n$. I versori hanno fino a n componenti e si formano ponendo 1 in una determinata componente del vettore e 0 in tutte le altre: ad esempio, facendo il caso di $\mathbf{R}^3$, i versori saranno $\underline{\mathbf{e}}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\underline{\mathbf{e}}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ed $\underline{\mathbf{e}}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Graficamente, in una rappresentazione cartesiana, un vettore di $\mathbf{R}^2$ si potrà rappresentare sia come un punto del piano che come la freccia (appunto, il vettore) che congiunge l'origine degli assi con il punto stesso.

### 4.1.2 Struttura d'Ordine dei Vettori

Dati due vettori $\underline{\mathbf{x}}$ e $\underline{\mathbf{y}}$ entrambi appartenenti a $\mathbf{R}^n$, si può avere che:

- $\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{y}}$ se e solo se $x_j = y_j$, $\forall j = 1 \ldots n$;
- $\underline{\mathbf{x}} > \underline{\mathbf{y}}$ quando $x_j > y_j$, $\forall j = 1 \ldots n$;
- $\underline{\mathbf{x}} \geq \underline{\mathbf{y}}$ quando $x_j \geq y_j$, $\forall j = 1 \ldots n$ ma $\underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\mathbf{y}}$;
- $\underline{\mathbf{x}} \geqq \underline{\mathbf{y}}$ quando $x_j \geq y_j$, $\forall j = 1 \ldots n$.

Ne consegue che, se $\underline{\mathbf{x}} > \underline{\mathbf{y}}$, allora $\underline{\mathbf{x}} \geq \underline{\mathbf{y}}$ e $\underline{\mathbf{x}} \geqq \underline{\mathbf{y}}$.

Esistono dunque vettori, come $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, che non risultano confrontabili: l'ordinamento non è completo, esiste una **struttura d'ordine parziale**.

### 4.1.3 Struttura Algebrica dei Vettori

Compongono la struttura algebrica dei vettori 3 operazioni:

- **Somma tra Vettori**: siano dati **x**, **y** ∊ **R**$^n$**.** Si dice **SOMMA** tra **x** e **y** il vettore **z** ∊ **R**$^n$ tale che $z_j = x_j + y_j$, con j = 1 … n.

  *Esempio:* $\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\4\\\sqrt{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\\3+\sqrt{2}\end{bmatrix}$

  La somma tra vettori gode delle proprietà commutativa e associativa; esiste l'elemento neutro: è il vettore **o**. Graficamente, si può calcolare utilizzando la regola del parallelogramma.

- **Prodotto per uno Scalare** (o **Prodotto Esterno**): siano dati **x** ∊ **R**$^n$ e α ∊ **R**. Si dice **PRODOTTO ESTERNO** tra α e **x** (α**x**) un vettore **z** ∊ **R**$^n$ tale che $z_j = \alpha x_j$, con j = 1 … n.

  *Esempio:* $-2\cdot\begin{bmatrix}3\\1\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6\\-2\\8\end{bmatrix}$

  Il prodotto esterno gode delle proprietà commutativa, associativa, distributiva. L'elemento neutro è α = 1. Graficamente, il prodotto esterno identifica una retta su cui giace il vettore **x**.

- **Prodotto Scalare** (o **Prodotto Interno**): siano dati **x**, **y** ∊ **R**$^n$**.** Si dice **PRODOTTO INTERNO** tra **x** e **y** il numero **z** ∊ **R** tale che: $z = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot y_j = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \cdots + x_n \cdot y_n$

  *Esempio:* $\begin{bmatrix}-1\\2\\3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}=-1+(-4)+3=-2$

  Il prodotto interno si può indicare con **x** · **y**, <**x**, **y**>, (**x**; **y**), **x**$^T$**y**.

  In questa operazione non vale la legge di annullamento del prodotto: il prodotto di due vettori non nulli, infatti, può dare 0. Questo avviene quando si svolge il prodotto di due vettori ortogonali, come $\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$.

  Tuttavia, anche il vettore nullo $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ è in grado di annullare un prodotto interno.

Un altro concetto importante è quello di **norma euclidea**:

- Dato **x** ∊ **R**$^n$ si dice **NORMA EUCLIDEA** di **x** il numero α = $\sqrt{\underline{x}\cdot\underline{x}} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\underline{x}_j^2} = \|\underline{x}\|$. La norma euclidea corrisponde al **modulo** del vettore, ovvero alla sua lunghezza sul piano cartesiano.

  *Esempio:* $\left\|\begin{bmatrix}-1\\2\\3\end{bmatrix}\right\| = \sqrt{(-1)^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$

### 4.1.4 Dipendenza e Indipendenza Lineare

- Siano dati i vettori **x**$^1$, **x**$^2$, **x**$^3$, … , **x**$^k$ ∊ **R**$^n$. Essi sono **LINEARMENTE DIPENDENTI** quando almeno uno di loro può essere espresso come combinazione lineare dei rimanenti.

  Essi sono **LINEARMENTE INDIPENDENTI** altrimenti, ovvero quando nessuno di loro può essere espresso come combinazione lineare dei rimanenti.

Serve quindi una definizione di **combinazione lineare**:

- Siano dati i vettori **x**$^1$, **x**$^2$, **x**$^3$, … , **x**$^k$ ∊ **R**$^n$ e i **pesi** (coefficienti) $c_1, c_2, \dots, c_k$ ∊ **R**. Si dice **COMBINAZIONE LINEARE** dei vettori **x**$^1$, … , **x**$^k$ con pesi $c_1, \dots, c_k$ il vettore **y** ∊ **R**$^n$ tale che:

  **y** = $\sum_{j=1}^{k} c_j \cdot \underline{x}^j$

*Esempio: si prendono i vettori* $\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\1\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}$ *e si stabiliscono i pesi 2, -1, 0, 3.*

$\underline{\boldsymbol{y}} = c_1\underline{\boldsymbol{x}}^1 + c_2\underline{\boldsymbol{x}}^2 + c_3\underline{\boldsymbol{x}}^3 + c_4\underline{\boldsymbol{x}}^4 = 2\cdot\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix} + (-1)\cdot\begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix} + 0\cdot\begin{bmatrix}4\\1\\-1\end{bmatrix} + 3\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-4\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-3\\-1\\0\end{bmatrix} +$
$\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\-5\\8\end{bmatrix}$, ***combinazione lineare***.

**Teorema della Dipendenza Lineare.**

I vettori $\underline{\mathbf{x}}^1, \dots, \underline{\mathbf{x}}^k \in \mathbf{R}^n$ sono <u>linearmente indipendenti</u> se e solo se $\sum_{j=1}^{k} c_j \cdot \underline{\boldsymbol{x}^j} = \underline{\boldsymbol{o}} \Rightarrow c_j = 0\ \forall j$.
Sono <u>linearmente dipendenti</u>, invece, se esistono pesi $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbf{R}$ non tutti nulli tali che $\sum_{j=1}^{k} c_j \cdot \underline{\boldsymbol{x}^j} = \underline{\boldsymbol{o}}$.

*<u>Esempio: verificare la dipendenza/indipendenza lineare.</u>*

*Si prendano* $c_1\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix} + c_2\cdot\begin{bmatrix}2\\3\\3\end{bmatrix} + c_3\cdot\begin{bmatrix}2\\2\\8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$.

*Se si verifica questa situazione e almeno uno dei tre pesi è diverso da 0, allora i tre vettori saranno linearmente dipendenti.*
*Quindi, si svolge il prodotto per gli scalari e si mette tutto a sistema; le soluzioni del sistema corrisponderanno ai pesi e permetteranno di verificare la dipendenza/indipendenza dei vettori.*

$$\begin{bmatrix}c_1\cdot 1\\c_1\cdot 2\\c_1\cdot(-1)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}c_2\cdot 2\\c_2\cdot 3\\c_2\cdot 3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}c_3\cdot 2\\c_3\cdot 2\\c_3\cdot 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}c_1 + 2c_2 + 2c_3 = 0\\2c_1 + 3c_2 + 2c_3 = 0\\-c_1 + 3c_2 + 8c_3 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}c_1 = -2c_2 - 2c_3\\-4c_2 - 4c_3 + 3c_2 + 2c_3 \quad = 0\\2c_2 + 2c_3 + 3c_2 + 8c_3 = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}c_1 = 4c_3 - 2c_3 = 2c_3\\c_2 = -2c_3\\-4c_3 + 2c_3 - 6c_3 + 8c_3 = 0 \Rightarrow valido\ \forall\ c_3\end{cases}$$

$$\begin{cases}c_1 = 2c_3\\c_2 = -2c_3\\c_3 \in \boldsymbol{R}\end{cases}$$

*Ci sono infinite soluzioni non nulle: c'è* ***dipendenza lineare***.

Si possono fare alcune osservazioni sulla questione della dipendenza o indipendenza lineare:
- Se in un gruppo di vettori si trova <u>**o**</u>, allora questi vettori sono sicuramente <u>dipendenti</u>: <u>il vettore nullo crea dipendenza lineare</u>.
- Un vettore <u>**x**</u> ∈ $\mathbf{R}^n$ preso da solo è <u>linearmente indipendente</u> se è diverso dal vettore nullo; <u>**o**</u> è <u>linearmente dipendente</u> anche se preso da solo.
- Due vettori ∈ $\mathbf{R}^n$ sono <u>linearmente dipendenti</u> se e solo se sono <u>proporzionali</u>.
- I <u>vettori fondamentali</u> (<u>versori</u>) sono <u>linearmente indipendenti</u>.

## 4.2 Spazi Vettoriali

- X ⊆ $\mathbf{R}^n$ si dice **SOTTOSPAZIO VETTORIALE** di $\mathbf{R}^n$ quando gode delle seguenti proprietà:
  - **Chiusura** rispetto al prodotto esterno: $\forall \underline{\boldsymbol{x}} \in X, \forall \alpha \in \boldsymbol{R}, \alpha\underline{\boldsymbol{x}} \in X$.
  - **Chiusura** rispetto alla somma: $\forall \underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{y}} \in X, \underline{\boldsymbol{x}} + \underline{\boldsymbol{y}} \in X$.

È possibile comprendere meglio la definizione attraverso alcuni esempi:

*Esempio:* $A \coloneqq \left\{ \underline{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{R}^2 | \underline{\boldsymbol{x}} = \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha \in \boldsymbol{R} \right\}$.

*Graficamente, A rappresenta la retta su cui giace il vettore* $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$*: si tratta di una retta passante per l'origine degli assi.*
*Dal punto di vista algebrico-analitico, invece, A è l'insieme di tutte le possibili combinazioni lineari di* $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.
*Si può notare come A goda delle due proprietà di chiusura*:

- *Moltiplicando* $\underline{\boldsymbol{x}} \in A$ *per* $k \in \boldsymbol{R}$*, si ottiene un altro elemento di A: chiusura rispetto al prodotto esterno.*
- *Sommando 2 elementi di A, si ottiene un altro elemento di A: chiusura rispetto alla somma.*

*Quindi, si può dire che A sia un* <u>*sottospazio vettoriale*</u> *di* $\boldsymbol{R}^2$.

*Esempio:* $X \coloneqq \left\{ \underline{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{R}^3 | \underline{\boldsymbol{x}} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha, \beta \in \boldsymbol{R} \right\}$.

*Algebricamente, X è l'insieme di tutte le combinazioni lineari di* $\underline{\boldsymbol{e}}^1$ *ed* $\underline{\boldsymbol{e}}^2$.
*Graficamente, invece, X rappresenta un piano passante per l'origine degli assi.*
*Anche X gode delle proprietà di chiusura, pertanto sarà un sottospazio vettoriale di* $\boldsymbol{R}^3$.

*Esempio:* $X_1 \coloneqq \left\{ \underline{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{R}^3 | \underline{\boldsymbol{x}} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha, \beta, \gamma \in \boldsymbol{R} \right\}$.

*In questo caso, si ottiene un sottospazio vettoriale uguale a X dell'esempio precedente: qui è stato aggiunto un terzo vettore generatore che risulta* <u>*dipendente*</u> *rispetto agli altri due ed è pertanto inutile ai fini della definizione del sottospazio.*

*Esempio:* $X_2 \coloneqq \left\{ \underline{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{R}^3 | \underline{\boldsymbol{x}} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha \in \boldsymbol{R} \right\}$.

*Si tratta di un insieme più piccolo rispetto al precedente, che va a identificare una retta passante per l'origine. Si tratta comunque di un* <u>*sottospazio vettoriale*</u>*, dal momento che gode delle proprietà di chiusura.*

*Esempio:* $X_3 \coloneqq \left\{ \underline{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{R}^3 | \underline{\boldsymbol{x}} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha \in \boldsymbol{R} \right\}$.

*Quest'ultimo esempio è un altro* <u>*sottospazio vettoriale*</u> *che identifica una retta coincidente con l'asse* $x_1$.

**N.B.:** In **R**, sono sottospazi vettoriali <u>**o**</u> e lo stesso insieme **R**.
In $\boldsymbol{R}^2$, sono sottospazi vettoriali <u>**o**</u>, le rette <u>passanti per **o**</u> e $\boldsymbol{R}^2$ stesso.
In $\boldsymbol{R}^3$, sono sottospazi vettoriali <u>**o**</u>, le rette <u>passanti per **o**</u>, i <u>piani passanti per **o**</u> e $\boldsymbol{R}^3$ stesso.
In conclusione, un sottospazio vettoriale **deve passare per** <u>**o**</u>.

Si può dare una definizione di sottospazio vettoriale anche da un punto di vista costruttivo:

- Siano dati i vettori $\underline{x}^1, \underline{x}^2, \dots, \underline{x}^k \in \mathbf{R}^n$. Si dice **SOTTOSPAZIO VETTORIALE di R$^n$ generato dai vettori assegnati** l'insieme costituito da tutte le loro possibili combinazioni lineari.
  Tali vettori, quindi, si diranno **GENERATORI** o **SOSTEGNO** del sottospazio vettoriale.

Detto questo, si può passare a determinare quale sia l'insieme minimale di generatori di un generico sottospazio vettoriale, ovvero la sua **Base**:

- Sia X un sottospazio vettoriale di **R$^n$**. Si dice **BASE** di X un insieme di vettori che gode di due proprietà:
  - I vettori **generano** X (sono **sostegno** di X).
  - I vettori sono **linearmente indipendenti**.

**Teorema (Proprietà della Base)**

Ogni sottospazio vettoriale X di **R$^n$** ammette una base finita (composta da un numero finito di elementi).
Se una Base di X è composta da k vettori, allora tutte le Basi di X sono composte da k vettori.
In tal caso, se si scelgono in X k vettori linearmente indipendenti, essi costituiranno una sua Base.

- Si dice **DIMENSIONE** del sottospazio vettoriale X di **R$^n$** il numero di elementi che costituisce ogni sua Base.

