Domande per orale Matematica I

1. **Calcolare, utilizzando la definizione, la derivata della funzione f(x) = x^2.**

La funzione esiste in tutto R e la funzione è sempre positiva perché anche se si prende un x negativo, va elevato al quadrato ottenendo un numero positivo. Se vogliamo calcolare la derivata utilizzando la sua definizione, dobbiamo calcolare il limite del rapporto incrementale per h→0:
$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Poiché x_0 è un punto generico del dominio di f(x), indichiamolo con x e calcoliamolo:
$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Sostituiamo l'espressione analitica della funzione e la sua valutazione in x+h:
f(x+h)=$(x+h)^2$. Otteniamo così: $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$, che risolvendolo diventa: $\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}$. Semplificando e raccogliendo, otteniamo: $\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}$ e semplificando ancora si ottiene: $\lim_{h\to 0}(2x+h)$. Risolvendo il limite si ha che: $f'(x)=2x$.

Ricapitolando, per risolvere una derivata utilizzando la definizione:

- Si calcola il Dominio;
- Si calcola il limite del rapporto incrementale per h→0;
- Si ottiene la derivata.

2. **Il Teorema di Rouché-Capelli**

Il sistema di m equazioni in n incognite Ax = b è risolubile ⇐⇒ Car A = Car (A|b).

▹ Quando il sistema è **risolubile** (cioè Car A = Car (A|b) = k), per sapere quante soluzioni ha dobbiamo confrontare il numero k con il numero n delle incognite:

- Se n > k il sistema è **indeterminato** ossia ha infinite soluzioni che dipendono da n − k variabili libere (si dice che il sistema ha ∞ n−k soluzioni).
- Se n = k il sistema è **determinato** ossia ha una sola soluzione.

▹ Inoltre, se il sistema è risolubile, detta k la caratteristica comune delle due matrici, per trovare le soluzioni si procede così:

1. si fissa una sottomatrice A′ di A, quadrata di ordine k con det(A′) ≠ 0 (se Car A = k, esiste certamente un minore A′ non nullo di ordine k);
2. si considera un nuovo sistema di k equazioni in k incognite ottenuto considerando solo le k (delle m) equazioni relative alle righe di A′ e le k incognite (variabili effettive) relative alle colonne di A' . Le restanti n − k incognite (variabili libere) sono trattate come parametri;
3. si risolve il sistema così ottenuto di k equazioni in k incognite (con determinante della matrice dei coefficienti non nullo) utilizzando, ad esempio, il Teorema di Cramer.

3. **Il teorema di Cramer**

Il sistema di n equazioni in n incognite Ax = b ha una sola soluzione ⇐⇒ det A ≠ 0.

Passaggi per risolvere un esercizio con il teorema di Cramer:

- Stabilire la matrice dei coefficienti e il vettore dei termini noti;
- Stabilire se |A| ≠0, se è così il Teorema di Cramer garantisce che il sistema ha una soluzione;
- Per determinarle, costruire le matrici con il vettore dei termini noti sostituendo quindi le colonne in cui si vanno ad inserire i termini noti;
- Calcolare i determinanti delle matrici e metterle sotto forma di soluzioni: (x,y,z).

4. **Gli asintoti di una funzione**

- data una funzione
- e dato un suo punto P

si dice che una retta è asintoto per la funzione f(x) se la distanza di P dalla retta tende a zero quando P si allontana indefinitamente lungo la funzione. La definizione non esclude che in alcuni casi la funzione può intersecare l'asintoto.
Esistono tre tipi di asintoti:

- <u>Verticale</u> $x = x_0$

dove si cerca:

- nei punti di discontinuità della funzione
- nei punti agli estremi del dominio di f(x) se sono finiti e non appartenenti al dominio stesso

come si cerca:

$\lim_{x\to x_0}(f(x))$: se n finito → l'asintoto non esiste

se ± ∞ → esiste → $x = x_0$

osserva: la funzione non attraversa mai l'asintoto verticale perché x_0 non appartiene al dominio della funzione.

- Orizzontale y=n

dove si cerca:

- a ± ∞ se il dominio lo consente

come si cerca:

$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x))$: se ± ∞ →l'asintoto non esiste

se n finito → esiste → y=n

- solo se l'asintoto orizzontale non esiste, si cerca l'asintoto obliquo

Attenzione! Per -∞ e per +∞ vanno fatte ricerche separate, ad esempio a + ∞ potrebbe esistere l'asintoto orizzontale ed a -∞ potrebbe esistere l'asintoto obliquo.

