IRRAZIONALITÀ DI $\sqrt{2}$: DIMOSTRAZIONE "PER ASSURDO"

- SUPPONIAMO CHE $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow \exists\, m, n \in \mathbb{N},\ n \neq 0 \mid \sqrt{2} = \frac{m}{n}$

$2 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2 = 2n^2$

- OSSERVIAMO CHE A DESTRA ABBIAMO UN n NATURALE $\times 2 \Rightarrow$ PARI
- SE m È DISPARI ANCHE m^2 E ALLORA L'EQUAZIONE È IMPOSSIBILE
- m È PARI

$\Rightarrow m = 2^a \cdot b$ CON $a, b \in \mathbb{N}$ E b DISPARI

$m^2 = (2^a \cdot b)^2 = 2^{2a} \cdot b^2 = 4^a \cdot b^2$

↳ 2a PER FORZA PARI

$\Rightarrow$ INVECE IN $2n^2$ LA FATTORIZZAZIONE IN NUM. PRIMI CONTIENE SICURAMENTE 2^c CON c DISPARI

$\Rightarrow$ ASSURDO → $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

SI USA × INDICARE LA
□ → FINE DELLA DIMOSTRAZIONE

• NUMERI REALI $\mathbb{R} = \{$TUTTI I NUMERI SIA RAZIONALI CHE IRRAZIONALI$\}$

↳ HANNO LE STESSE CARATTERISTICHE DEI RAZIONALI

$\Rightarrow$ "$\mathbb{Q}$ È DENSO IN $\mathbb{R}$"

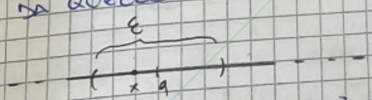
SIA $x \in \mathbb{R}$ (es. $x = \pi$)

SIA $\varepsilon > 0$ LA TOLLERANZA CHE CI DIAMO A PRIORI (es. $\varepsilon = 10^{-3}$)

$\exists\, q \in \mathbb{Q} \mid$ L'ERRORE CHE COMMETTO PRENDENDO q INVECE DI x È $< \varepsilon$

$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists\, q \in \mathbb{Q} \mid |x - q| < \varepsilon$

→ QUALSIASI SIA ε POSSO PRENDERE UN NUMERO RAZIONALE CHE DISTA POCO DA QUELLO REALE (MIGLIORE STIMA)



POSSO TROVARE UN NUMERO $q \in \mathbb{Q}$ VICINO QUANTO VOGLIO A x, SE VOGLIO ESSERE + PRECISO RIMPICCIOLISCO ε

SE $x = \pi$ CON $\varepsilon = 10^{-3} = 0{,}001$

$q = 3{,}142 = \frac{3142}{1000}$

STIMIAMO L'ERRORE: $|q - \pi| = |0{,}002 - 0{,}00159 2| < \varepsilon$

(PER OGNI INTORNO POSSO TROVARE UN RAZIONALE VICINO ALL'IRRAZIONALE)

$\Rightarrow$ DENSITÀ

• INSIEMI NUMERICI

- NUMERI NATURALI $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$ $n \in \mathbb{N}$ — 0 1 2 3 4 5 6

"STRUTTURA":
- SOMMA
- MOLTIPLICAZIONE
- $\exists$ ELEMENTO NEUTRO x LA SOMMA = 0 : $n + 0 = n \ \forall n \in \mathbb{N}$
- " " " x LA MOLTIPLICAZIONE = 1 : $n \cdot 1 = n \ \forall n \in \mathbb{N}$
- C'È UN ORDINAMENTO

- NUMERI INTERI $\mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, 2 \ldots\}$ $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ COMPRENDE I NUMERI NEGATIVI

"STRUTTURA"
- OGNI ELEMENTO POSSIEDE UN OPPOSTO, CIOÈ:

$\forall m \in \mathbb{Z} \ \exists \bar{m} \in \mathbb{Z} \mid m + \bar{m} = 0$ (=> POSSO FARE LA SOTTRAZIONE)