**Teorema (Proprietà della Base) (continua)**

Sia X un sottospazio vettoriale di **R$^n$** e sia $\underline{x}^1, \underline{x}^2, \dots, \underline{x}^k \in X$ una sua Base. Allora, $\forall\ \underline{y} \in X$, esistono dei Pesi $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbf{R}$ tali che:

$$\underline{y} = \sum_{j=1}^{k} c_j \cdot \underline{x}^j$$

Ovvero, $\underline{y}$ può essere ottenuto come combinazione lineare degli elementi della base.
Tale scelta dei pesi $c_j$ è unica.
$c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbf{R}$ prendono il come di **COORDINATE** del vettore $\underline{y}$ rispetto alla base assegnata.

*Esempio:* $X = \left\{ \underline{x} = \alpha \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \right\}$. $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ *e* $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ *sono le Basi di X.*

*Si prende un vettore qualsiasi appartenente a X, ad esempio* $\begin{bmatrix}3\\-2\\0\end{bmatrix}$.

*Questo vettore appartiene a X perché esistono dei pesi che permettono di esprimerlo come combinazione lineare della base assegnata:*

$$\begin{bmatrix}3\\-2\\0\end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + (-2)\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

*Ma prendendo un'altra base, come* $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, *il vettore risulta sempre una combinazione lineare:*

$$\begin{bmatrix}3\\-2\\0\end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + (-2)\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

*Pertanto, si avrà che le coordinate del vettore per la 1° Base assegnata sono (3, -2) mentre, per la 2° Base assegnata, sono (5, -2).*
***Le coordinate di uno stesso vettore cambiano se si cambia la Base.***

Si può notare che, in $\mathbf{R}^n$, esistono n vettori fondamentali ($\underline{\mathbf{e}}^1, \dots, \underline{\mathbf{e}}^n$) che, essendo linearmente indipendenti, possono essere considerati **generatori di $\mathbf{R}^n$**: sono in grado di generare qualsiasi vettore di $\mathbf{R}^n$ e, pertanto, $\underline{\mathbf{e}}^1, \dots, \underline{\mathbf{e}}^n$ è una **Base** di $\mathbf{R}^n$.
Quando si ha una base formata da vettori fondamentali, si parla di **BASE CANONICA**.
Pertanto, si possono fare tre osservazioni:

- Dim($\mathbf{R}^n$) = n
- Se in $\mathbf{R}^n$ si scelgono n vettori linearmente indipendenti, si trova una Base di $\mathbf{R}^n$.
- Se una Base è canonica, le coordinate di un vettore sono uguali alle componenti del vettore stesso.

## 4.3 Le Matrici

### 4.3.1 Concetti Fondamentali

Una **MATRICE** è una tabella di numeri ordinati su righe e colonne.
$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & 8 \end{bmatrix}$ è una matrice con 2 righe e 3 colonne: è quindi una matrice di <u>ordine</u> (2, 3) o anche 2x3. In generale, $A_{(m,n)}$ indica una matrice mxn, con m righe e n colonne.
In una matrice è fondamentale l'ordinamento dei numeri: se si cambiano di posto due elementi di una matrice, si ottiene una matrice diversa.
Una matrice può essere espressa anche come $A = [a_{ij}], i = 1 \dots m; j = 1 \dots n$, dove $a_{ij}$ è l'elemento di A che occupa riga i e colonna j.
Un vettore, quindi, è un caso particolare di matrice con i = 1 oppure j = 1. Un vettore riga, tuttavia, non corrisponderà a un vettore colonna con gli stessi elementi: sono vettori uguali ma matrici diverse.

Una **SOTTOMATRICE** è una matrice che si può trovare all'interno di una matrice.
Partendo, ad esempio, da $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & 8 \end{bmatrix}$, saranno sottomatrici $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$ (si sono prese la 1° e la 3° colonna delle due righe) e $C = [\sqrt{2}]$ (sottomatrice 1x1), ma <u>non</u> $D = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$ (non va bene perché sono stati presi dei numeri alla rinfusa, senza seguire l'ordine di righe e colonne).

Una **MATRICE QUADRATA** è una matrice con lo stesso numero di righe e di colonne (m =n). Questa matrici si dicono di ordine n (e non nxn).
In una matrice quadrata, come ad esempio $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & 8 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, si possono individuare una **diagonale principale** (che va da nord-ovest a sud-est, quindi, nel nostro caso, da 3 a 2) composta dagli elementi $a_{ii}, i = 1 \dots n$ e una **diagonale secondaria** (che va da nord-est a sud-ovest, ovvero, nel nostro caso, da 0 a -1).

Sempre limitatamente alle matrici quadrate, si può dire che una di esse sia:

- **SIMMETRICA**, se $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j = 1 \dots n$
  Ad esempio, $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$: c'è una simmetria degli elementi della matrice rispetto alla diagonale principale.
- **DIAGONALE**, se $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$.

Ad esempio, $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$: gli elementi sono tutti uguali a 0, a parte quelli della diagonale principale (che può comunque contenere 0).

- **TRIANGOLARE SUPERIORE** o **INFERIORE**: $\begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ 0 & \sqrt{\mathbf{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ oppure $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\mathbf{2}} & 0 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$

### 4.3.2 Operazioni con le Matrici

- La **TRASPOSIZIONE** di una Matrice consiste nel trasformare le righe della Matrice in colonne, e viceversa. Ad esempio, se $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$.
  Si nota anche che, se A è simmetrica, $A = A^T$.

- La **SOMMA** di due Matrici A e B può essere svolta solamente se A e B hanno il medesimo ordine (m, n). In tal caso, si avrà che $A + B = C_{(m,n)}$ tale che $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i = 1 \dots m, j = 1 \dots n.$
  Ad esempio, $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 8 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 9 & 5 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$.

- Il **PRODOTTO PER UNO SCALARE** α ϵ **R** di una Matrice A di ordine (m, n) sarà $\alpha \cdot A = B_{(m,n)}$ tale che $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}, i = 1 \dots m, j = 1 \dots n.$
  Ad esempio, $(-2) \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -2 & -14 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}$.

- Il **PRODOTTO TRA DUE MATRICI** A x B si può svolgere solamente se il numero delle colonne di A è uguale al numero delle righe di B (ovvero, se A e B sono <u>conformabili</u> per il prodotto). Quindi, si avrà che $A_{(m,q)} \times B_{(q,n)} = C_{(m,n)}$. Da questo si evince che il prodotto tra due Matrici <u>non gode della proprietà commutativa</u>: A x B sarà diverso da B x A e non sempre si potranno svolgere entrambe le operazioni.
  Il risultato di questa operazione, dunque, sarà una Matrice C tale che $c_{ij} = \underline{\boldsymbol{a}^i} \cdot \underline{\boldsymbol{b}^j}$, ovvero al prodotto scalare tra la i-esima riga di A e la j-esima colonna di B.

  *Esempio:* $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$.
  *Il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B: si può procedere, visto che A e B sono conformabili per il prodotto.*
  *Il risultato, la matrice C, avrà ordine (3, 2) e sarà* $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}$.
  *Per fare il prodotto, si pensi ad* $A = \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{a}^1} \\ \underline{\boldsymbol{a}^2} \\ \underline{\boldsymbol{a}^3} \end{bmatrix}$, *con* $\underline{\boldsymbol{a}^1} = [3 \ -1], \underline{\boldsymbol{a}^2} = [2 \ \ 0], \underline{\boldsymbol{a}^3} = [-2 \ \ 2]$, *e a*
  *B =* $[\underline{\boldsymbol{b}^1} \ \ \underline{\boldsymbol{b}^2}]$, *con* $\underline{\boldsymbol{b}^1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ *e* $\underline{\boldsymbol{b}^2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$.
  *Quindi,* $c_{11} = \underline{\boldsymbol{a}^1} \cdot \underline{\boldsymbol{b}^1} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = -5$

$c_{12} = \underline{\boldsymbol{a^1}} \cdot \underline{\boldsymbol{b^2}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = 6$

*Eccetera…*

*Alla fine, si troverà che* $C = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -2 & 2 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}$.

*In questo caso, non si potrà invece svolgere l'operazione B x A.*

Il **Prodotto tra Matrici**, oltre a non godere della proprietà commutativa, non segue neanche la legge di annullamento del prodotto.

Inoltre, questa operazione si differenzia dal prodotto algebrico tra numeri, per il quale valgono le proprietà di unicità dell'elemento neutro (1) e dell'elemento inverso (che, per x, è uguale a 1/x).

Per quanto riguarda il prodotto tra matrici, infatti, l'elemento neutro è variabile da matrice a matrice: data una matrice A di ordine (m, n), l'elemento neutro sarà $\mathbf{I_n}$, ovvero la **MATRICE IDENTITA'** quadrata, di ordine n, che avrà 1 sulla diagonale principale e 0 altrove.

Presa una matrice qualsiasi $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, il suo elemento neutro sarà $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, dal momento che $A_{(m,n)} \cdot I_n = A$. Se invece il prodotto vede come primo fattore l'elemento neutro, si avrà $I_m \cdot A_{(m,n)} = A$.

L'elemento neutro è variabile anche perché ogni matrice avrà 2 diversi elementi neutri ($I_m$ e $I_n$); soltanto le matrici quadrate avranno un solo elemento neutro (perché m = n).

Per quanto riguarda l'elemento inverso, esso non può esistere per le matrici non quadrate, dal momento che hanno più di un elemento neutro.

Se una matrice A è quadrata di ordine n, però, si dirà **MATRICE INVERSA** di A la matrice $A^{-1}$ tale che $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Per calcolare la matrice inversa, serve il calcolo del Determinante di una matrice quadrata.

### 4.3.3 Determinante di una Matrice Quadrata

- Si dice **DETERMINANTE DI MATRICI QUADRATE** un numero reale che si associa a ciascuna matrice quadrata.

Il calcolo del Determinante ha procedure diverse a seconda dell'ordine della matrice quadrata di cui lo si vuole calcolare.

Se si ha $A_{(1,1)} = [a], detA = a$.

Se si ha $A_{(2,2)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, detA = (a_{11} \cdot a_{22}) - (a_{12} \cdot a_{21})$: il determinante sarà uguale alla differenza tra il prodotto dei componenti sulla diagonale principale e il prodotto dei componenti sulla diagonale secondaria.

Se si ha $A_{(3,3)} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, si dovrà applicare la **Regola di Sarrus**: si riportano sulla destra della matrice la prima e la seconda colonna, per poi sommare i prodotti tra i componenti che stanno sulla diagonale principale e sulle due diagonali ad essa parallele che si sono formate riportando a destra le due colonne. A questo punto, si sommano allo stesso modo i prodotti dei componenti che stanno sulla diagonale secondaria e sulle sue parallele, per poi fare la differenza tra le due somme ottenute.

*Esempio: si vuole trovare det* $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

*Si riportano a destra della matrice le prime due colonne e si ottiene:* $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{matrix}$

*A questo punto, si sommano i componenti della diagonale principale e delle sue parallele:* $[(3 \cdot 0 \cdot (-2)) + (1 \cdot 1 \cdot (-1)) + (2 \cdot 4 \cdot 2)] = [0 - 1 - 16] = -17.$

*Si fa la stessa cosa con la diagonale secondaria e con le sue parallele:* $[(-2 \cdot 0 \cdot (-1)) + (3 \cdot 1 \cdot 2) + (1 \cdot 4 \cdot (-2))] = [0 + 6 - 8] = -2.$

*Il determinante della matrice di partenza sarà quindi uguale a -17 – (-2) = -15.*

Se si ha $A_{(n,n)}, n \geq 4$, si dovrà usare il I Teorema di Laplace, per il quale serve l'introduzione dei concetti di **minore complementare** e di **complemento algebrico**.

- Sia A una matrice quadrata di ordine (n, n), con n ≥ 2. Si dice **MINORE COMPLEMENTARE** dell'elemento $a_{ij}$ di A il determinante della sottomatrice di A ottenuta eliminando da A la riga i e la colonna j.

  *Esempio:* $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. *Si vuole trovare il minore complementare di $a_{12}$ = 0.*

  *Si ricava quindi la sottomatrice priva della riga 1 e della colonna 2:* $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$. *Il minore complementare di $a_{12}$ (indicato con $\boldsymbol{m_{12}}$) sarà* $\det \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = -3.$

  *Allo stesso modo,* $m_{22} = \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = -1$; $m_{32} = \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = -1.$

- Sia A una matrice quadrata di ordine (n, n), con n ≥ 2. Si dice **COMPLEMENTO ALGEBRICO** dell'elemento $a_{ij}$ di A il numero $\boldsymbol{\alpha_{ij}} = (-1)^{i+j} \cdot m_{ij}$, dove $m_{ij}$ è il minore complementare di $a_{ij}$.
  Se i + j è pari, $\alpha_{ij} = m_{ij}$; se i + j è dispari, $\alpha_{ij} = -m_{ij}$.

  *Esempio:* $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

  $\alpha_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-3) = (-1) \cdot (-3) = 3 = -m_{12}$
  $\alpha_{22} = (-1)^{2+2} \cdot (-1) = 1 \cdot (-1) = -1 = m_{22}$
  $\alpha_{32} = (-1)^{3+2} \cdot (-1) = (-1) \cdot (-1) = 1 = -m_{32}$

A questo punto, è possibile enunciare il teorema.

**I Teorema di Laplace.**

Sia A una matrice quadrata di ordine (n, n), con n ≥ 2. Il determinante di A coincide con il prodotto tra una linea (riga o colonna) di A e il vettore che raccoglie i complementi algebrici degli elementi di tale linea.

*Esempio:* $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

*Prendendo la colonna 2, si avrà che* $\det A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 - 1 - 1 = \mathbf{-2.}$

Dopo aver visto i metodi che si possono utilizzare per il calcolo del determinante, è opportuno ricordarne alcune proprietà:

- $\det A = \det A^T$;
- Se A è una matrice diagonale, $\det A = \prod_{i\geq 1}^{n} a_{ii}$, ovvero sarà uguale al prodotto dei componenti che stanno sulla diagonale principale.
- **Teorema di Binet.** Siano A e B due matrici quadrate di ordine n. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.
  Si può applicare questo teorema al caso della matrice inversa: $A \cdot A^{-1} = I \;\; => \det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} = \det I \;\; = 1$.
  Quindi, $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.
- $\det A \neq 0$ (quindi A è <u>non singolare</u>) se e solo se A è <u>invertibile</u>, quindi se e solo se le colonne (o le righe) di A sono <u>linearmente indipendenti</u>.
  $\det A = 0$ (quindi A è <u>singolare</u>) se e solo se A <u>non è invertibile</u>, quindi se e solo se le colonne (o le righe) di A sono <u>linearmente dipendenti.</u>
- Dal punto precedente, deriva che se c'è una linea di A nulla, $\det A = 0$.
  Se due linee di A sono proporzionali, $\det A = 0$.
  Il calcolo del determinante può essere quindi usato per verificare la dipendenza o indipendenza lineare di vettori.

### 4.3.4 Matrici Inverse

Come già accennato, è possibile trovare una matrice inversa $A^{-1}$ soltanto per una matrice A che sia quadrata.