- Obliquo y=mx+q

dove si cerca:

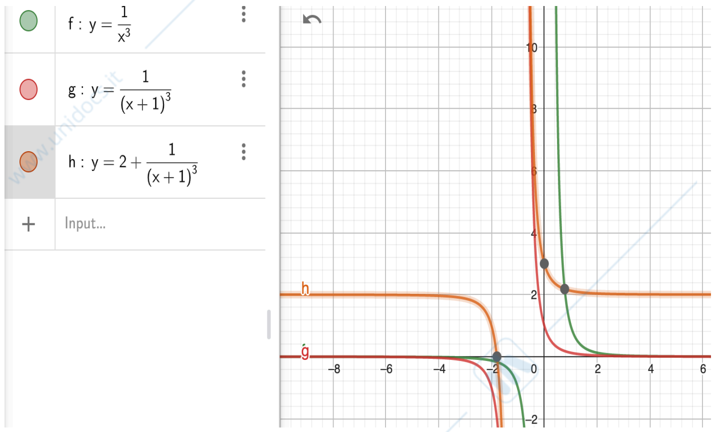
- a ± ∞ se il dominio lo consente e se non esiste già l'asintoto orizzontale

come si cerca:

$$\boldsymbol{m} = \lim_{x\to\pm\infty} f(x)\cdot\frac{1}{x} = \begin{cases} \pm\infty & \to \ l'asintoto\ Non\ Esiste \\ 0 & \to \ l'asintoto\ Non\ Esiste \\ m\ finito & \to \ si\ cerca\ q \end{cases}$$

$$\boldsymbol{q} = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - mx] = \begin{cases} \pm\infty & \to l'asintoto\ Non\ Esiste \\ q\ finito \to Esiste \to \boldsymbol{y = mx + q} \end{cases}$$

5. **Disegnare** $f(x) = 2 + \dfrac{1}{(x+1)^3}$



6. **La retta tangente al grafico di una funzione**

La **derivata** di una funzione in un punto rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente alla funzione in quel punto. Sfruttando questa relazione, è possibile determinare l'equazione della retta tangente al grafico di una funzione f(x), conoscendo l'ascissa (x_0) del punto P in cui la retta è tangente alla curva.

Tale retta, infatti, dovrà soddisfare i seguenti requisiti:

- Sapendo che il punto P in cui la retta è tangente alla curva ha ordinata x_0, e sapendo che tale punto appartiene alla curva f(x), sappiamo che la sua ordinata è $f(x_0)$. Quindi, la retta in questione passa per il punto P(x_0;$f(x_0)$). La sua equazione sarà quindi del tipo: [y = $f(x_0)$ = m (x-x_0)]dove m indica il suo coefficiente angolare.
- Sapendo, poi, che la derivata della funzione nel punto x0 rappresenta proprio il coefficiente angolare della retta cercata, abbiamo: [m = f'(x_0)] => derivata di una funzione nel punto: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

7. **La funzione integrale e Il teorema fondamentale del calcolo integrale**

Teorema fondamentale del calcolo integrale:

Ricordiamo che, data una funzione f, il suo integrale indefinito è un insieme di funzioni, mentre il suo integrale definito è un numero reale. Vogliamo ora mostrare che tra questi due concetti esiste un legame.

- Se f è una funzione continua in [a, b], per ogni x ∊ [a, b] possiamo calcolare l'integrale definito $\int_a^x f(t)dt$; questa è una quantità che dipende da x ∊ [a, b]. Abbiamo perciò costruito una funzione F : [a, b] → R, detta funzione integrale di f, definita come: $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Il seguente teorema dà il legame tra una funzione continua f e la sua funzione integrale F.

Sia f continua in [a, b] e sia $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ la funzione integrale di f. Allora:

- F è derivabile in (a, b) ed è continua in [a, b] ;
- F'(x) = f(x) per ogni x ∊ (a, b).

=> Sia f continua in [a, b] e sia F la sua funzione integrale. Allora F è una primitiva di f.

In particolare, osserviamo che la funzione integrale F è la primitiva di f che vale 0 in a (perché abbiamo convenuto di porre $\int_a^a f(x)dx = 0$).

Corollario:
Sia f continua in [a,b] e sia G una qualunque primitiva di f. Allora:

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

(Per comodità, la quantità G (b) − G (a) viene solitamente indicata con la scrittura $[G(x)]_a^b$).

• Così, l'operazione di calcolo dell'integrale definito $\int_a^b f(x)dx$ comporta i seguenti due passi:
1) si determina una primitiva G della funzione f;
2) si calcola il numero G (b) − G (a) , che coincide con l'integrale cercato.

Conviene osservare che il numero $\int_a^b f(x)dx$ non dipende dalla primitiva di f che abbiamo scelto. Infatti, tutte le primitive di f differiscono per costanti additive, e queste costanti vengono eliminate quando si calcola la differenza tra i valori assunti dalla primitiva scelta nei punti x = a e x = b.

8. L'integrale indefinito di una funzione

Data una funzione f : I → R, l'insieme delle sue primitive si chiama integrale indefinito di f e si indica con il simbolo $\int f(x)dx$.
Quindi, $\int f(x)dx$= {F : I → R derivabili in I e tali che F′(x) = f(x) per ogni x ∊ I}.
Se F è una primitiva di una data funzione f, allora: $\int f(x)dx$=F(x)+c, per ogni c ∊ R.