$\hookrightarrow \bar{m} = -m$

=> VOGLIAMO DEFINIRE UN INSIEME NUMERICO (+ GRANDE) IN CUI SIA POSSIBILE FARE LE DIVISIONI (ECCETTO CHE PER ZERO):

- NUMERI RAZIONALI $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$ COME FRAZIONI (DI N. INTERI)
=> OVVERO TUTTI I NUMERI CHE SI SCRIVONO

$\mathbb{Q} = \{$n. CON UN NUMERO FINITO DI CIFRE DECIMALI$\}$ ① $\cup$
$\cup \{$n. CON UN NUMERO DECIMALE PERIODICO$\}$ ②

① $5,123 = \frac{5123}{1000}$ LI POSSO RISCREVERE COME FRAZIONI

② $0,\bar{3} = \frac{1}{3}$

$x = 0,\bar{3}$

$10 \cdot x = 10 \cdot 0,\bar{3} = 3,\bar{3} = 3 + x$

$\Rightarrow 10 \cdot x = 3 + x$

$9 \cdot x = 3$

$\Rightarrow x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$x = 0,\overline{12}$

$100 \cdot x = 12,\overline{12} = 12 + x$

$\Rightarrow 100 \cdot x = 12 + x$

$99\,x = 12$

$\Rightarrow x = \frac{12}{99}$

es. $0,\overline{456} = \frac{456}{999}$; DIVIDO PER 9 - 99 - 999 ... A SECONDA DI QUANTE SONO LE CIFRE PERIODICHE

OSSERVAZIONE:
I RAZIONALI SONO "DENSI"

DATI 2 N. RAZIONALI POSSO SEMPRE TROVARNE UN TERZO CHE CADE IN MEZZO

13! $\forall p, q \in \mathbb{Q} \ \exists r \in \mathbb{Q} \mid p < r < q$

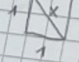
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

"STRUTTURA" (IN AGGIUNTA ALLE PROPRIETÀ DI $\mathbb{Z}$
- $\exists$ IL RECIPROCO, OVVERO:

$\forall q \in \mathbb{Q}, q \neq 0 \ \exists \bar{q} \in \mathbb{Q} \mid q \cdot \bar{q} = 1$ ($\exists q^{-1} = \frac{1}{q} \in \mathbb{Q}$ es. $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$)

• NUMERI REALI = N. IRRAZIONALI + N. RAZIONALI

es. RADICE DI 2 = $\sqrt{2}$ (N. CHE MOLTIPLICATO X SE STESSO = 2)



$x = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
PER TEOREMA DI PITAGORA $\to \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

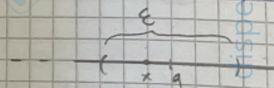
IRRAZIONALITÀ DI $\sqrt{2}$:
- SUPPONIAMO CHE $\sqrt{2}$ ...
=> $\exists m, n \in \mathbb{N}, n$ ...
$2 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow$ ...
- OSSERVIAMO CHE A DES...
- SE m È DISPARI ...
- m È PARI
=> $m = 2^a \cdot b$ CON ...
$m^2 = (2^a \cdot b)^2 =$ ...

=> INVECE UN $2n^2$ ...
2^c CON c DISPA...
=> ASSURDO $\to \sqrt{2}$ ...

• NUMERI REALI $\mathbb{R} = \{$ ...
$\hookrightarrow$ HANNO LE ...

=> "$\mathbb{Q}$ È DENSO IN ...

SIA $x \in \mathbb{R}$ (es. x ...
SIA $\varepsilon > 0$ LA TOL...
$\exists q \in \mathbb{Q} \mid$ L'ERRORE ...
$\forall x \in \mathbb{R} \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists$ ...
$\to$ QUALSIASI SIA ε ...
DA QUELLO REAL...



SE $x = \pi$ CON ε ...
$q = 3,142 = \frac{3142}{1000}$
STIMIAMO L'ERRORE ...
(PER OGNI INTORNO ...
=> DENSITÀ