**Teorema.**
Sia A una matrice quadrata di ordine (n, n). A è **INVERTIBILE** (ammette $A^{-1}$) se e solo se $\det A \neq 0$.

**Teorema.**
La **Matrice Inversa**, se esiste, è <u>unica</u> ed è $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot Agg\ A$, dove <u>Agg A</u> è la <u>matrice aggiunta</u> di A.

Agg A (detta anche $A^+$ oppure $(A^*)^T$) si dice **MATRICE AGGIUNTA** di A ed è la matrice che raccoglie i complementi algebrici degli elementi di A e che viene successivamente trasposta.

*<u>Esempio: calcolo di una matrice inversa.</u>*

*Viene data* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

*Per verificare che A sia invertibile, si calcola il determinante. det A = - 5: è diverso da 0, quindi la matrice di può invertire.*

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot Agg\ A$*: bisogna ricavare Agg A, ovvero* $(A^*)^T$.

*A* è la matrice di tutti i complementi algebrici di A. In questo caso, sarà uguale a*

$A^* = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 6 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

*Questa matrice va poi trasposta:* $(A^*)^T = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$.

*A questo punto, si può svolgere il prodotto:* $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot Agg\ A = -\frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 6 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{6}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} = A^{-1}.$$

### 4.3.5 Rango di una Matrice

- Sia A una matrice di ordine (m, n). Si dice **RANGO** di A ( r(A), $r_A$, r ) il massimo numero di righe o di colonne linearmente indipendenti.

Si può quindi dire che $r \leq min\{m, n\}$, ovvero avrà al massimo un valore pari al numero più piccolo tra numero di righe e numero di colonne.
Quando $r = min\{m, n\}$, si parla di rango pieno.

Per il calcolo del Rango si possono utilizzare 2 teoremi:
**Teorema.** Sia A una matrice di ordine (m, n). r(A) = k se e solo se in A si ha una sottomatrice di ordine (k, k) con determinante non nullo e tutte le sottomatrici quadrate di A di ordine (k+1) hanno determinante nullo.

- Si dice **MINORE** di A di ordine k un determinante di una sottomatrice (k, k) di A.

Secondo il teorema precedente, quindi, perché il rango di A sia uguale a k, bisogna che un minore di ordine k sia non nullo e che tutti i minori di ordine (k+1) siano nulli.
Questo teorema è utile per le matrici che siano al massimo di ordine 3. Risulta quindi più comodo l'**algoritmo di Kronecker**.

**Teorema (Algoritmo di Kronecker).**
Sia A una matrice di ordine (m, n). r(A) = k se e solo se A possiede una sottomatrice (k, k) con determinante non nullo e tutte le sottomatrici quadrate di ordine (k+1) ottenute orlando la sottomatrice precedente con una riga e una colonna di A scelte a caso tra quelle escluse ha determinante nullo.

*Esempio: Algoritmo di Kronecker e calcolo del Rango*

$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$

*Prima di procedere, si nota che* $r \leq 3$*, perché la matrice ha solamente 3 righe.*
*Si sceglie un valore di k, ad esempio k = 2, e si cerca di verificare che r(A) = k.*

- *Si verifica che esista una sottomatrice (k, k) (quindi una 2 x 2) il cui determinante sia diverso da 0.*
  $\det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 4 \neq 0$*. La condizione è verificata.*
  *Quindi, sappiamo che* $r(A) \geq 2$*: r(A) sarà uguale a 2 oppure a 3.*
- *A questo punto, si deve orlare questa sottomatrice in tutti i modi possibili, creando quindi delle sottomatrici di ordine (k+1) (quindi delle 3 x 3).*
  *Si dovranno aggiungere la riga 1 e, una alla volta, le colonne 3, 4 e 5, ovvero quelle escluse dalla sottomatrice di partenza.*
  *Si calcola poi il determinante di queste 3 x 3:*

$$\det\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} = 0$$
$$\det\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} = 0$$
$$\det\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} = 0$$

- *Esiste una sottomatrice 2 x 2 con determinante diverso da 0 e tutte le possibili 3 x 3 che si possono ottenere orlando la 2 x 2 hanno determinante uguale a 0: si può concludere che **r(A) = 2**.*

## 4.4 Sistemi Lineari

### 4.4.1 Equazioni e Sistemi Lineari

Si definisce **Equazione Lineare** nelle incognite $x_1, x_2, \dots, x_n$ un'equazione del tipo $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$.
Le a vengono definite Coefficienti, mentre b è il Termine Noto.
In un'equazione lineare, è necessario che tutte le incognite abbiano grado 1.
In termini vettoriali, si può identificare $\underline{\boldsymbol{a}} = [a_1 \dots a_n]$, ovvero un vettore dei coefficienti, e $\underline{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$, ovvero un vettore delle incognite. Si avrà quindi che $\underline{\boldsymbol{a}} \cdot \underline{\boldsymbol{x}} = b$, e ogni vettore delle incognite che soddisfa questa relazione viene definito soluzione dell'equazione.

Si definisce **Sistema di Equazioni Lineari** nelle incognite $x_1, x_2, \dots, x_n$ un sistema del tipo:
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$
Questo sistema avrà quindi m equazioni e n incognite.
$a_{ij}$ sarà un coefficiente del sistema che rappresenta il coefficiente assegnato a $x_n$ nella m-esima equazione.
Si potranno quindi identificare, in questo caso, $A_{(m,n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$, ovvero la matrice dei coefficienti, $\underline{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$, il vettore delle incognite, e $\underline{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$.
Un sistema di equazioni lineari, dunque, sarà sempre tale che $A\underline{\boldsymbol{x}} = \underline{\boldsymbol{b}}$.

### 4.4.2 Possibilità e Determinazione di un Sistema Lineare

Un sistema lineare può essere possibile oppure impossibile e, nel primo caso, potrebbe ammettere una oppure infinite soluzioni (ovvero, potrebbe essere determinato o indeterminato).
Per verificare se un sistema è possibile, si può utilizzare il seguente teorema:

**Teorema di Rouché-Capelli.**
Sia dato il sistema lineare $A\underline{\boldsymbol{x}} = \underline{\boldsymbol{b}}$, con A di ordine (m, n) e $\underline{\boldsymbol{b}} \in \boldsymbol{R}^m$.

Il sistema è **POSSIBILE** se e solo se $r(A) = r(A \vdots \underline{\boldsymbol{b}})$, dove $[A \vdots \underline{\boldsymbol{b}}]$ è la matrice **orlata** o **aumentata**, ottenuta aggiungendo ad A il vettore colonna dei termini noti.

Dimostrazione *(non in programma).*
Il sistema $A\underline{\boldsymbol{x}} = \underline{\boldsymbol{b}}$ è possibile se e solo se esiste un vettore delle incognite **x** tale che $A\underline{\boldsymbol{x}} = \underline{\boldsymbol{b}}$.

Quindi, se e solo se $A\underline{\boldsymbol{x}} = [\underline{\boldsymbol{a}^1} \ \underline{\boldsymbol{a}^2} \ \dots \ \underline{\boldsymbol{a}^n}] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1[\underline{\boldsymbol{a}^1}] + \dots + x_n[\underline{\boldsymbol{a}^n}] = \sum_{j=1}^{n} \underline{\boldsymbol{a}^j} \cdot x_j = \underline{\boldsymbol{b}}$.

Quindi, equivale a dire che questo è vero se e solo se esistono i pesi $x_1, \dots, x_n$ che permettono di esprimere **b** come combinazione lineare delle colonne di A.
Quindi, se e solo se **b** è linearmente dipendente dalle colonne di A.
Quindi, se e solo se $r(A) = r(A \vdots \underline{\boldsymbol{b}})$: il rango di A è il numero delle colonne di A linearmente indipendenti.

**N.B.:** In $(A \vdots \underline{\boldsymbol{b}})$, si aggiunge una colonna ad A. Quindi, $r(A \vdots \underline{\boldsymbol{b}}) \geq r(A)$; in particolare, $r(A \vdots \underline{\boldsymbol{b}})$ = r(A) oppure = r(A) + 1.

**Corollario.** Sia $r(A) = r(A \vdots \underline{\boldsymbol{b}})$. In tal caso, il sistema ammetterà $\infty^{n-r(A)}$ soluzioni. Si considera in questo caso $\infty^0 = 1$.
Il numero n - r(A) viene definito come i **Gradi di Libertà** del sistema e rappresenta il numero di parametri presenti tra le sue soluzioni.

### 4.4.3 Calcolo delle Soluzioni

Per quanto riguarda il calcolo delle soluzioni di un sistema (dopo aver dimostrato che esso sia possibile e aver determinato il numero delle soluzioni stesse), si può riscrivere il sistema in scrittura non matriciale e operare per sostituzione.
In questa fase, sarà anche possibile depennare dal sistema una o più equazioni, se esse risulteranno linearmente dipendenti a un'altra equazione del sistema; per verificare che questa operazione venga fatta correttamente, si verifica il rango: il rango della matrice ottenuta depennando una delle equazioni dovrà essere uguale al rango della matrice $(A \vdots \underline{\boldsymbol{b}})$.

Si può inoltre effettuare il calcolo delle soluzioni di un sistema in forma matriciale. In questo caso, il procedimento sarà diverso a seconda delle caratteristiche della matrice dei coefficienti A:

- A è quadrata e non singolare: A è una nxn e det A ≠ 0.
  In questo caso, la matrice A sarà invertibile (dal momento che il suo determinante è diverso da 0). Quindi, partendo dal sistema lineare $A\underline{\boldsymbol{x}} = \underline{\boldsymbol{b}}$, si avrà:
  $$A\underline{\boldsymbol{x}} = \underline{\boldsymbol{b}} \Rightarrow A^{-1}A\underline{\boldsymbol{x}} = A^{-1}\underline{\boldsymbol{b}}$$
  $$I_n\underline{\boldsymbol{x}} = A^{-1}\underline{\boldsymbol{b}}$$
  $$\underline{\boldsymbol{x}} = A^{-1}\underline{\boldsymbol{b}}$$
  In sostanza, si procede come se fosse un'equazione numerica, in cui $ax = b \Rightarrow x = \frac{b}{a}$.
  Questo procedimento, tuttavia, è scomodo per matrici di ordine elevato, perché trovare la matrice inversa richiede molti calcoli: si può utilizzare, quindi la Regola di Cramer.

  **Teorema di Cramer.** Sia $A\underline{\boldsymbol{x}} = \underline{\boldsymbol{b}}$ con A quadrata. Il sistema è possibile e determinato, $\forall b \in \boldsymbol{R}$, se e solo se $\det A \neq 0$.

Da questo Teorema deriva la **REGOLA DI CRAMER**:
Sia $A\underline{\boldsymbol{x}} = \underline{\boldsymbol{b}}$, con A quadrata e $\det A \neq 0$.
$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, i = 1 \dots n$, dove $A_i$ è la matrice che ha tutte le colonne uguale ad A tranne la i-esima, che è uguale al vettore **b**.

- A è quadrata e singolare: det A = 0.
  Se det A = 0, il rango della matrice A sarà inferiore al numero delle sue colonne; pertanto, il sistema sarà possibile ma indeterminato.
  Per trovare le soluzioni, si potrà trovare una matrice equivalente ad A, eliminando una riga e una colonna e mantenendo lo stesso rango, per poi applicare la regola di Cramer: bisognerà quindi depennare una delle equazioni del sistema che sia combinazione lineare delle altre equazioni.
  Alla fine di questo procedimento, si troveranno le soluzioni del sistema, alcune delle quali saranno dei parametri.

- A non è quadrata.
  In questo caso, si calcola r(A) e poi si procede risolvendo il sistema in forma algebrica oppure applicando la regola di Cramer.

### 4.4.4 Sistemi Lineari Omogenei

Un **Sistema Omogeneo** è un sistema lineare in cui **b** = **o**: $A_{(m,n)}\underline{\boldsymbol{x}} = \underline{\boldsymbol{o}}$.
Provando ad applicare il teorema di Rouché-Capelli, si nota che $r(A) = r(A \vdots \underline{\boldsymbol{o}})$ per ogni matrice A, dal momento che il vettore nullo sarà sempre combinazione lineare di tutte le colonne di A: pertanto, un sistema lineare è sempre possibile (e potrà essere determinato o indeterminato, a seconda dei casi).
Inoltre, **x** = **o** sarà sempre una delle soluzioni del sistema.

*Esempio: Tema d'Esame*
*Verificare per quali valori di k il sistema è determinato o indeterminato.*
$A = \begin{bmatrix} 0 & k & -4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -k \end{bmatrix}$; ***b*** = ***o***.
*Il sistema sarà sempre possibile perché è omogeneo. Sarà determinato quando r(A) = n = 3; se r(A) < 3, sarà indeterminato.*
*Quindi, se det A ≠ 0, sarà determinato; altrimenti, sarà indeterminato.*
*det A = -8 +12 – $k^2$ => Se k ≠ +2 e k ≠ -2, r(A) = 3 e il sistema è determinato.*
*Se k = 2 V k = -2, r(A) < 3. In particolare, r(A) sarà = 2 perchè esiste una sottomatrice 2x2 di A con det ≠ 0.*

*Soluzioni del sistema per k = -2.*
$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$, *che equivale al sistema lineare* $\begin{cases} -2y - 4z = 0 \\ -x + 3y = 0 \\ -2y + 2z = 0 \end{cases}$
*Si depenna quindi la prima equazione, ottenendo una matrice dei coefficienti 2x2, in questo modo:* $\begin{cases} -x + 3y = 0 \\ x - 2y = -2z \end{cases} => \begin{cases} x = 3y \\ 3y - 2y = -2z \end{cases} => \begin{cases} x = -6z \\ y = -2z \end{cases}$.
*Il vettore delle soluzioni, quindi, sarà:* $\begin{bmatrix} -6z \\ -2z \\ z \end{bmatrix}, \forall z \in \boldsymbol{R}$.

# 5. Derivate

## 5.1 Concetti Fondamentali

### 5.1.1 Rette Secanti, Tangenti e Derivata Prima

Data una funzione f(x) che identifica sul piano cartesiano una curva, sarà possibile tracciare una retta detta **secante** che interseca la curva in due punti, detti P e Q.
Per trovare, nella medesima situazione, una retta **tangente** alla curva nel punto P, si partirà dal fascio di rette di centro P e si noterà che ciascuna di esse intersecherà la curva, oltre che in P, in un punto Q che potrà avvicinarsi sempre di più a P.
In particolare, la retta sarà tangente quando le 2 intersezioni che ha con la curva (ovvero P e Q) andranno a coincidere.
La tangente, dunque, è una posizione limite della secante che presuppone che la curva sia continua per essere tracciata.

Analiticamente, preso sul grafico della funzione un punto P di coordinate $(x_0, f(x_0))$, supponendo che $x_0$ sia un punto interno del dominio di f(x), si potrà trovare un numero $(x_0 + h)$ anch'esso appartenente al dominio di f(x): esisterà quindi un punto, detto Q, con coordinate $(x_0 + h, f(x_0 + h))$.
Si può identificare, inoltre, il fascio di rette di centro P: $y - f(x_0) = m(x - x_0)$.
In particolare, la retta del fascio che passa per P e per Q, ovvero la secante, avrà questo coefficiente angolare:

$$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Il coefficiente angolare della retta secante sarà detto **RAPPORTO INCREMENTALE**. Fissato $x_0$, questo valore varierà in funzione di h.