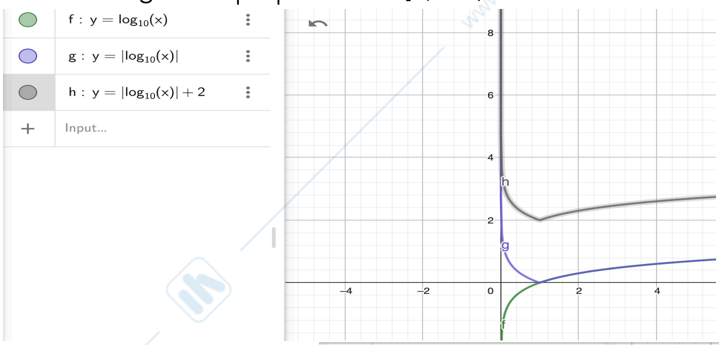
9. Integrali impropri

Sia f continua in [a, +∞); il limite $\lim_{c\to+\infty}\int_a^c f(x)dx$ (*)
se esiste, si chiama integrale improprio di f in [a, +∞), e si indica con il simbolo: $\int_a^\infty f(x)dx$
Più in particolare, diciamo che l'integrale improprio è **convergente**, e che f è integrabile in senso improprio in [a, +∞), se il limite (*) è finito.
Se invece $\lim_{c\to+\infty}\int_a^c f(x)dx$=+∞ (oppure −∞) l'integrale improprio di f in [a, +∞) `e detto divergente.
Quindi:

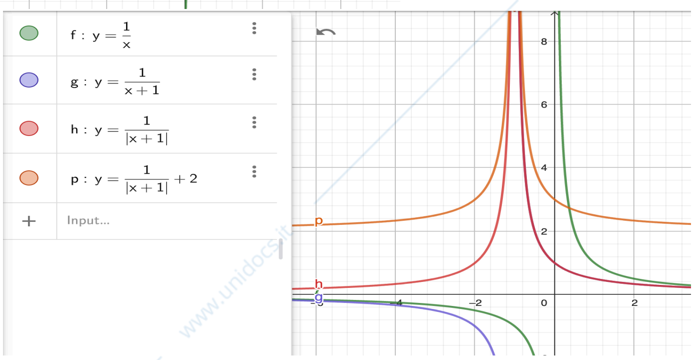
$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{c\to+\infty}\int_a^b f(x)dx, \qquad \text{quando il limite esiste.}$$

Se $\lim_{c\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ non esiste, diciamo che l'integrale improprio di f in [a, +∞) non esiste.

10. Disegnare f(x)=|logx|+2



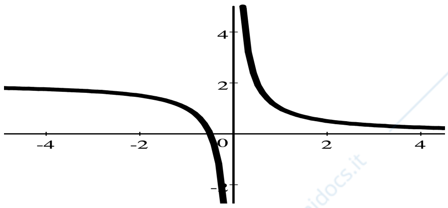
11. Disegnare $f(x) = 2 + \dfrac{1}{|x+1|}$



12. **Funzioni monotone e relazioni con la loro derivata**

La derivata di una funzione può stabilire anche il segno di essa, semplicemente ponendo la derivata stessa maggiore di zero. Grazie a questa proprietà siamo in grado di capire anche quando una funzione sia crescente o decrescente.
Sia f derivabile su I intervallo.
Se f′(x) > 0,∀x ∈ I, allora f è **strettamente crescente** su I;
Se f′(x) < 0,∀x ∈ I, allora f è **strettamente decrescente** su I.
Non è vero il viceversa.
Questa relazione tra monotonia e segno della derivata vale su intervalli.

Per esempio f(x) =.$\begin{cases} 2+\frac{1}{x} & \text{se} \quad x<0 \\ \frac{1}{x} & \text{se} \quad x>0 \end{cases}$ ha derivata sempre negativa: $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, nel suo campo di esistenza, pur non essendo strettamente decrescente su di esso, in quanto $f(\frac{1}{3})= -1$ < f (2) = $\frac{1}{2}$, ma −1 < 2. Il suo campo di esistenza è (−∞, 0) ∪ (0, +∞), cioè l'unione di due intervalli, su ognuno dei quali (ma separatamente) la funzione è strettamente decrescente, come mostra il suo grafico :



Corollario:
Se la derivata di una funzione derivabile è sempre positiva (o sempre negativa) su un intervallo I, la funzione è invertibile su I (in quanto iniettiva perché strettamente monotona).

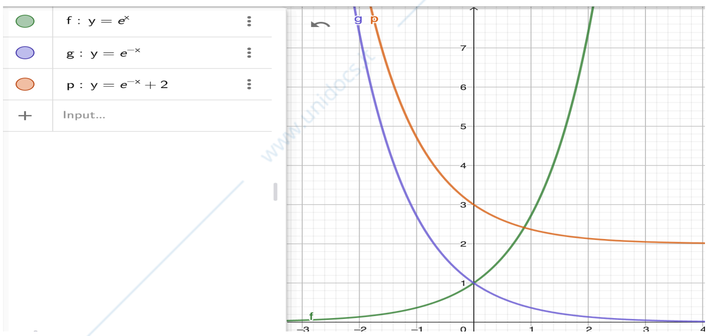
13. **Estremanti di una funzione e relazioni con la derivata**

Sia f continua in x_0 e derivabile in (a, x_0) ∪ (x_0, b).

- Se f′(x) > 0 in (a,x_0) e f′(x) < 0 in (x_0,b), allora x_0 è punto di massimo relativo.
- Se f′(x) < 0 in (a,x_0) e f′(x) > 0 in (x_0,b), allora x_0 è punto di minimo relativo.