Come già anticipato, per trovare la retta tangente in P occorrerà avvicinare Q a P, fino a far coincidere i due punti. Questo equivale a dire che h deve tendere a 0.
$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$: se questo limite esiste ed è finito, si dice che f(x) è **DERIVABILE** in $x_0$.
Il valore del limite, quindi, si dirà **DERIVATA PRIMA** in $x_0$ di f(x) e si indicherà con **f'($x_0$)**; corrisponderà quindi al valore del coefficiente angolare della retta tangente al punto P.
L'equazione della tangente, infatti, sarà: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

*Esempio:* $f(x) = 2x^2 - 1;\ x_0 = 2; dom\ f = \boldsymbol{R}$.
*Occorre calcolare f($x_0$) e f($x_0$ + h):* $f(x_0) = 7$.
$f(x_0 + h) = 2(2 + h)^2 - 1 = 2h^2 + 8h + 7$.
*Si calcola ora la derivata sfruttando la definizione di limite del rapporto incrementale:*
$\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} 2h + 8 = 8 = f'(2)$.
*L'equazione della tangente, quindi, sarà:* $y - f(2) = f'(2)(x - x_0) = y - 7 = 8(x - 2) =$
$> y = 8x - 9$.

Talvolta, può essere utile porre l'accento sul punto incrementato (ovvero l'ascissa del punto Q) piuttosto che sull'ascissa di P: si può quindi porre $x = x_0 + h$. In questo caso, la variabile sarà x e non più h.
Dire che h tende a 0 significa dire che x tende a $x_0$. Pertanto, la formula per trovare la derivata in $x_0$ sarà:
$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, *purché il limite esista e sia finito.*

### 5.1.2 Derivabilità di una Funzione

Una funzione non è derivabile in un punto se, per quel punto, il limite del rapporto incrementale è infinito oppure non esiste.

**Teorema.** Se f(x) è derivabile in $x_0$, allora f(x) è continua in $x_0$.
**Dimostrazione.**
Ipotesi: f è derivabile in $x_0$. Tesi: f è continua in $x_0$.
$\lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot (x - x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot \lim_{x\to x_0}(x - x_0)$, per i teoremi sull'algebra dei limiti.
Questo equivale a scrivere $f'(x_0) \cdot 0 = 0$.
Quindi, $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$: f(x) è continua.

**N.B.**: La continuità nel punto è una condizione necessaria, ma non sufficiente: esistono funzioni continue ma non derivabili in un punto (ad esempio, $f(x) = |x|\ in\ x_0 = 0$).

Se, per una funzione che risulta non derivabile in un punto, non esiste il limite in un punto ma esistono, in quello stesso punto, il limite destro e/o il limite sinistro, si parlerà di **derivata destra** o **sinistra**:

- $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'_+(x_0)$, **DERIVATA DESTRA** di $x_0$ (se tale limite esiste ed è finito);
- $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'_-(x_0)$, **DERIVATA SINISTRA** di $x_0$ (se tale limite esiste ed è finito).

Ovviamente, queste definizioni si possono porre con h → 0 o con x → $x_0$, nella scrittura alternativa del limite.

In conclusione, f è derivabile in $x_0$ se e solo se $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$, ovvero se la derivata prima, la derivata sinistra e la derivata destra di $x_0$ esistono, sono finite e coincidono.

### 5.1.3 Punti di Non Derivabilità

- Si dice **PUNTO ANGOLOSO** un punto in cui una funzione è continua e in cui $f'_+$ e $f'_-$ non coincidono, ma esistono e sono finite.

  *Esempio:* $f(x) = |x|;\ x_0 = 0.$
  *Il limite* $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ *non esiste. Si prova quindi a calcolare limiti destro e sinistro per trovare derivata destra e derivata sinistra nel punto.*
  $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1 = f'_+(x_0)$*: la derivata destra esiste ed è finita.*
  $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{x} = -1 = f'_-(x_0)$*: le derivata sinistra esiste, è finita ma non coincide con la derivata destra.*
  *Quindi, nella funzione f(x)=|x|, il punto $x_0$ = 0 è un punto angoloso.*

- Si dice **PUNTO DI FLESSO A TANGENTE VERTICALE** un punto in cui una funzione è continua e in cui $f'(x_0) = \pm\infty$.

  *Esempio:* $f(x) = \sqrt[3]{x};\ x_0 = 0$
  *Si tratta di una funzione il cui dominio coincide con **R**: si ha quindi la certezza che sia continua in ogni punto di **R**, compreso 0.*
  *Si calcola quindi la derivata:* $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

*$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{0} = +\infty = f'(x_0)$: la derivata nel punto esiste, ma è infinita.*
*Quindi, nella funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$, il punto $x_0 = 0$ è un punto di flesso a tangente verticale.*

- Si dice **CUSPIDE** un punto in cui una funzione è continua e in cui $f'_+$ e $f'_-$ sono infiniti di segno opposto.

*Esempio: $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$; $x_0 = 0$.*
*Si tratta di una funzione il cui dominio coincide con **R**: si ha quindi la certezza che sia continua in ogni punto di **R**, compreso 0.*
*Si calcola la derivata: $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.*
*$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ non esiste: si calcolano quindi limite destro e limite sinistro.*
*$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty = f'_+(x_0)$: la derivata destra è un infinito di segno positivo.*
*$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{0^-} = -\infty = f'_-(x_0)$: la derivata sinistra è un infinito di segno negativo.*
*Risulta quindi che la derivata destra e la derivata sinistra sono infiniti di segno opposto: nella funzione $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, il punto $x_0 = 0$ è una cuspide.*

Esistono anche punti di non derivabilità non compresi in questa classificazione, ovvero quelli in cui il limite del rapporto incrementale non esiste.

### 5.1.4 Funzione Derivata

Data una funzione f(x) derivabile in un punto $x_0$, si avrà che $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.
Applicando questa definizione e sostituendo a $x_0$ una generica x, sarà possibile trovare la **Funzione Derivata** di f(x): sostituendo a x i valori delle ascisse del grafico della funzione, si potrà ottenere il valore della derivata in ciascun punto che appartiene a quest'ultima ($f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$).

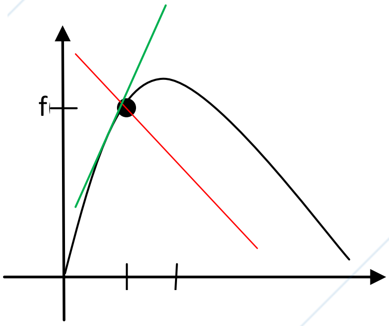
La funzione derivata potrà essere a sua volta una funzione derivabile. In questo caso, sarà possibile ottenere la **DERIVATA SECONDA** della funzione di partenza: $f''(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}$, se il limite esiste finito.
Da qui si potrà analogamente ricavare la **Funzione Derivata Seconda**: $f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$.
Nel caso in cui anche questa risulterà derivabile, si otterrà una **DERIVATA TERZA** $f'''(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f''(x_0+h)-f''(x_0)}{h}$ (se il limite esiste finito), accompagnata da una **Funzione Derivata Terza** $f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f''(x+h)-f''(x)}{h}$.

Il processo terminerà con l'identificazione di una **Derivata n-esima** $f^{(n)}(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0+h)-f^{(n-1)}(x_0)}{h}$, se questo limite esiste finito.

*Esempio: $f(x) = x^2 + 3x$*
$f'(x) = 2x + 3$
*$f''(x) = 2$, ovvero il coefficiente angolare di f'(x): la derivata di una retta è uguale al suo coefficiente angolare.*
*$f'''(x) = 0$, così come tutte le derivate di ordine successivo, in quanto derivate di funzioni costanti.*

$$f^{(n)}(x) = 0.$$

## 5.2 Differenziale e Differenziabilità




Data una generica funzione f(x) come quella in figura, volendo approssimare il valore che la funzione assume nel punto P, si può ricorrere all'uso delle rette.
Si può provare ad utilizzare una retta secante (come quella in rosso): in questo caso, dal momento che questa retta passa per P, avrà equazione $y - f(x_0) = m(x - x_0) + q$.
Esisterà, in questo caso, un errore di approssimazione, che sarà dato da $E(x) = f(x) - m(x - x_0) - f(x_0)$. Questo errore sarà dipendente dalla variabile x; inoltre, si nota che E(x) tenderà ad annullarsi quando $x \to x_0$.

Tra le rette del fascio di centro P, quella che si avvicina di più al valore di f(x) in P è la retta tangente al grafico della curva in tale punto.

Tornando a ragionare sull'errore di approssimazione, esso dovrà tendere a 0 quando x tenderà a $x_0$. Pertanto, si potrà dire che E(x) è un infinitesimo di ordine superiore a $(x - x_0)$, che equivale a scrivere $E(x) = o(x - x_0)$.
Pertanto, $\lim_{x \to x_0} \frac{E(x)}{x - x_0} = 0$.
Chiedere che l'errore sia un infinitesimo di ordine superiore a $x - x_0$ equivale a chiedere che la funzione sia **differenziabile** nel punto di ascissa $x_0$.

- Una funzione si dice **DIFFERENZIABILE** in $x_0$ quando esiste un numero reale m ϵ **R** tale che $f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + o(x - x_0) = f(x_0) + m(x - x_0) + E(x)$.

Si può notare che una funzione è differenziabile in $x_0$ se e solo se è derivabile in $x_0$; inoltre, il numero reale m precedentemente citato sarà uguale a $f'(x_0)$.
Si avrà quindi: $f(x) - f(x_0) - o(x - x_0) = m(x - x_0) \Rightarrow m = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \frac{o(x-x_0)}{x-x_0} \Rightarrow$
$\lim_{x \to x_0} m = m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \lim_{x \to x_0} \frac{o(x-x_0)}{x-x_0} \Rightarrow \quad m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$: si arriva, dunque, alla definizione di derivata prima.
Quindi, se f(x) è derivabile è anche differenziabile, e viceversa.

L'approssimazione del valore di una funzione attraverso una retta è utile per capire dove una funzione è crescente o decrescente e aiuta anche a trovare eventuali punti di massimo o minimo.
Tuttavia, una stessa forma di approssimazione tramite retta può individuare, a seconda della funzione su cui la si usa, diverse situazioni: si pensi alla retta di equazione y = 0, che può individuare un punto di massimo nella funzione $f(x) = -x^2$, un punto di minimo nella funzione $f(x) = x^2$ o un punto di flesso in $f(x) = x^3$.
Per ottenere risultati più precisi, sarà necessario approssimare utilizzando un polinomio invece di una retta.

Tornando al calcolo precedente, si può definire $m(x - x_0)$ **differenziale** della funzione in $x_0$ (con $m = f'(x_0)$).

- Si dice $\boldsymbol{df(x_0)} = m(x - x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ **DIFFERENZIALE** di f nel punto $x_0$.

Quindi, $f(x) = f(x_0) + df(x_0) + E(x)$; questo equivale a dire che $df(x_0) = f(x) - f(x_0) - E(x) = \Delta f(x_0) - E(x)$.

Il differenziale è dunque esprimibile come l'incremento della funzione muovendosi da $x_0$ a x, meno l'errore di approssimazione.

## 5.3 Calcolo delle Derivate

### 5.3.1 Derivate di Funzioni Elementari

Partendo dal presupposto secondo cui le funzioni elementari sono sempre continue e derivabili nel loro dominio (a parte le funzioni potenza con esponente compreso tra 0 e 1, ovvero le radici di x, che spesso contengono dei punti di non derivabilità), è possibile individuare una tabella con le derivate delle funzioni più comuni.

| $\boldsymbol{f(x)}$ | $\boldsymbol{f'(x)}$ |
|---|---|
| $k$ | $0$ |
| $x^\alpha$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $\ln x \ (\ln\lvert x\rvert)$ | $\frac{1}{x}$ |
| $sen\ x$ | $\cos x$ |
| $\cos x$ | $-sen\ x$ |
| $tg\ x$ | $\frac{1}{cos^2 x}$ o $1+tg^2x$ |

Per quanto riguarda ln x, bisogna ricordarsi di specificare che la sua derivata ha un dominio diverso rispetto alla funzione di partenza; è opportuno quindi specificare tramite la scrittura con valore assoluto.

Nella tabella mancano due casi, che possono essere ricavati dalle regole di derivazione delle funzioni elementari:

- $D[\log_a x], a > 0, a \neq 1 \ => \ D[\log_a x] = D\left[\frac{\ln x}{\ln a}\right] = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}\ \mathbf{ln}\ \boldsymbol{a}}$.
- $D[a^x] = D\left[e^{\ln a^x}\right] = D\left[e^{x\ln a}\right] = e^{x\ln a}\cdot\ln a = e^{\ln a^x}\cdot\ln a = \boldsymbol{a^x}\cdot\mathbf{ln}\ \boldsymbol{a}$.

### 5.3.2 Algebra delle Derivate

- La derivata della **somma/differenza** di funzioni derivabili è uguale alla somma/differenza delle derivate delle funzioni:
  $D\big(f(x) \pm g(x)\big) = f'(x) \pm g'(x)$.

- La derivata del **prodotto** di due funzioni derivabili è: $D\big(f(x)\cdot g(x)\big) = f'(x)\cdot g(x) + g'(x)\cdot f(x)$.
  Inoltre, la derivata del prodotto tra una funzione e un coefficiente è: $D[k\cdot f(x)] = k\cdot f'(x)$.

- La derivata del **quoziente** tra due funzioni derivabili è: $D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)\cdot g(x) - g'(x)\cdot f(x)}{(g(x))^2}$, con $g'(x) \neq 0$.

- La derivata di una **funzione composta** necessita di un teorema.
  **Teorema.** Sia f: A⊆ $\mathbb{R}$→**R** e sia g: B⊆ $\mathbb{R}$→**R**, in modo tale che Im g ⊆ dom f. Sia inoltre g derivabile in $x_0$ ϵ int B e sia f derivabile in $y_0 = g(x_0)$.
  Allora, la funzione composta f(g) sarà derivabile in $x_0$ e la derivata sarà: $D[f(g)]_{x=x_0} = f'\big(g(x_0)\big)\cdot g(x_0)$.

Analogamente, sarà possibile trovare la funzione derivata.

- La derivata della **funzione inversa** necessita di un teorema.
  **Teorema.** Sia f: (a, b) ⊆ **R** → **R**, invertibile su (a, b) e derivabile in $x_0$ ϵ (a, b), con $f'(x_0) \neq 0$.
  Allora, la funzione inversa $f^{-1}(y)$ sarà derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e la sua derivata sarà:
  $D[f^{-1}(y)]_{y=y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$.
  Analogamente, sarà possibile trovare la funzione derivata.

## 5.4 Derivabilità, Ottimalità e Monotonia

### 5.4.1 Punti Stazionari

Operando nell'ambito delle funzioni derivabili su tutto il loro dominio, si possono usare le derivate per trovare punti di massimo o di minimo locali di queste funzioni.
In questi punti, infatti, la retta tangente alla funzione sarà orizzontale: quindi, $m = f'(x) = 0$ (non considerando i casi dei punti di non derivabilità).
In particolare, questo concetto viene espresso nel **Teorema di Fermat**:

**Teorema di Fermat.** Sia f: A⊆ **R**→**R** e sia C ⊆ A. Se f ha un punto di massimo o di minimo relativo su C nel punto $x_0$ ϵ int C e se f è derivabile in $x_0$, allora $f'(x_0) = 0$.
**Dimostrazione:**
Sia $x_0$ un punto di massimo relativo per f(x) sull'insieme C. Per definizione, esisterà quindi un intorno $I(x_0)$ tale che $f(x) \leq f(x_0), \forall x \in I(x_0) \cap C$.
Se il raggio dell'intorno sarà sufficientemente piccolo, si avrà che $I(x_0)$ ⊆ C, per la definizione di punto interno.
Quindi, $\Delta y = f(x) - f(x_0) \leq 0, \forall x \in I(x_0)$.
Di conseguenza, il rapporto $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ sarà positivo quando il denominatore sarà negativo e viceversa.
Calcolando i limite destro e sinistro per x tendente a $x_0$ di questo rapporto, troviamo i valori della derivata destra e della derivata sinistra:

- $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ esiste finito per ipotesi ed è $f'_+(x_0) \geq 0$.
- $\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ esiste finito per ipotesi ed è $f'_-(x_0) \leq 0$.

Per il teorema del confronto e per l'ipotesi di derivabilità nel punto $x_0$, si avrà quindi che $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0) = 0$.

I punti in cui $f'(x) = 0$ si dicono **PUNTI STAZIONARI**.
Va ricordato che la stazionarietà è una condizione necessaria ma non sufficiente per l'ottimalità locale: non tutti i punti stazionari sono anche punti di massimo/minimo relativo.

Tornando al Teorema di Fermat, le ipotesi (derivabilità in $x_0$ e $x_0$ interno a C) non sono superflue:
- Se f non fosse derivabile in $x_0$, ci potrebbe essere un punto di massimo o di minimo assoluto in un punto di non derivabilità (esempio: $f(x) = |x|$) e il teorema non sarebbe soddisfatto.
- Se $x_0$ non fosse interno all'insieme C, la derivata non si annullerebbe nei punti di massimo o di minimo.

Inoltre, si possono identificare due **condizioni sufficienti di ottimalità**:

- Se f è continua in $x_0 \in$ int C e f è crescente in (a, $x_0$) e decrescente in ($x_0$, b), allora $x_0$ sarà punto di massimo relativo per f su C.
- Se f è continua in $x_0 \in$ int C e f è decrescente in (a, $x_0$) e crescente in ($x_0$, b), allora $x_0$ sarà punto di minimo relativo per f su C.

Si può quindi concludere non c'è alcuna relazione tra monotonia e punti di massimo/minimo relativi: la monotonia è una condizione soltanto sufficiente per l'ottimalità, ma non è necessaria.

### 5.4.2 Derivate e Monotonia

La derivata può essere utilizzata per verificare la monotonia di una funzione:

- Sia f derivabile su (a, b). Se f è crescente su (a, b), allora $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$.
- Sia f derivabile su (a, b). Se f è decrescente su (a, b), allora $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a, b)$.
- Sia f derivabile su (a, b). Se f è costante su (a, b), allora $f'(x) = 0, \forall x \in (a, b)$.

**N.B.:** Questo vale per le funzioni crescenti e decrescenti, ma non vale per le funzioni strettamente crescenti o decrescenti: una funzione strettamente crescente su tutto il suo dominio (come $f(x) = x^3$) può avere anche un punto in cui la derivata è uguale a 0 (e sarà un punto di flesso a tangente orizzontale).

## 5.5 Teoremi sulle Derivate

### 5.5.1 Teorema di Rolle

Nel paragrafo precedente si è visto che vale l'implicazione: f crescente su (a,b) => $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$.
Per verificare se questa implicazione è invertibile, sono necessari il **Teorema di Rolle** e il **Teorema di Lagrange**.

**Teorema di Rolle.** Se f è una funzione continua su [a, b], derivabile su (a, b) e tale che f(a) = f(b), allora esiste un punto c $\in$ (a, b) tale che $f'(c) = 0$.

**Dimostrazione.**

f è continua per ipotesi: vale quindi il Teorema di Weierstrass e, pertanto, esisteranno in (a, b) almeno un punto di massimo e un punto di minimo assoluti, detti $x_M$ e $x_m$, tali che $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M), \forall x \in [a, b], con\ x_m, x_M \ \in [a, b]$.
A questo punto si possono verificare due casi:

- Se $x_m = a$ e $x_M = b$ (o viceversa), si ha per la terza ipotesi che $f(x_m) = f(x_M)$.
  In questa situazione, si avrebbe che f(x) è costante su tutto [a, b] e quindi $f'(x) = 0\ \forall x \in (a, b)$.
- Se i punti di massimo e minimo non stanno entrambi sugli estremi di [a, b], almeno uno dei due starà in (a, b): ad esempio, si ponga che $x_M \in (a, b)$.
  Per la seconda ipotesi, si può applicare il Teorema di Fermat: quindi, $f'(x_M) = 0$.
  Da qui si ottiene dunque la tesi, con $c = x_M$.

Anche in questo caso, si può dimostrare che le tre ipotesi del Teorema non sono superflue:

- Se f non fosse continua in a e in b, si avrebbe un punto di discontinuità che impedirebbe la presenza di un punto stazionario.
- Se f non fosse derivabile su (a, b), si avrebbero punti di non derivabilità che non possono essere punti stazionari, per loro definizione.
- Se $f(a) \neq f(b)$, potrebbero non esserci punti stazionari.

### 5.5.2 Teorema di Lagrange

**Teorema di Lagrange.** Sia f una funzione continua su [a, b] e derivabile su (a, b).
Allora, esiste un punto c ϵ (a, b) tale che $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

**Dimostrazione.**

Sia $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a)$: il rapporto $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ sarà quindi il coefficiente angolare della retta $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a)$.

Si può notare come, in questa situazione, si verifichino le tre ipotesi del Teorema di Rolle:

- g(x) sarà continua su [a, b] perché somma di due funzioni continue su tale intervallo;
- g(x) sarà derivabile su (a, b) perché somma di due funzioni derivabili su tale intervallo;
- $g(a) = f(a) + 0 = f(a)$
  $g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (b-a) = f(b) - f(b) + f(a) = f(a)$.
  Quindi, $g(a) = g(b)$.

Sarà quindi possibile applicare il Teorema di Rolle sulla funzione g(x) in [a, b].
Esisterà quindi c ϵ (a, b) tale che $g'(c) = 0$.
Ma $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, per le regole dell'algebra delle derivate.
Quindi, esisterà c ϵ (a, b) tale che $g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$.
Quindi, $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, ovvero la tesi del Teorema di Lagrange.

Ragionando graficamente, si nota che $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ è il coefficiente angolare della retta che passa per i punti di ascissa a e b, ovvero per gli estremi dell'intervallo.
Ciò che afferma il Teorema di Lagrange è che, in tale intervallo, esisterà almeno un punto in cui la tangente alla funzione sarà parallela a tale retta.

Tornando alla questione dell'implicazione $f'(x) \geq 0 \forall x \in (a, b)$ => f(x) crescente su (a, b), il teorema di Lagrange permette di verificare che tale implicazione (inversa di quella esposta al 5.5.1) è vera.
Infatti, prendendo due punti $x_1$ e $x_2$ interni all'intervallo e tali che $a < x_1 < x_2 < b$, e applicando poi Lagrange sull'intervallo [$x_1$, $x_2$], si otterrà che esiste c ϵ ($x_1$, $x_2$) tale che $f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geq 0$.
Quindi, $f(x_2) \geq f(x_1)$ per qualsiasi valore delle due variabili preso all'interno dell'intervallo: pertanto, la funzione sarà crescente su [a, b].
Si ottengono dunque le seguenti implicazioni:

- $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$ ⇔ f crescente su (a, b)
- $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a, b)$ ⇔ f decrescente su (a, b)
- $f'(x) = 0, \forall x \in (a, b)$ ⇔ f costante su (a, b)

Per quanto riguarda, invece, le funzioni strettamente crescenti, vale $f'(x) > 0, \forall x \in (a, b)$ => f strettamente crescente su (a, b). Tuttavia, non vale la sua inversa, come già detto al 5.4.2.

Corollario al Teorema di Lagrange. Sia f derivabile su (a, b) e sia g derivabile su (a, b).
Se $f'(x) = g'(x), \forall x \in (a, b)$, allora esiste un numero k ϵ **R** tale che $g(x) = f(x) + k$.

**Dimostrazione.**

Sia h(x) = g(x) – f(x).
h sarà derivabile su (a, b), in quanto differenza (somma algebrica) di funzioni derivabili su tale intervallo.
Si avrà inoltre che $h'(x) = g'(x) - f'(x) = 0, \forall x \in (a, b)$ per ipotesi (g'(x) = f'(x)).
Ma $h'(x) = 0 \ \forall x \in (a, b)$ se e solo se h(x) è costante su tutto (a, b): $h(x) = k \in \boldsymbol{R}, \forall x \in (a, b)$, per il precedente

corollario al Teorema di Lagrange.
Quindi, $g(x) - f(x) = k => g(x) = f(x) + k, \forall x \in (a, b)$.

### 5.5.3 Teorema di de l'Hospital

**Teorema di De l'Hopital.** Siano f e g due funzioni derivabili su (a, b), con $a, b \in \overline{\boldsymbol{R}}$, e sia $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$.
Sia inoltre $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\boldsymbol{R}}$.
Allora, avviene che:

- Se $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$, allora $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.
- Se $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = \pm\infty$, allora $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

**N.B.:** Il Teorema vale sia per $a^+$ che per $b^-$.

Questo Teorema, dunque, serve per risolvere le forme di indecisione $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$, ma risulta inutile per altre F.I.
In questi particolari casi, dunque, il limite del rapporto tra le derivate delle funzioni avrà il medesimo risultato del limite del rapporto tra le funzioni stesse.

Tramite il Teorema di de l'Hopital è possibile individuare alcune situazioni fisse:

- Qualunque funzione logaritmica, per $x \to +\infty$, è <u>infinito di ordine inferiore</u> a qualunque potenza di x con esponente positivo.
  *Esempio: per $\alpha > 0, a > 0, a \neq 1$, si ha che*
  $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\ln x}{\ln a}}{x^\alpha} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x \ln a}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x \ln a \cdot \alpha x^{\alpha-1}} =$$
  $$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln a \cdot \alpha x^\alpha} = \frac{1}{\pm\infty} = 0.$$

- La funzione esponenziale $e^x$, per $x \to +\infty$, è <u>infinito di ordine superiore</u> a qualunque potenza di x con esponente positivo.
  *In generale,* $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty, \alpha > 0$.

- Una funzione esponenziale con base > 1, per $x \to +\infty$, è <u>infinito di ordine superiore</u> a qualunque potenza di x con esponente positivo.
  *In generale,* $\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty, a > 1, \alpha > 0$.

Come già detto, il Teorema di De l'Hopital è utile soltanto in presenza di alcune forme di indecisione.
Nel caso in cui si dovessero trovare altre forme, come $[0 \cdot \infty]$, prima di applicare il Teorema sarà necessario riportare il limite a una delle F.I. appropriate.

*Esempio:* $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = [0 \cdot \infty]$.
*Si cerca di riportare il limite a una forma* $\frac{\infty}{\infty}$:$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$
*A questo punto, si applica il Teorema:* $\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} -\frac{x^2}{x} = 0$.

In presenza di forme indeterminate adeguate all'applicazione del teorema, in alcuni casi sarà opportuno non applicarlo, per evitare di complicare il limite oppure di applicarlo inutilmente, ottenendo sempre delle forme indeterminate.

In presenza di forme esponenziale-potenza, ovvero funzioni con l'incognita sia alla base che all'esponente, sarà opportuno ricondurre la funzione a una forma esponenziale: in questo modo l'esponente sarà una forma indeterminata $[0 \cdot \infty]$ che si potrà sciogliere utilizzando il procedimento indicato in precedenza.

*Esempio:* $\lim_{x\to 0^+}(1+\ln^2 x)^{\,x} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln(1+\ln^2 x)} = e^{[0\cdot\infty]}$.

*Si lavora quindi sull'esponente:* $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(1+\ln^2 x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+\ln^2 x)}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

*Si applica De l'Hospital:* $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+\ln^2 x}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-2x\ln x}{1+\ln^2 x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2\ln x}{\ln^2 x+o(\ln^2 x)}\cdot(-x) =$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2}{\ln x}\cdot(-x) = 0.$

*Quindi,* $\lim\limits_{x\to 0^+} e^0 = 1.$

## 5.6 Formula di Taylor

### 5.6.1 Polinomio di Taylor

Come già visto, la definizione di differenziabilità di una funzione stabiliva che $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0), x\to x_0$.

Con $E(x) = o(x-x_0) \to 0$, si ha quindi $y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$, ovvero la retta tangente alla funzione in $x_0$.

Si tratta però di un'approssimazione spesso insufficiente: in alcuni casi, per ottenere risultati più precisi, si dovrà approssimare con un polinomio piuttosto che con una retta. Infatti, molte volte una stessa retta può individuare casi diversi (punti di massimo, di minimo o di flesso).

A tale scopo, si utilizza il **POLINOMIO DI TAYLOR** di grado n:

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

In questa formula si utilizza il **fattoriale**: $n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 1$.

Il Polinomio di Taylor varia a seconda del suo grado (n): $T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$, equivalente alla retta tangente in $x_0$.

$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$ equivale invece a una parabola che, nel punto $x_0$, sarà uguale a $f(x_0)$: infatti, $T_2(x_0) = f(x_0)$.

La parabola $T_2(x)$, quindi, passerà per il punto $\big(x_0, f(x_0)\big)$.

Se si calcola la derivata del polinomio di Taylor di secondo grado, si ottiene $T'_2(x) = f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)$.

Ma, in $x_0$, si avrà $T'_2(x_0) = f'(x_0)$: anche la derivata del polinomio in questo punto è uguale alla derivata della funzione.

Pertanto, $T_2(x)$ è la parabola tangente alla funzione in $x_0$.

Proseguendo nei calcoli, si potrà notare che anche la derivata seconda del polinomio coincide con la derivata seconda della funzione in tale punto.

In generale, dunque, si potrà dire che, se f è derivabile n volte in $x_0$:

- $T_n(x_0) = f(x_0)$
- $T'_n(x_0) = f'(x_0)$
- $T''_n(x_0) = f''(x_0)$
- …
- $T^{(n)}{}_n(x_0) = f^{(n)}(x_0)$

Si può esprimere il Polinomio di Taylor anche in funzione della variabile $h = x - x_0$:
$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n$.