Quindi se a sinistra di x_0 la derivata esiste con un certo segno, a destra di x_0 la derivata esiste con segno opposto, dopo aver controllato che f è definita e continua in x_0, si può concludere che x_0 è punto di massimo o minimo relativo, anche senza sapere nulla di f′(x_0). Si ha un criterio analogo nel caso in cui x_0 sia un estremo del campo di esistenza di f :
nel caso di **estremo sinistro**, se f è continua in [x_0,b), derivabile con derivata positiva (negativa) in (x_0,b), x_0 è punto di minimo (massimo) relativo.
Analogamente si opera nel caso di **estremo destro**.

14. **Disegnare f (x) = e^{-x} + 2**



15. **Funzioni continue**

Consideriamo un sottoinsieme A ⊆ R, un punto x_0∈ A ed una funzione f : A → R. Per poter dare un senso alla definizione che segue, è necessario che x_0, oltre ad essere un punto del dominio di f, sia anche un punto di accumulazione per f (cioè che in ogni intorno di x_0 esistano punti del dominio di f diversi da x_0). Infatti, ci serve poter parlare sia del valore f(x_0) che del limite di f per x che tende a x_0.
La funzione f `e continua nel punto x_0 se accade che: (*) $\lim_{x \to x_0} (f(x))$=f(x_0)

É utile osservare che nella scrittura (∗) sono contenute almeno tre informazioni:
i) la funzione f è definita nel punto x_0, altrimenti non si può parlare del valore f(x_0);
ii) $\lim_{x \to x_0} (f(x))$ esiste ed è finito;
iii) inoltre, questo limite e il valore f(x_0) coincidono.

16. **Operazioni tra matrici: somma, prodotto per uno scalare (costante: 3), prodotto matrice con vettore, prodotto tra matrici**

Esempio 12.5 Date le due matrici di tipo $(3, 2)$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \\ -2 & 3 \end{pmatrix},$$

la matrice $2A - B$ è la matrice di tipo $(3, 2)$

$$2A - B = \begin{pmatrix} 2\cdot(-1) - 4 & 2\cdot 0 - 1 \\ 2\cdot 2 - 0 & 2\cdot 1 - \sqrt{2} \\ 2\cdot 0 + 2 & 2\cdot 5 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 4 & 2-\sqrt{2} \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Esempio 12.6 Dati la matrice di tipo $(2,3)$: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ e il vettore colonna di $(3,1)$: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, il prodotto $A\mathbf{x}$ è il vettore colonna di tipo $(2,1)$

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2\cdot(-4) + 1\cdot 2 + 3\cdot 1 \\ -1\cdot(-4) + 5\cdot 2 + 7\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

Esempio 12.7 Date $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, il prodotto AB è la matrice di tipo $(2,3)$

$$AB = \begin{pmatrix} 0\cdot 2 - 1\cdot(-1) & 0\cdot 1 - 1\cdot 5 & 0\cdot 3 - 1\cdot 7 \\ 2\cdot 2 + 1\cdot(-1) & 2\cdot 1 + 1\cdot 5 & 2\cdot 3 + 1\cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -7 \\ 3 & 7 & 13 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che il prodotto BA **non** può essere eseguito.

17. **Il determinante di una matrice e sue proprietà**

Il determinante di una matrice è un numero reale ad essa asso

Di una matrice quadrata con $n \leq 2$:

▶ se $n = 1$, ossia se $A = \begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix}$, allora $\det A = a_{11}$;

▶ se $n = 2$, ossia se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, allora $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Di una matrice quadrata con $n \geq 3$:

Esempio 12.12 Per calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

fissiamo, ad esempio, la prima colonna e otteniamo:

$$\det A = 0\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 1\cdot\det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 2\cdot\det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 0\cdot\det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Fissando ora la seconda riga nella seconda matrice e la prima colonna nella terza otteniamo:

$$\det A = -1\cdot\det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + 2\cdot\left[3\cdot\det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 2\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 2\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right]$$

$$= -5 + 2\cdot[-3 - 2 - 10] = -35.$$

► **Alcune proprietà del determinante.**

◇ Se A è triangolare, allora $\det A = a_{11}\cdot a_{22}\cdot\dots\cdot a_{nn}$.

◇ Se A ha una riga o una colonna di zeri, allora $\det A = 0$.

◇ Se A ha due righe o due colonne uguali, allora $\det A = 0$.

◇ Scambiando due righe (ossia applicando la ~~Trasformazione I)~~ o due colonne il determinante cambia segno.

◇ Moltiplicando una riga per un numero k ($\neq 0$) (ossia applicando la ~~Trasformazione II)~~ il determinante viene moltiplicato per k.

◇ Aggiungendo ad una riga un multiplo di un'altra (ossia applicando la ~~Trasformazione III)~~ il determinante non cambia.

◇ *(Teorema di Binet)* Se A e B sono matrici quadrate dello stesso ordine, allora

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

◇ Data la matrice quadrata di ordine 3,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

si ha:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{33}a_{21} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

ed esiste un metodo geometrico per calcolare il determinante detto *regola di Sarrus*.