Inoltre, quando $x_0 = 0$, il Polinomio si dice **Polinomio di Mc Laurin**: $T_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

### 5.6.2 Formula di Taylor

**Teorema di Taylor.** Se f: A⊆ R→R è derivabile n volte in $x_0$ ϵ int A, allora $f(x) = T_n(x) + o((x - x_0)^n), x \to x_0$.
Quindi, si può dire che $f(x) = (x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), x \to x_0$.
Più n sarà alto, maggiore sarà il grado di approssimazione: il grado di infinitesimo dell'errore, $o((x - x_0)^n), x \to x_0$, infatti, aumenta, rendendolo più trascurabile.

La formula $f(x) = T_n(x) + o((x - x_0)^n), x \to x_0$ espressa nel Teorema è detta **Formula di Taylor** e, per n = 1, coincide con la definizione di **differenziabilità** di una funzione.

Le proprietà locali di una funzione nel punto $x_0$ possono essere espresse anche dal polinomio di Taylor corrispondente alla funzione stessa: la formula, quindi, potrà essere utilizzata anche per la ricerca di punti di massimo o minimo locale della funzione.
I polinomi, quindi, sono le uniche funzioni veramente importanti nell'ambito del calcolo differenziale.

Nel caso particolare in cui $x_0 = 0$, si ottiene la cosiddetta **Formula di McLaurin**, che risulta utile nel calcolo di alcuni limiti notevoli; utilizzando le approssimazioni ed esprimendo le funzioni attraverso formule di McLaurin, infatti, è possibile dimostrare analiticamente i limiti:

- $\mathbf{\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$
  $e^x = f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$.
  Se n = 1, $e^x = 1 + x + o(x) \Rightarrow e^x - 1 = x + o(x) \Rightarrow \frac{e^x - 1}{x} = 1 + o(1)$.

- $\mathbf{\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2x}{x^2} = 2}$
  Utilizzando la formula di McLaurin, si può dire che $e^{2x} = 1 + 2x + \frac{4x^2}{2} + o(x^2)$.
  Sostituendo all'interno del limite, $\lim_{x\to 0} \frac{1 + 2x + 2x^2 + o(x^2) - 1 - 2x}{x\text{^}2} = 2$.
  N.B.: Qui è stato necessario utilizzare n = 2; se si usasse n = 1, il grado di approssimazione sarebbe insufficiente, perché si otterrebbe $\lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x^2}$, non quantificabile.

Si possono costruire formule di McLaurin per qualsiasi funzione elementare, a parte per le funzioni polinomiali, dove la formula risulterebbe identica alla funzione stessa.

### 5.6.3 Formula di Taylor e Punti Stazionari

Supponendo di avere una funzione derivabile n volte in $x_0$ (quindi tale che $f(x) = (x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$ ) e supponendo che $f'(x_0) = 0$, ovvero che $x_0$ sia un **punto stazionario**, si avrebbe una situazione in cui $f(x) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$.
Si può capire la natura di questo punto stazionario (ovvero se si tratta di un punto di massimo o di minimo) studiando il segno di $f''(x_0)$: nel caso in cui sia positivo, si avrebbe $f(x) - f(x_0) > 0$, quindi un punto di minimo locale in $x_0$; viceversa, se la derivata seconda in $x_0$ dovesse essere negativa, si avrebbe $f(x) - f(x_0) < 0$, quindi un punto di massimo locale sempre in $x_0$.

Si aprirebbe, inoltre, un caso di approssimazione non sufficiente se anche $f''(x_0)$ dovesse essere uguale a 0: sarebbe necessario, in questo caso, aumentare il grado di approssimazione a n = 3 e andare a studiare $f'''(x_0)$.
Pertanto, si potrà dire che, se $f'''(x_0) \neq 0$, il polinomio cambierà segno da sinistra a destra del punto $x_0$, che quindi sarà un punto di flesso a tangente orizzontale.
Invece, se $f'''(x_0) = 0$, sarà necessario andare a studiare il segno di $f^{IV}(x_0)$ e varranno le stesse regole definite per $f''(x_0)$.

Quindi, in generale:

- Sia f: A⊆ $\mathbb{R}$→**R**, derivabile n volte in $x_0$ ϵ int A, con $n \geq 2$.
  Siano inoltre $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ e sia $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.
  Allora:
  - Se n è dispari, $x_0$ è punto di flesso a tangente orizzontale.
  - Se n è pari:
    - Se $f^{(n)}(x_0) < 0$, $x_0$ è punto di massimo locale.
    - Se $f^{(n)}(x_0) > 0$, $x_0$ è punto di minimo locale.

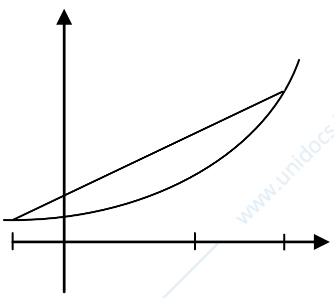
## 5.7 Convessità

### 5.7.1 Funzioni Convesse

- Un insieme A⊆ **R**$^n$ si dice **INSIEME CONVESSO** quando, $\forall \underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{y}} \in A, \forall t \in [0,1]$, si ha che $t\underline{\boldsymbol{x}} + (1-t)\underline{\boldsymbol{y}} \in A$.

Al variare di t tra 0 e 1, si considerano tutti gli elementi che vanno a formare il segmento che unisce **x** e **y**.
Un insieme, quindi, si dice convesso se, unendo due punti qualsiasi con un semento, tutto il segmento è compreso nell'insieme.
In particolare, in **R**, un insieme è convesso se e solo se è un intervallo.

- Una funzione f: A⊆ $\mathbb{R}$→**R**, dove A è un insieme convesso (ovvero un intervallo), si dice **CONVESSA** quando $f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (t-1)f(x_2), \forall t \in [0,1], \forall x_1, x_2 \in A$.



Presa un qualsiasi funzione f(x) e scelti arbitrariamente $x_1$ e $x_2$ all'interno di dom f (in questo caso dom f = **R**, quindi un insieme convesso), si trovano sul grafico della funzione i punti $A = (x_1, f(x_1))$ e $B = (x_2, f(x_2))$.
La definizione prevede la presenza di una combinazione lineare convessa tra $x_1$ e $x_2$, ovvero il segmento che unisce tali punti sull'asse x. In tale intervallo, sul grafico della funzione, si identificherà la porzione di curva compresa tra A e B.

È possibile prendere arbitrariamente un valore $x_t$ compreso tra $x_1$ e $x_2$, tale che $x_t = tx_1 + (1-t)x_2$, con $0 \le t \le 1$.
La retta passante per A e B avrà $m = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ e avrà equazione $y = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \cdot (x - x_1) + f(x_1)$, dal momento che fa parte del fascio di rette con centro in A.
A questo punto, si può cercare il valore y della retta in $x_t = tx_1 + (1-t)x_2$: $y = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \cdot (tx_1 + (1-t)x_2 - x_1) + f(x_1)$, ponendo quindi $x = x_t$.
Svolgendo, si ottiene $y = \left(f(x_2) - f(x_1)\right) \cdot (1-t) + f(x_1)$: l'ordinata della retta in $x_t$, ovvero in un punto qualsiasi preso tra $x_1$ e $x_2$, sarà $y = (1-t) \cdot \left(f(x_2) - f(x_1)\right) + f(x_1) = \boldsymbol{tf(x_1) + (1-t)f(x_2)}$.
Si tratta del secondo membro della disuguaglianza della definizione, che corrisponde quindi all'ordinata della retta che congiunge $f(x_1)$ e $f(x_2)$ in qualsiasi punto di $[x_1, x_2]$.
Quindi, in conclusione, una funzione si dice convessa in un intervallo quando il suo grafico sta sempre sotto al segmento che congiunge gli estremi della funzione in tale intervallo.

Una formulazione equivalente riguarda l'**epigrafico** della funzione: una funzione, infatti, è convessa quando il suo epigrafico è $epi\ f = \{(x,y): y \ge f(x), x \in A\}$.
L'epigrafico, dunque, deve essere un insieme convesso: f convessa ⇔ epi f ⊆ $\mathbf{R}^2$ è insieme convesso.

Dalle definizioni precedenti, si nota come una retta non verticale sia una funzione convessa in tutto il suo dominio; questo vale anche per f(x) = |x|, mentre non è una definizione corretta per $f(x) = x^3$.

### 5.7.2 Funzioni Concave

- Una funzione f: A⊆**R**→**R**, dove A è un insieme convesso, si dice **CONCAVA** se $f(tx_1 + (1-t)x_2) \ge tf(x_1) + (t-1)f(x_2), \forall t \in [0,1], \forall x_1, x_2 \ \in A$.

Si tratta di una semplice inversione della definizione di convessità.

Esistono funzioni che non sono né convesse né concave in tutto il loro dominio, come la cubica, mentre, al contrario, esistono anche funzioni che sono sia convesse che concave: si tratta delle rette non verticali.
In generale, una funzione è concava se e solo se il suo opposto è convesso, e viceversa.

### 5.7.3 Funzioni Strettamente Convesse o Concave

- f si dice **STRETTAMENTE CONVESSA** su un insieme A⊆**R** convesso quando $(tx_1 + (1-t)x_2) < tf(x_1) + (t-1)f(x_2), \forall t \in (0,1), \forall x_1, x_2 \ \in A, x_1 \ne x_2$.
  f si dice **STRETTAMENTE CONCAVA** su un insieme A⊆**R** convesso quando $(tx_1 + (1-t)x_2) > tf(x_1) + (t-1)f(x_2), \forall t \in (0,1), \forall x_1, x_2 \ \in A, x_1 \ne x_2$.

La condizione di concavità o convessità stretta implica che la funzione non possa coincidere con il segmento che ne congiunge gli estremi. Le rette non verticali, dunque, non sono né strettamente convesse né strettamente concave.

### 5.7.4 Derivata e Convessità di una Funzione

Sia f: A⊆**R**→**R** una funzione convessa derivabile su A aperto e convesso.
Preso arbitrariamente un punto $x_0$ su A, il grafico della funzione sarà maggiore rispetto alla retta tangente nel punto: si avrà quindi che $f(x) \ge f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \forall x, x_0 \in A$.

Nel caso particolare di un punto stazionario, si avrà che $f'(x_0) = 0$: in questo punto, quindi, $f(x) \geq f(x_0), \forall x \in A, x_0\ punto\ stazionario$.
Al contrario, se si fosse trattato di una funzione concava, $f(x) \leq f(x_0), \forall x \in A, x_0\ punto\ stazionario$.

In una funzione convessa, quindi, il coefficiente della tangente cresce al crescere di x: quindi, la derivata prima di una funzione convessa è <u>crescente su A</u>.
Vale quindi l'implicazione: f convessa su A ⇔ f' crescente su A; f concava su A ⇔ f' decrescente su A.
Inoltre, se f è derivabile due volte su A aperto e convesso, vale l'implicazione: f convessa su A ⇔ $f''(x) \geq 0, \forall x \in A$; f concava su A ⇔ $f''(x) \leq 0, \forall x \in A$.

I punti in cui cambia la convessità, quindi, sono **punti di flesso**.
$x_0$ è un punto di flesso quando:

- f è strettamente convessa/concava $\forall x < x_0$;
- f è strettamente concava/convessa $\forall x > x_0$;
- esiste una retta tangente alla funzione in $x_0$.

# 6. Calcolo Integrale

## 6.1 Primitiva e Integrale Indefinito

Data una generica f'(x), è possibile risalire alla forma di f(x): il valore della derivata prima, infatti, permette di conoscere il coefficiente angolare della tangente alla funzione in ogni suo punto.
In particolare, per un corollario al Teorema di Lagrange, se due funzioni hanno la stessa derivata prima su tutto un intervallo, allora differiscono per una costante.
Se f'(x) è continua, inoltre, sarà sempre possibile risolvere l'equazione e trovare f(x).

Data f(x), quindi, è possibile trovare una F(x) tale che F'(x) = f(x); F(x) si dice **FUNZIONE PRIMITIVA**.

- Data f: (a, b)⊆**R**→**R**, si dice **PRIMITIVA** di f(x) su (a, b) una funzione F(x) derivabile su (a, b) tale che $F'(x) = f(x), \forall x \in (a,b)$.

**N.B.**: Le primitive di f(x), se esistono, sono infinite: $F(x) + c, \forall c \in \boldsymbol{R}$.

L'insieme delle primitive di f(x) su un intervallo (a, b) si indica con $\int f(x)dx = F(x) + c$ e si dice **INTEGRALE INDEFINITO** di f(x).

## 6.2 Calcolo dell'Integrale Indefinito

### 6.2.1 Integrali Indefiniti Elementari

| f(x) | F(x) |
|---|---|
| $k$ | $kx + c$ |
| $x^\alpha$ | $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \forall\alpha \neq -1$ |
| $x^{-1} = \frac{1}{x}$ | $\ln\lvert x\rvert + c, x \neq 0$ |
| $e^x$ | $e^x + c$ |
| $sen\, x$ | $-\cos x$ |
| $\cos x$ | $sen\, x$ |

Oltre alle regole elencate nella tabella, valgono due proprietà fondamentali:

- $\int k\, f(x)dx = k \int f(x)dx\, , \forall k \in \boldsymbol{R}$;
- $\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$: l'integrale della somma è la somma degli integrali.

### 6.2.2 Integrali Quasi Immediati

| f(x) | F(x) |
|---|---|
| $f'(x) \cdot e^{f(x)}$ | $e^{f(x)} + c$ |
| $f'(x) \cdot [f(x)]^\alpha$ | $\frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \forall\alpha \neq -1$ |

| | |
|---|---|
| $\frac{f'(x)}{f(x)}$ | $\ln\|f(x)\| + c$ |
| $f'(x) \cdot sen[f(x)]$ | $-\cos[f(x)]$ |
| $f'(x) \cdot \cos[f(x)]$ | $sen[f(x)]$ |

### 6.2.3 Integrazione per Parti

Per gli integrali nei quali non basta l'applicazione delle regole di calcolo, può servire ragionare sulla formula di derivazione del prodotto tra funzioni.

Date f(x) e g(x), infatti, si ha che $D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
Se entrambe le funzioni hanno derivata prima continua, allora anche $D[f(x) \cdot g(x)]$ sarà continua; quindi, si avrà che $\int D[f(x) \cdot g(x)]\, dx = \int f'(x)g(x) + f(x)g'(x)dx$.
Quindi, $f(x) \cdot g(x) = \int f'(x)g(x) + f(x)g'(x)dx = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$.
Da qui si arriva alla **formula di integrazione per parti**:
$\boldsymbol{\int f(x)g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x)g(x)dx.}$

All'interno dell'integrale di partenza, dunque, vanno scelti un fattore finito e un fattore differenziale, per poter utilizzare la formula; la scelta dei due fattori è fondamentale e, cambiandola, cambia anche l'applicazione della formula, che potrà quindi risultare più o meno utile.
Inoltre, va ricordato che la formula di integrazione per parti può essere utilizzata più volte consecutivamente, per semplificare gradualmente il calcolo.

### 6.2.4 Integrazione per Sostituzione

Data $\int f(x)dx$, si può vedere $x = g(t) <=> t = g^{-1}(x)$, in modo da ottenere $\int f\big(g(t)\big)g'(t)dt = F(t) + c$.
In questo modo, si potrà trovare la soluzione dell'integrale di partenza, ovvero $\int f(x)dx = F\big(g^{-1}(x)\big) + c$.

Bisognerà tenere conto che, ponendo $x = g(t)$, cambierà anche il differenziale: $dx = g'(t)dt$.
L'integrazione per sostituzione potrà essere combinata con l'integrazione per parti, per arrivare al risultato finale.

## 6.3 Integrale Definito

### 6.3.1 Scaloidi e Somme Integrali

Data una f(x) limitata su (a, b), si potrà calcolare l'area compresa tra il grafico di f(x) e l'asse delle ascisse, nell'intervallo [a, b], a patto che la funzione sia costante a tratti.
Questo significa che, ponendo dei punti $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, interni all'intervallo (a, b), si potrà costruire uno **scaloide**, ovvero una figura geometrica composta da più rettangoli, che vada ad approssimare l'area del trapezoide.
Si otterrà uno <u>scaloide inscritto</u> al trapezoide se si utilizza un'approssimazione per difetto, che prenda quindi il valore minimo della funzione nei vari intervalli (area scaloide inscritto $\leq$ area trapezoide); viceversa, si otterrà uno <u>scaloide circoscritto</u> tramite un'approssimazione per eccesso, che prenda il valore massimo della funzione negli intervalli (area scaloide circoscritto $\geq$ area trapezoide).
In entrambi i casi, aggiungendo degli ulteriori punti di suddivisione in (a, b), si otterrà un'approssimazione migliore.

Generalizzando, se si individuano n-1 punti di suddivisione (e quindi n intervalli in (a, b) ), tali che $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in (a, b)$, si dirà **PARTIZIONE** l'insieme $P = \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$.

Nel caso dello scaloide inscritto e dell'approssimazione effettuata per difetto, si prenderanno, come valori della funzione generalmente chiamati $l$: $l_i = inf_{x \in I_i} f(x)$, dove $I_1 = [a, x_1], I_2 = [x_1, x_2], \dots, I_n = [x_{n-1}, b]$.
In questo modo, si otterrà una **SOMMA INTEGRALE INFERIORE**: $s(P) = l_1(x_1 - a) + l_2(x_2 - x_1) + \dots + l_n(b - x_{n-1})$.
Si può anche dire che $s(P) = \sum_{k=1}^{n} l_k(x_k - x_{k-1})$.
In ogni caso, si intenderà $x_0 = a, x_n = b$ e si avrà che $s(P) \leq A, \forall P$.
Si nota, inoltre, che la somma integrale inferiore è dipendente da P: se si aggiunge un altro punto a P, si otterrà un'altra partizione, $P' = P \cup \{\bar{x}\}$, tale che $s(P') \geq s(P)$.

Nel caso dell'approssimazione per eccesso e dello scaloide circoscritto, invece, si prenderanno in esame i valori della funzione massimi negli intervalli: $L_i = sup_{x \in I_i} f(x)$, dove $I_1 = [a, x_1], I_2 = [x_1, x_2], \dots, I_n = [x_{n-1}, b]$.
Si definirà **SOMMA INTEGRALE SUPERIORE** $S(P) = L_1(x_1 - a) + L_2(x_2 - x_1) + \dots + L_n(b - x_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n} L_k(x_k - x_{k-1})$.
Anche qui, si avrà $x_0 = a, x_n = b$ e $S(P) \geq A, \forall P$.
Infine, anche questa somma integrale dipende dalla partizione adottata: se si utilizza $P' = P \cup \{\bar{x}\}$, si avrà che $S(P') \geq S(P)$.

Sarà dunque valida la legge $s(P) \leq A \leq S(P)$, anche nel caso in cui si utilizzino due partizioni diverse: $s(P^*) \leq A \leq S(P^{**}), \forall P^*, P^{**}$.

### 6.3.2 Area del Trapezoide

Tutte le possibili partizioni dell'intervallo (a, b) fanno sì che la somma integrale inferiore abbia un <u>estremo superiore finito</u> e che, allo stesso modo, la somma integrale superiore abbia un <u>estremo inferiore finito</u>.

- $sup_P\ s(P) = \underline{\int_a^b} f(x)dx$, **INTEGRALE INFERIORE** tra a e b di f(x).
- $inf_P\ S(P) = \overline{\int_a^b} f(x)dx$, **INTEGRALE SUPERIORE** tra a e b di f(x).

Come nel paragrafo precedente, varrà la legge $\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq A \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx$.

In particolare, si dirà che una funzione è **integrabile** secondo Riemann su [a, b] quando $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$. Da qui si arriva alla definizione di integrale indefinito:

- Si dice **INTEGRALE INDEFINITO** secondo Riemann il numero $\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$.

### 6.3.3 Interpretazione Geometrica

Per costruzione, si avrà che, se $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$, $\int_a^b f(x)dx = A$.

Nel caso in cui $f(x) \leq 0, \forall x \in [a, b]$, si dovrà invertire tutto: infatti, si avrà che $s(P) = L_1(x_1 - a) + L_2(x_2 - x_1) + \dots + L_n(b - x_{n-1})$ e che $S(P) = l_1(x_1 - a) + l_2(x_2 - x_1) + \dots + l_n(b - x_{n-1})$.
Quindi, $\int_a^b f(x)dx = -A$: l'integrale definito corrisponde all'area del trapezoide individuato dalla funzione simmetrica rispetto all'asse delle ascisse di f(x).

Pertanto, $\int_a^b -f(x)dx = A$.

Se f(x) è limitata di segno qualsiasi su (a, b), ovvero se cambia segno all'interno dell'intervallo, l'integrale definito corrisponderà a una differenza di aree: si dovranno sommare le aree al di sopra dell'asse x, per poi sottrarre le aree che ne stanno al di sotto.
In questo caso, prendendo in esame |f(x)|, si otterrà che $\int_a^b |f(x)|dx = A$: l'integrale definito del modulo di f(x) rappresenta sempre l'area del trapezoide.

### 6.3.4 Integrabilità secondo Riemann

Esiste una condizione necessaria di integrabilità secondo Riemann:

- f(x) deve essere **limitata** su [a, b], ovvero deve avere un maggiorante e un minorante.

Trattandosi di condizione necessaria, va ricordato che non tutte le funzioni limitate sono integrabili (si pensi alla funzione di Dirichelet).

Esistono, inoltre, dei criteri di integrabilità generali, ovvero delle condizioni sufficienti:

- Se f(x) è **monotona** su (a, b), f(x) è integrabile su (a,b).
- Se f(x) è **continua** su (a, b), f(x) è integrabile su (a, b).
- Se f(x) ha un **numero finito di punti di discontinuità** su (a, b), f(x) è integrabile su (a, b).

### 6.3.5 Proprietà dell'Integrale Definito

- $\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
- $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.
- $\int_a^b k\ dx = k(b-a), \forall k \in \boldsymbol{R}$.
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$: si possono scambiare di posto a e b, cambiando segno all'integrale.
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\ , \forall c \in \boldsymbol{R}$: proprietà di additività rispetto agli estremi di integrazione.
- Se f(x) ≤ g(x) $\forall x \in (a,b)$ e f(x) e g(x) sono integrabili, allora $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.
- $\int_a^a f(x)dx = 0$.
- $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

## 6.4 Teorema della Media

**Teorema della Media nel Calcolo Integrale.**

Se f(x) è continua su [a, b], allora esiste c ϵ (a, b) tale che $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) => f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$.
Il valore f(c) si dice **MEDIA INTEGRALE** della funzione su [a, b].

Il teorema sostiene quindi che l'area del trapezoide individuato da f(x) è uguale all'area del rettangolo di altezza f(c) e di base (b – a), con c interno all'intervallo (a, b).

Si potrà quindi dire che $f(c)(b-a) = \int_a^b f(c)dx$, dove f(c) è una costante.
Quindi, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(c)dx$: il numero f(c) riassume le proprietà della funzione nell'intervallo, in ambito di calcolo integrale.

**Dimostrazione.**
f(x) è continua su [a, b] per ipotesi: vale quindi il Teorema di Weierstrass, quindi esistono un massimo assoluto e un minimo assoluto su [a, b] (verranno indicati con M e m).
Pertanto, $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a,b]$.
Per le proprietà dell'integrale definito, si avrà che $\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M\,dx$.
M e m sono due costanti, quindi il loro integrale definito sarà dato dalla costante stessa moltiplicata per la differenza tra gli estremi di integrazione. Quindi, $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.
Visto che (b – a) > 0, si potrà dividere: $m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M$.
Il valore in mezzo, quindi, sarà un valore numerico compreso tra il minimo e il massimo assoluto della funzione nell'intervallo.
Dal momento che f(x) è continua su [a, b] (sempre per ipotesi), vale il Teorema di Darboux: la funzione assumerà tutti i valori compresi tra il minimo e il massimo assoluto, compreso il valore della media integrale.
Quindi, $\exists c \in (a,b)$ tale che $f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$.

## 6.5 Funzione Integrale

È possibile esprimere l'integrale definito anche come una funzione, ad esempio ponendo come incognita uno degli estremi di integrazione.
Si otterrà, quindi, una funzione del tipo $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, in cui la variabile è il secondo estremo di integrazione.

Per risolvere un problema di questo genere e risalire alla funzione integrale relative a un integrale definito, sarà opportuno calcolare il valore dell'integrale al variare di x.

*Esempio:* $F(x) = \int_1^x 2t - 1\,dt$.
*Dal grafico della funzione si nota che, per x > 1, si ottiene un trapezio rettangolo completamente positivo, per ½ < x <1 il trapezoide è sempre al di sopra dell'asse delle ascisse, mentre, per x < ½, il trapezoide sarà negativo.*
*Occorre esaminare i tre casi:*

- $\forall x > 1, F(x) = \int_1^x 2t - 1\,dt = \frac{(1+2x-1)(x-1)}{2}$ *(ovvero, formula per il calcolo dell'area del trapezio).*
  *Svolgendo, si otterrà* $F(x) = x^2 - x$.
- $\forall \frac{1}{2} < x < 1, F(x) = \int_1^x 2t - 1\,dt = -\int_x^1 2t - 1\,dt$ *(x ora è minore di 1).*
  *Si avrà quindi* $F(x) = -\frac{(1+2x-1)(1-x)}{2} = x^2 - x$.
- $\forall x < \frac{1}{2}, F(x) = \int_1^x 2t - 1\,dt = -\int_x^1 2t - 1\,dt$ *(x ora è minore di 1).*
  *Si dovrà operare una differenza tra l'area compresa tra ½ e 1 e l'area che sta al di sotto dell'asse delle ascisse:* $F(x) = -\left(\frac{1}{4} - \frac{\left[\left(\frac{1}{2}-x\right)\cdot(1-2x)\right]}{2}\right) = x^2 - x$.

*Si può quindi concludere che $F(x) = x^2 - x$, una funzione che avrà il suo vertice esattamente nel punto in cui $2t - 1 = 0$: infatti, $F'(x) = 2x - 1 = f(x)$.*

## 6.6 Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

**Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale (o di Torricelli-Barrow).**

Se f(x) è continua su [a, b], allora $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ è derivabile su (a, b) e $F'(x)$ sarà uguale a f(x), $\forall x \in (a, b)$.

**Dimostrazione:**

Per la definizione di derivata, si ha che $F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$.

Si avrà dunque che $F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h}$, dal momento che $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ per ipotesi.

Per la proprietà di additività rispetto agli estremi di integrazione, si potrà scindere il primo dei due integrali. Quindi, $F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h}$.

Svolgendo i calcoli, resta $F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}$.

Per ipotesi, si sa che f(x) è continua su [a, b]; pertanto, sarà continua anche su [x, x+h], dal momento che è un intervallo contenuto in [a, b].

Si può quindi applicare in [x, x+h] il Teorema della Media: esisterà $c \in (x, x + h)$ tale che $f(c) = \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{x+h-x} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}$.

Quindi, esisterà $c \in (x, x + h)$ tale che $F'(x) = \lim_{h\to 0} f(c)$, mettendo insieme i passaggi precedenti.

Tuttavia, si nota come, se $h \to 0$, allora $c \to x$. Quindi, $F'(x) = \lim_{c\to x} f(c)$.

Visto che f è continua per ipotesi, il limite coinciderà con il valore della funzione nel punto. Quindi, si può concludere che $F'(x) = f(x)$.

### 6.6.1 Formula di Torricelli-Barrow

Un corollario al Teorema è la **Formula di Torricelli-Barrow**, che risulta utile per calcolare l'integrale definito, quindi l'area del trapezoide.

Posta $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, si definisce G(x) come una primitiva di f(x) su [a, b].

Quindi, per il Teorema Fondamentale, si avrà che $G(x) = F(x) + c = \int_a^x f(t)dt + c, \forall x \in [a, b]$.

Ponendo $x = a, G(a) = \int_a^a f(t)dt + c = 0 + c = c$.

Quindi, sarà possibile sostituite G(a) alla costante, nella formula: $G(x) = \int_a^x f(t)dt) + G(a)$.

Ponendo $x = b, G(b) = \int_a^b f(t)dt + G(a)$.

Si ottiene quindi la Formula di Torricelli-Barrow: $\boldsymbol{\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a) = [G(x)]_a^b}$.

Questo significa che l'integrale definito di una funzione continua può essere visto come la differenza tra una sua primitiva in b e il valore della sua primitiva in a.

Per il calcolo dell'integrale definito, dunque, risulta fondamentale l'integrale indefinito, che viene usato per trovare le primitive della funzione.

## 6.7 Integrale Generalizzato

Si parla di **Integrale Generalizzato** quando si ha una funzione integranda limitata in un intervallo di integrazione illimitato, oppure quando si ha una funzione integranda illimitata in un intervallo limitato.

### 6.7.1 Funzione Limitata su Intervallo Illimitato

In questo caso, si aprono tre fattispecie:

- La funzione è limitata su $[a, +\infty)$.
  In questo caso, $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)dx$. Se questo limite esiste finito, f(x) sarà integrabile sull'intervallo.
  Si dovrà quindi procedere utilizzando la Formula di Torricelli-Barrow, svolgendo $\lim_{t\to+\infty}[G(x)]_1^t$, per poi sostituire $+\infty$ a t.
  **N.B.:** Perché il limite esista finito, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$; se questo non avviene, f(x) non sarà integrabile nell'intervallo $[a, +\infty)$.
  Avere il limite esistente è condizione necessaria, ma non sufficiente.

- La funzione è limitata su $(-\infty, b]$.
  In questo caso, $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)dx$. Se questo limite esiste finito, f(x) sarà integrabile sull'intervallo.
  **N.B.:** Perché il limite esista finito, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$; se questo non avviene, f(x) non sarà integrabile nell'intervallo $[a, +\infty)$.
  Avere il limite esistente è condizione necessaria, ma non sufficiente.