18. **Insieme di definizione di $f(x) = \sqrt{x - \frac{1}{x}}$**

$x - \frac{1}{x} > 0$ per $\frac{x^2-1}{x} > 0$

=> N: $x^2 - 1 > 0$ per x<-1 v x>1

D: x>0

=> $[-1,0)U[1,+\infty)$

19. **Rango o Caratteristica di una matrice e suo utilizzo**

Data una matrice di tipo (m, n) : A, e un intero k, con k ≤ min(m, n) si definisce:

- Minore di ordine k estratto da A : il determinante di una qualunque matrice quadrata di ordine k ottenuta prendendo gli elementi comuni a k righe di k colonne di A.
- Caratteristica o rango di A (denotata con Car A) : l'ordine massimo dei minori non nulli che si possono estrarre da A.

In altre parole, Car A = r se esiste un minore di ordine r estratto da A diverso da zero e se tutti i minori di ordine r + 1 estratti da A sono nulli.

- Per calcolare la caratteristica di una matrice può essere utile utilizzare il seguente Teorema di Kronecker

Sia A una matrice di tipo (m, n) e sia r < min(m, n). Se la matrice A contiene una sottomatrice quadrata A' di ordine r con determinante diverso da zero e tutte le sottomatrici quadrate di ordine r + 1 che contengono A' (dette orlate di A) hanno determinante uguale a zero, allora Car A = r.

Esempio 12.19 Determinare la caratteristica delle seguenti matrici.

$$i)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad ii)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}; \quad iii)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

i) Poichè $\det A = 5 \neq 0$, Car $A = 2$;

ii) Poichè $\det A = 0$, deve essere Car $A \leq 2$. Prendendo (ad esempio) le prime due righe e colonne si ottiene la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, con $\det B = -3$, quindi Car $A = 2$;

iii) Poichè la matrice A è di tipo $(3,4)$, sarà Car $A \leq 3$. Applicando il Teorema di Kronecker consideriamo la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, ottenuta da A prendendo le prime due righe e colonne: essa ha $\det B \neq 0$. Le matrici di ordine 3 che contengono la matrice B sono:

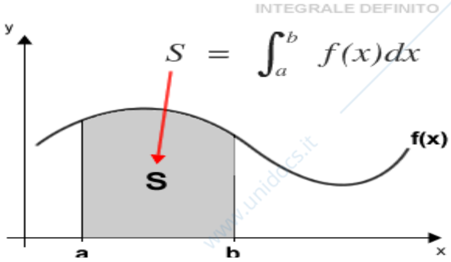
$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Poichè $\det B_1 = \det B_2 = 0$ entrambi le matrici di ordine 3 che contengono B hanno determinante nullo e quindi Car $A = 2$.

20. **Primitiva di una data funzione f.**
21. **Integrali definiti. Cosa sono e quale risultato si usa per calcolarli**

L'integrale definito di una funzione f(x) in un intervallo [a,b] è un numero reale che misura l'area S compresa tra la funzione e l'asse delle ascisse, delimitata dai due segmenti verticali che congiungono gli estremi [a,b] al grafico della funzione.

La funzione f(x) è detta funzione integranda nell'intervallo di integrazione [a,b].
Per calcolare l'area tra il grafico di una funzione e l'ascisse in un intervallo chiuso [a,b] si suddivide la basa in intervalli più piccoli$[x_1, x_2, \dots x_n]$ di ampiezza costante Δx.
Ciascun intervallo ha un minimo ed un massimo.



Quindi per ogni rettangolo è possibile calcolare l'area di esso fino al minimo e fino al massimo. Ottenendo la somma inferiore s di tutti gli intervalli mΔx e la somma superiore S di tutti gli intervalli MΔx.

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} s = \lim\limits_{\Delta x \to 0} S = I$ —> integrale definito. $I = \int_a^b f(x)\ dx$ => $\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$

22. **Derivata di una funzione composta**

23. **Funzione iniettiva. Due esempi: una funzione iniettiva e una NON iniettiva.**
24. **Cosa significa la frase "G è una primitiva di f"?**
25. **Insieme di definizione di** $f(x) = log\dfrac{1-x}{x+2}$

$x \neq -2$ v $\dfrac{1-x}{x+2} > 0 => (-2,1)$

26. **Autovettori e autovalori di una matrice**

Sia A una matrice quadrata di ordine n.

• Un vettore non nullo v si dice **autovettore** della matrice quadrata A se esiste un numero λ tale che

Av = λv

cioè: (A − λI)v = 0 (I matrice identità).

Ossia il vettore v è una **soluzione non nulla di un sistema lineare omogeneo di n equazioni in n incognite**. Ma allora, per il Teorema di Rouché-Capelli, deve essere

det(A − λI) = 0

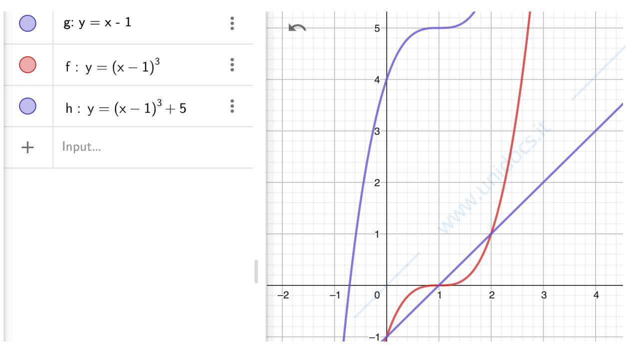
• Un numero λ che soddisfa

det(A − λI) = 0

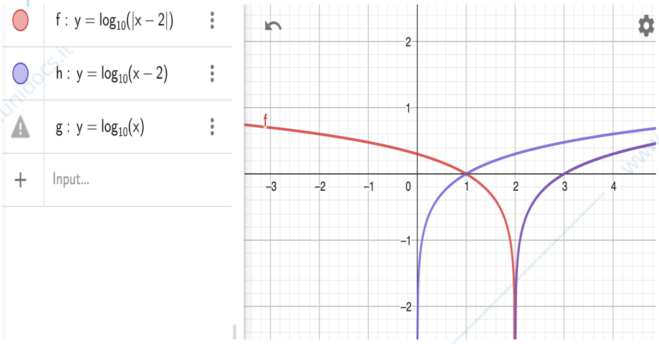
si chiama **autovalore** della matrice quadrata A.

• Il polinomio det(A − λI) si chiama **polinomio caretteristico** della matrice A.

27. **Disegnare f (x) = (x − 1)$^{1/3}$ + 5**



28. **Disegnare f(x)=log|x−2|**



29. **La retta dello spazio passante per due punti**

Equazioni della retta

Una retta passante per O e per un punto A diverso da O è formata dai punti P tali che il vettore OP ha la stessa direzione del vettore OA cioè

OP = tOA con t numero reale qualsiasi.

Dunque se OA = (a_1, a_2, a_3) e OP = (x,y,z) si deve avere (x,y,z) = t(a_1, a_2, a_3), cioè (x, y, z) = (ta_1, ta_2, ta_3).

Più in generale una retta passante per due punti diversi A e B è formata dai punti P tali che il vettore BP ha la stessa direzione del vettore BA cioè BP = tBA con t numero reale qualsiasi.

Dunque se A = (a_1, a_2, a_3), B = (b_1, b_2, b_3) e P = (x,y,z) si ha BP = $(x-b_1, y-b_2, z-b_3)$ e BA = $(a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3)$ e quindi $(x-b_1, y-b_2, z-b_3)$=t($(a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3)$)

Cioè $(x-b_1, y-b_2, z-b_3)$=$(t(a_1-b_1), t(a_2-b_2), t(a_3-b_3))$.

Perché due vettori siano uguali devono essere uguali le loro componenti scalari: quindi <u>le equazioni della retta passante per A e B sono :</u>

$$\begin{cases} x = b_1 + t\,(a_1 - b_1) \\ y = b_2 + t\,(a_2 - b_2) \\ z = b_3 + t\,(a_3 - b_3) \end{cases}$$

Con t numero reale qualsiasi.

30. **Il piano perpendicolare ad una direzione e passante per un punto**

Scrivere un'equazione cartesiana per il piano che passa per il punto $P = (0, 1, 1)$ e include la retta r di equazioni cartesiane

$$r : \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y + 8z - 1 = 0 \end{cases} \qquad (14)$$

L'equazione del fascio di sostegno r è

$$\lambda(x - y) + \mu(x + y + 8z - 1) = 0, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

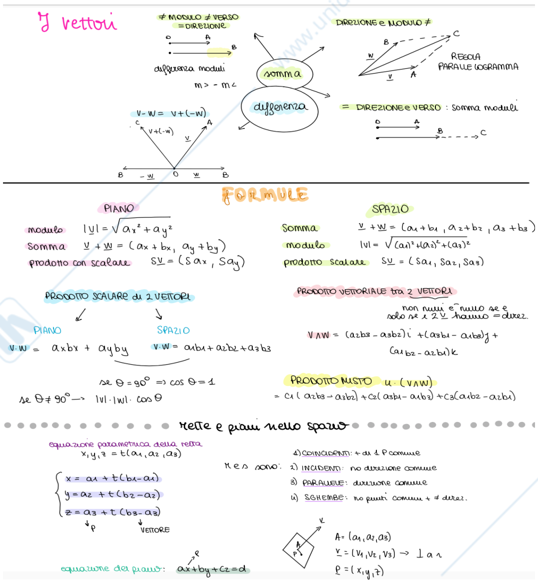
$(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. Il passaggio per $P = (0, 1, 1)$ impone

$$\lambda(0 - 1) + \mu(0 + 1 + 8 - 1) = 0, \quad \text{ossia} \quad -\lambda + 8\mu = 0$$

le cui soluzioni sono tutti i multipli della coppia ordinata $\lambda = 8$, $\mu = 1$. Un'equazione del piano cercato è

$$8(x - y) + 1(x + y + 8z - 1) = 0 \quad \text{ossia} \quad 9x - 7y + 8z - 1 = 0$$

31. **Operazioni tra i vettori: somma, prodotto per uno scalare, prodotto scalare, e vettoriale (quando possibile)**



32. **I sistemi lineari: cosa sono, soluzione di un sistema, numero delle soluzioni, Teoremi sui sistemi lineari**

Un sistema lineare di m equazioni nelle n incognite $x_1, \ldots, x_n$ è un sistema formato da m equazioni lineari in $x_1, \ldots, x_n$, ossia:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (*)$$

Una soluzione di $(*)$ `e una n-pla di numeri reali $(x_1, \ldots, x_n)$ che sostituita alle incognite soddisfa simultaneamente tutte le equazioni del sistema.