- La funzione è limitata su **R** = $(-\infty, +\infty)$.
  In questo caso, si potrà scindere l'integrale: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx, \forall c \in \boldsymbol{R}$, applicando poi le regole viste in precedenza.

### 6.7.2 Funzione Illimitata su Intervallo Limitato

Anche qui, si aprono tre possibili casi:

- $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$, la funzione ha un asintoto verticale per l'estremo inferiore di integrazione.
  In questo caso, $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx$. Se questo limite esiste finito, f(x) sarà integrabile sull'intervallo.

- $\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$, la funzione ha un asintoto verticale per l'estremo superiore di integrazione.
  In questo caso, $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx$. Se questo limite esiste finito, f(x) sarà integrabile sull'intervallo.

- $\lim_{x\to c} f(x) = \infty, \forall c \in (a, b)$, la funzione ha un asintoto verticale per un punto interno all'intervallo.
  In questo caso, si scinde: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$. Si applicheranno poi nei due integrali le regole viste in precedenza.

# 7. Funzioni a più Variabili

## 7.1 Concetti di Base su $R^n$

Considerando una funzione f: $A \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, ovvero una funzione che associa un numero a un vettore di $\mathbf{R}^n$, occorre per prima cosa definire la **Struttura Metrica** di questo insieme, come si era fatto nei capitoli precedenti per l'insieme dei numeri reali. In particolare, si studierà la struttura metrica di $\mathbf{R}^2$.

- Si dice **DISTANZA** tra due vettori A $(x_1, y_1)$ e B $(x_2, y_2)$ il valore $\overline{AB} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.
  In generale, in $\mathbf{R}^n$, avendo due vettori $\underline{x}$ e $\underline{y}$, si avrà che la loro **DISTANZA EUCLIDEA** sarà pari a $d\left(\underline{x}, \underline{y}\right) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k - x_k)^2}$.

- Si dice **INTORNO** di un punto in $\mathbf{R}^n$ $I_r(\underline{x}^0) = \{\underline{x} \in \boldsymbol{R}^n : d(\underline{x}, \underline{x}^0) < r\}$.
  In $\mathbf{R}^2$, si parla di intorni circolari, in $\mathbf{R}^n$ gli intorni sono definiti ipersfere.

- Si dice **PUNTO INTERNO** di un insieme A, in $\mathbf{R}^n$, $\underline{x}^0 \in A$ tale che $\exists I_r(\underline{x}^0) \subseteq A$.

- Si dice **PUNTO DI ACCUMULAZIONE** di un insieme A, in $\mathbf{R}^n$, $\underline{x}^0$ tale che $\exists I_r(\underline{x}^0)$: $I_r(\underline{x}^0) \cap \boldsymbol{A} \neq \emptyset$.

- In $\mathbf{R}^n$, un insieme A si dice **LIMITATO** se $\exists M > 0 : d(\underline{x}, \underline{o}) < M, \forall \underline{x} \in A$.

## 7.2 Funzioni a n Variabili

Si dice **Funzione a n Variabili** una funzione che associa a un vettore un numero; una funzione di questo genere si esprimerà come f: $A \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$.

### 7.2.1 Dominio e Grafico

Per determinare il **dominio** di una funzione a più variabili, sarà necessario porre delle condizioni di esistenza per la funzione relative alle diverse variabili in essa contenute. Il risultato sarà un'equazione o una disequazione (o un sistema di equazioni o disequazioni) che forniranno le informazioni necessarie per determinare il dominio.
Nel caso in cui non ci dovessero essere condizioni di esistenza da porre, il dominio sarà uguale a $\mathbf{R}^n$.

Il dominio di una funzione a più variabili è rappresentabile graficamente: si disegnano sul piano le equazioni delle funzioni trovate grazie alle condizioni di esistenza e si trovano le regioni di piano corrispondenti alle condizioni stesse.

Il **grafico** di una funzione a più variabili, date $z = f(\underline{x})$ e $\underline{x} \in \boldsymbol{R}^n$, sarà $graf\ f := \{(\underline{x}, z) \in \boldsymbol{R}^{n+1} : z = f(\underline{x})\}$.

### 7.2.2 Insiemi di Livello

Dal momento che il grafico di una funzione a 2 variabili sarebbe da esprimere in 3 dimensioni, la sua rappresentazione grafica risulta difficoltosa. Si usano, quindi, gli **insiemi di livello**, delle curve tracciate sul piano che esprimono la posizione nelle tre dimensioni dei punti della funzione che assumono un determinato valore.

In generale, l'insieme di livello α di una generica funzione sarà: $Lev_{\alpha} f = \{\underline{x} \in A \subseteq \boldsymbol{R^n}: f(\underline{x}) = \alpha, \alpha \in \boldsymbol{R}\}$.
Si dovrà pertanto porre la funzione uguale ad α e, a seconda dei casi, si potranno ottenere risultati diversi: se α non appartiene al codominio di f, ad esempio, $Lev_{\alpha} f = \emptyset$, mentre, se α fa parte del codominio, l'insieme conterrà uno o più vettori.

## 7.3 Regolarità delle Funzioni a Più Variabili

### 7.3.1 Massimi e Minimi di una Funzione

In $\mathbf{R}^n$, data una funzione f: A⊆ $\mathbf{R}^n$ → **R**, si avrà che:

- $\underline{\mathbf{x}}^0$ ϵ A è **PUNTO DI MASSIMO ASSOLUTO** per f($\underline{\mathbf{x}}$) quando $f(\underline{x}) \leq f(\underline{x}^0), \forall \underline{x} \in A$.
- $\underline{\mathbf{x}}^0$ ϵ A è **PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO** per f($\underline{\mathbf{x}}$) quando $f(\underline{x}) \geq f(\underline{x}^0), \forall \underline{x} \in A$.

Nell'ambito delle funzioni a più variabili, ci potranno essere anche più punti di massimo o minimo assoluto.
Per quanto riguarda i massimi e i minimi relativi, si avrà che:

- $\underline{\mathbf{x}}^0$ ϵ A è **PUNTO DI MASSIMO RELATIVO** per f($\underline{\mathbf{x}}$) su A quando $\exists I_r(\underline{x}^0): f(\underline{x}) \leq f(\underline{x}^0), \forall \underline{x} \in A \cap I_r(\underline{x}^0)$.
- $\underline{\mathbf{x}}^0$ ϵ A è **PUNTO DI MINIMO RELATIVO** per f($\underline{\mathbf{x}}$) su A quando $\exists I_r(\underline{x}^0): f(\underline{x}) \geq f(\underline{x}^0), \forall \underline{x} \in A \cap I_r(\underline{x}^0)$.

### 7.3.2 Continuità di una Funzione

- Una funzione f: A ⊆ $\mathbf{R}^n$ → **R** si dice **CONTINUA** in $\underline{x}^0 \in A' \cap A$ (dove A' è l'insieme dei punti di accumulazione) quando $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}^0} f(\underline{x}) = f(\underline{x}^0)$.

Nel caso in cui il limite dovesse presentare una forma di indecisione, ad esempio $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{x} = \left[\frac{0}{0}\right]$, si dovrà tenere conto del fatto che le due variabili si comportano in modo indipendente l'una dall'altra.
In questo caso, operando graficamente, si disegnerà una retta di equazione $y = mx$ e ci si avvicinerà al valore 0 su tale retta, ottenendo che $f(x, mx) = \frac{mx}{x} = m$: il limite, quindi, sarà uguale al coefficiente angolare della retta scelta.
Tuttavia, m è un valore che varia su tutto **R**, pertanto dipenderà dalla retta scelta: sarà quindi necessario avvicinarsi all'origine utilizzando altre funzioni più complesse.

## 7.4 Derivate di Funzioni a Più Variabili

### 7.4.1 Derivate Parziali e Gradienti

Operando in $\mathbf{R}^2$ su f(x, y), sarà possibile individuare una $f(x_0, y_0)$ per definire un **rapporto incrementale**, incrementando però una variabile per volta:

- $\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} \to \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} = \frac{\boldsymbol{df}}{\boldsymbol{dx}}(x_0, y_0)$, **Derivata Parziale** di f rispetto a x in $(x_0, y_0)$;
- $\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h} \to \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h} = \frac{\boldsymbol{df}}{\boldsymbol{dy}}(x_0, y_0)$, **Derivata Parziale** di f rispetto a y in $(x_0, y_0)$.

Le derivate parziali esistono <u>solo se il limite esiste finito</u>.

Generalizzando in $\mathbf{R}^n$, una funzione avrà n derivate parziali e si avrà che $\frac{df}{dx_i}(\underline{x}^0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\underline{x}^0 + h\underline{e}^i) - f(\underline{x}^0)}{h}$.



www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Trovate le derivate parziali di una funzione in un punto, sarà possibile costruire un **Vettore Gradiente** in $\underline{x}^0$ che contenga tutte le derivate parziali: $\nabla f(\underline{x}^0) = \begin{bmatrix} \frac{df}{dx_1}(\underline{x}^0) \\ \frac{df}{dx_2}(\underline{x}^0) \\ \vdots \\ \frac{df}{dx_n}(\underline{x}^0) \end{bmatrix}$.

Una funzione si dirà **derivabile** in $\underline{x}^0$ quando esisterà il gradiente in tale punto, ovvero quando esisteranno tutte le derivate parziali in $\underline{x}^0$.

Per calcolare più agevolmente la derivata parziale senza utilizzare la definizione, si potrà individuare una funzione derivata parziale, uguale a $\frac{df}{dx_i}(\underline{x}): D \subseteq A \subseteq \mathbf{R^n}$, dove D è l'insieme in cui la derivata esiste finita.
Nel trovare tali funzioni derivate parziali, si dovrà considerare la variabile in cui si calcola la derivata come l'unica variabile presente nella funzione, considerando invece tutte le altre variabili come parametri numerici.
Sarà possibile calcolare un gradiente $\nabla f(\underline{x})$ che contenga tutte le funzioni derivate parziali.

### 7.4.2. Derivate Seconde e Matrice Hessiana

Nel caso in cui si abbia una funzione derivata parziale $\frac{df}{dx_i}(\underline{x})$: D ⊆ $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, si può calcolare anche la derivata parziale di questa funzione rispetto a tutte le sue variabili.
In $\mathbf{R}^n$, una funzione avrà $n^2$ derivate seconde.

La **derivata seconda** si indica con $d^2f$ al numeratore, mentre, al denominatore, va per prima la variabile, moltiplicata per il parametro.
In $\mathbf{R}^2$, si avranno quindi 4 derivate seconde: $\frac{d^2f}{dx^2}, \frac{d^2f}{dxdy}, \frac{d^2f}{dydx}, \frac{d^2f}{dy^2}$; inoltre, si ha che $\frac{d^2f}{dxdy} = \frac{d^2f}{dydx}$: questo avviene per il teorema di Schwartz.

**Teorema di Schwartz.** Se le $d^2f$ sono funzioni continue (ovvero se $f \in C^2(A)$), allora $\frac{d^2f}{dx_i dx_j} = \frac{d^2f}{dx_j dx_i}$.

È possibile riunire tutte le derivate seconde di una funzione in una **matrice hessiana**, detta H o $\frac{d^2f}{d\underline{x}^2}$; la struttura della matrice sarà la seguente:

$$\nabla^2 f_{(n,n)} = \begin{bmatrix} \frac{d^2f}{dx_1^2} & \frac{d^2f}{dx_1dx_2} & \cdots & \frac{d^2f}{dx_1dx_n} \\ \frac{d^2f}{dx_2dx_1} & \frac{d^2f}{dx_2^2} & \cdots & \frac{d^2f}{dx_2dx_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{d^2f}{dx_ndx_1} & \frac{d^2f}{dx_ndx_2} & \cdots & \frac{d^2f}{dx_n^2} \end{bmatrix}$$

Sulla diagonale principale della matrice si troveranno le derivate seconde pure.
A seconda del punto in cui si vuole calcolare la matrice, si andranno a inserire le coordinate del punto nelle funzioni derivate contenute nella matrice stessa, ottenendo quindi una matrice numerica per ciascun punto.

## 7.5 Punti Stazionari, di Massimo, di Minimo e di Sella

### 7.5.1 Punti Stazionari

Anche nell'ambito della funzioni a più variabili, valgono due teoremi importanti per individuare massimi, minimi e punti stazionari.

**Teorema di Weierstrass.** Se f: A⊆ $\mathbf{R}^n$ → **R** è continua sull'insieme C ⊆ A chiuso e limitato, allora esistono un massimo e un minimo assoluti per f su C.
Questo teorema sta alla base del concetto di insieme di livello.

**Teorema di Fermat.** Sia f: A⊆ $\mathbf{R}^n$ → **R** e sia $\underline{\mathbf{x}}^{\mathbf{0}}$ ϵ int A tale che f sia derivabile in $\underline{\mathbf{x}}^{\mathbf{0}}$. Se $\underline{\mathbf{x}}^{\mathbf{0}}$ è un punto di massimo o di minimo relativo, allora $\nabla f(\underline{\boldsymbol{x}}^{\mathbf{0}}) = \underline{\boldsymbol{o}}$**.**

Quindi, per trovare un punto stazionario di una funzione in $\mathbf{R}^2$, si dovrà svolgere $\begin{cases} \frac{df}{dx} = 0 \\ \frac{df}{dy} = 0 \end{cases}$.

### 7.5.2 Punti di Massimo, Minimo e di Sella

La stazionarietà è una condizione necessaria per l'ottimalità, ma non sufficiente: esistono infatti dei punti, denominati **Punti di Sella**, che, seppure siano punti stazionari, non sono né di massimo né di minimo.

A questo proposito, vale la seguente regola generale.
Sia f: A⊆ $\mathbf{R}^2$ → **R** una funzione di classe $C^2$ (con derivata seconda continua su tutto il suo dominio), e sia $\underline{\mathbf{x}}^{\mathbf{0}}$ ϵ int A tale che $\nabla f(\underline{\boldsymbol{x}}^{\mathbf{0}}) = \underline{\boldsymbol{o}}$. Allora:

- Se $\det \nabla^2 f(\underline{\boldsymbol{x}}^{\mathbf{0}}) > 0$ e $\frac{d^2 f}{dx_1^2} > 0$, f ha un <u>punto di minimo relativo</u> in $\underline{\mathbf{x}}^{\mathbf{0}}$.
- Se $\det \nabla^2 f(\underline{\boldsymbol{x}}^{\mathbf{0}}) > 0$ e $\frac{d^2 f}{dx_1^2} < 0$, f ha un <u>punto di massimo relativo</u> in $\underline{\mathbf{x}}^{\mathbf{0}}$.
- Se $\det \nabla^2 f(\underline{\boldsymbol{x}}^{\mathbf{0}}) < 0$, f ha un <u>punto di sella</u> in $\underline{\mathbf{x}}^{\mathbf{0}}$.

Nei restanti casi, non è possibile determinare a priori la natura del punto.