- Un sistema si dice **possibile** (o risolubile) se ammette almeno una soluzione. In tal caso le equazioni si dicono **compatibili**.
- Un sistema si dice **impossibile** se non ammette alcuna soluzione. In tal caso le equazioni si dicono **incompatibili**.

NOTA Un sistema possibile può avere **una sola soluzione** (sistema **determinato**) oppure i**nfinite soluzioni** (sistema **indeterminato**), ma mai un numero finito ≥ 2 di soluzioni.

- Due sistemi si dicono **equivalenti** quando ammettono le **stesse soluzioni**.
- **Trasformazioni elementar**i. Le seguenti trasformazioni, applicate ad un dato sistema, portano a un sistema equivalente:

I) scambiare due equazioni tra loro;
II) moltiplicare i due membri di un'equazione per lo stesso numero k (≠0);
III) sommare ad un'equazione un'altra equazione moltiplicata per k.

Il **metodo di eliminazione di Gauss** trasforma un sistema di equazioni lineari in una sistema a gradini. Questo rende molto più semplice il calcolo del **rango** e la **ricerca delle soluzioni del sistema lineare** quando il sistema è composto da numerose equazioni e variabili. Con questo metodo si cerca una **matrice equivalente** che sia più facilmente analizzabile. Il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan consiste nel **ridurre la matrice iniziale in una matrice a gradini** (o matrice a scalini).
Ogni gradino della scala diverso da zero è detto **pivot o termine direttore.**

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Le operazioni ammissibili sulla matrice, secondo Gauss, sono le seguenti:

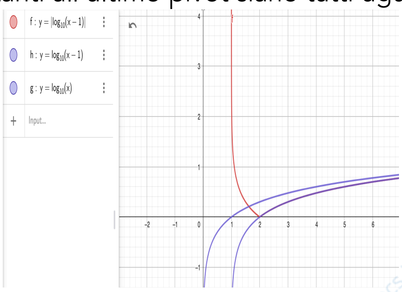
- **Scambio di una riga con un'altra riga**
- **Moltiplicazione di una riga per un numero reale diverso da zero**
- **Somma di due righe tra loro** $R_1 \longrightarrow R_1 + R_2$ $\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 5+1 & 3+4 & -1+0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 7 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Algoritmo di Gauss:

1. Individuo la prima colonna non nulla di A a partire da sinistra.
2. Verifico che gli altri elementi delle righe sottostanti al pivot siano tutti uguali a zero.
3. Individuo la prima colonna j-esima a destra dell'ultimo pivot che non abbia tutti zeri nelle righe sottostanti al pivot. Se questa colonna non esiste, l'algoritmo finisce qui.
4. Verifico che gli altri elementi delle righe sottostanti all'ultimo pivot siano tutti uguali a zero.

33. **Disegnare il grafico di f (x) = | log(x − 1)|**



34. **Funzione inversa. Quando esiste? Cos'è? Esempio di una funzione invertibile e di una non invertibile**

Data una funzione y=f(x) la funzione inversa f-1 è una funzione che collega ogni elemento del codominio Y a un elemento del dominio X. Sono dette funzioni invertibili le funzioni di X in Y che hanno anche una funzione inversa di Y in X. Sono funzioni invertibili tutte le funzioni biettive (biunivoche), ossia le funzioni che sono iniettive e suriettive. Esempio funzione invertibile: y=x+1 => x=y-1=> y=x-1. Esempio di funzione non invertibile: y = x^2, perché non è biettiva.

35. **Funzioni continue: proprietà e teoremi**

Immagine di una funzione; funzioni limitate La funzione f è continua in A se è continua in ogni punto di A.
Ad esempio, le funzioni costanti sono palesemente continue in tutti i punti di un qualsiasi intervallo A in cui noi si decida di definirle. É anche semplice vedere che questo vale anche per la funzione f(x) = x.
Tutti i punti di un intervallo, tranne eventualmente gli estremi, sono punti interni, cioè sono punti dai quali è possibile spostarsi un poco, sia verso sinistra che verso destra, senza uscire da A; equivalentemente, ognuno di questi punti ammette un intorno tutto contenuto in A.
Quando x_0 `e un punto interno all'intervallo A, le informazioni: $\lim_{x\to x_0} (f(x))$ esiste ed è finito; inoltre, questo limite e il valore f($x_0$) coincidono, presenti nella definizione di funzione continua, possono essere riformulate con più precisione; se la funzione f `e continua in x_0 allora:
i') la funzione f è definita nel punto x_0, altrimenti non si può parlare del valore f(x_0);
ii') esistono, sono finiti, e sono uguali tra loro i limiti (unidirezionali) destro $\lim_{x\to x_0^+} (f(x))$ e sinistro $\lim_{x\to x_0^-} (f(x))$;
iii') inoltre, questi due limiti e il valore f(x_0) coincidono, cioè: $\lim_{x\to x_0^-} (f(x))$ = f(x_0) = $\lim_{x\to x_0^+} (f(x))$
Se f(x_0) coincide con solo uno dei due limiti si parla di continuità unidirezionale (continuità da destra/sinistra).

Operazioni con le funzioni continue e le loro proprietà:

- Le funzioni elementari più comunemente utilizzate sono continue nel loro insieme di definizione.
- Se f e g sono continue nel punto x_0, lo sono anche f + g, f − g, fg, e (pur di avere $g(x_0) \neq 0$), anche $\frac{f}{g}$.
- Se f è continua in x_0 e g è continua in $y_0 = f(x_0)$, la funzione composta (g ∘ f) è continua in x_0.
- Se f è invertibile nell'intervallo A e continua in $x_0 \in A$, la funzione inversa f^{-1} è continua in $y_0 = f(x_0)$.

Teoremi delle funzioni continue:

Teorema della permanenza del segno: Se f è definita in un intorno U di x_0, se è continua in x_0, e se $f(x_0) > 0$, allora esiste un opportuno intorno V di x_0, $V \subset U$, in cui f assume solo valori positivi.

Teorema degli zeri: Se f è continua in un intervallo [a,b], ed ha segni discordi in x = a e x = b, allora esiste almeno un $x_0 \in$ (a,b) in cui si ha $f(x_0) = 0$.

Teorema di Darboux (o dei valori intermedi): Se f è continua in un intervallo [a,b], assume tutti i valori compresi tra f(a) ed f(b).

Teorema di Weierstrass Se f è continua in un intervallo [a,b], assume massimo e minimo (assoluti) in [a, b].

I **teoremi di Weierstrass e Darboux** possono essere unificati nel seguente teorema:

Una funzione continua in un intervallo [a,b], assume tutti i valori compresi tra il proprio minimo assoluto ed il proprio massimo assoluto.

36. **Calcolo dei limiti e operazioni**
37. **Immagine di una funzione; funzioni limitate**

L'immagine di una funzione è l'insieme delle ordinate (codominio) che corrispondono alle ascisse (dominio).

Funzione limitata: è una funzione che assume valori f(x) limitati tra un **minimo** e **massimo**. Dal punto di vista geometrico il grafico di una funzione limitata è racchiuso tra due rette parallele all'asse delle ascisse. Una funzione limitata può essere limitata sia **inferiormente** che **superiormente**.

38. **Confronto tra infiniti/infinitesimi**

Confronto tra infiniti: chi tende graficamente più velocemente a ∞. Si dice **infinito di ordine inferiore** quando il limite fa 0; **infinito di ordine superiore** quando il limite fa ∞.

$$\log_a(f(x)) << (f(x))^b << (f(x))^c << d^{f(x)} << g^{f(x)} << (f(x))^{f(x)}$$

$$\text{per } x \to x_0, \quad \text{dove } \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

$$\text{e con } a > 0 \ \wedge \ a \neq 1, \quad 0 < b < c, \quad 1 < d < g$$

Confronto tra infinitesimi: chi tende graficamente più velocemente a 0. Valgono Le stesse regole degli gli infiniti.

$$\frac{1}{x^x} << \frac{1}{a^x} << \frac{1}{b^x} << \frac{1}{x^c} << \frac{1}{x^d} << \frac{1}{\log_s(x)}$$

$$\text{per } x \to +\infty \quad \text{con } a > b > 1, \quad c > d > 0, \quad s > 0 \ \wedge \ s \neq 1$$

39. **Funzioni convesse e concave, ovvero concave verso l'alto e verso il basso**

La concavità si trova ottenendo la **derivata seconda** di una funzione e successivamente studiandone il **segno.** Questo ci permette di individuare i **punti di flesso,** ovvero quei punti in cui la funzione **cambia concavità.**

40. **Polinomio di Taylor di una funzione in un punto**

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{f^{n}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Il teorema di Taylor permette di approssimare in un intorno di x_0 una funzione derivabile n volte in x_0 con un polinomio.

41. **Insieme di definizione, immagine e grafico di una funzione**
42. **Sistemi lineari: scrittura matriciale**

Nell'algebra lineare il sistema può essere scritto nella forma matriciale AX=B, dove:

A (m x n) è la matrice dei coefficienti aij

X (1 x n) è il vettore delle incognite con n componenti. In esso le n componenti sono le n incognite del sistema lineare.

B (1 x m) è il vettore dei termini noti. Ci sono m termini noti tante quante sono le equazioni del sistema lineare.

Nella Scrittura AX=B stiamo moltiplicando la matrice A (mxn) con m righe e n colonne, per il vettore colonna delle incognite X (nx1), con n componenti. Il prodotto è fattibile in quanto il numero di colonne della prima matrice A è uguale al numero di righe del vettore. Il risultato della moltiplicazione ci restituisce il vettore dei termini noti B, che ha lo stesso numero di righe (m) della matrice A e lo stesso numero colonne (1) del vettore X. Quando facciamo il prodotto AX moltiplichiamo ogni riga della matrice A, per la colonna del vettore X. In questo modo otteniamo le equazioni del sistema lineare.

43. **Calcolo dei limiti di funzioni composte**

Vogliamo calcolare $\lim_{x \to 0^+} \log(\sin x)$. Si segue l'ordine di composizione:

$$\text{per } x \to 0^+ \qquad \begin{array}{ccccc} x & \xrightarrow{\sin(\ )} & \sin x & \xrightarrow{\log(\ )} & \log(\sin x) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0^+ & & 0^+ & & -\infty \end{array}$$